

eul_wid: lww-ac

Θεοδοσίος ὁ Βιθυνικός · Theodosius of Bithynia

Spherical

Σφαιρικά

Period: Ἑλληνιστική [Hellenistic](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Ἐπιστήμη [Science](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

- ¹ P¹ Σφαῖρά ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ σημεῖόν ἐστι.
- ¹ P³ διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν μένουσαν εὐθεῖαν ἡ σφαῖρα στρέφεται. πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος.
- ¹ P⁵ κύκλου πόλος ἐν σφαίρᾳ ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ σημείου αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων πρὸς τοῖς αὐτοῖς σημείοις ἴσας γωνίας περιέχωσιν.
- ¹ 1 Ἐὰν σφαιρική ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ, ἡ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστι. σφαιρική γὰρ ἐπιφάνεια ἐπιπέδῳ τινὶ τετμήσθω, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὴν ΑΒΓ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν. εἰ μὲν οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας, φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν· αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. καὶ ὑπόκειται τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὅν· ὥστε ἡ ΑΒΓ γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν, ἥς κέντρον τὸ αὐτό, ὃ καὶ τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ μὴ ἔστω τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τὸ δὲ κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ ΔΕ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΑ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΔ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ· ἴση ἐστὶν ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἡ ἄρα ΑΒΓ γραμμὴ κύκλου περιφέρειά ἐστιν, ἥς κέντρον τὸ Ε. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ᾗ ἐν

σφαίρα κύκλος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πεσεῖται. Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὐρεῖν. ^[25]

- 1 2 Ἦστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸ κέντρον εὐρεῖν. τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ ποιήσῃ δὴ τὴν τομὴν κύκλον. ποιεῖτω τὸν ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΔΕ καὶ ἐκβεβλήσθω καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον. λέγω, ὅτι τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Κ σημεῖον· τὸ ἄρα Κ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἀλλὰ καὶ τὸ Δ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο πλὴν τὸ Η· τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἡ ἐν σφαίρα κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἀνασταθῇ, ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης τὸ κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. Σφαῖρα ἐπιπέδου οὐχ ἄπτεται μὴ τέμνοντος κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. ^[15]
- 1 3 εἰ γὰρ δυνατόν, σφαῖρα ἐπιπέδου ἀπτέσθω μὴ τέμνοντος κατὰ πλείονα σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΓ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσῃ ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιεῖτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΔΑΒ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τὴν ΕΑΒΖ εὐθεῖαν. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον οὐ τέμνει τὴν σφαῖραν, οὐδὲ ὁ ΔΑΒ κύκλος ἄρα τέμνει τὴν ΕΑΒΖ εὐθεῖαν. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΑΒ ἐπὶ τῆς περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τυχόντα τὰ Α, Β, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΔΑΒ κύκλου. ἀλλὰ καὶ ἐκτός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. σφαῖρα ἄρα ἐπιπέδου οὐχ ἄπτεται μὴ τέμνοντος κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδου ἄπτηται μὴ τέμνοντος, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. ^[15]
- 1 4 σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδου τινὸς ἀπτέσθω μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Β σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΑ ὀρθὴ ἐστὶν πρὸς τὸ ἐπίπεδον. ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΒΑ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσῃ ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιεῖτω οὖν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΑΓΔ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τὴν ΕΑΖ εὐθεῖαν. πάλιν δὲ διὰ τῆς ΑΒ ἕτερον ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὸν ΑΘ κύκλον, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τὴν ΚΑΛ εὐθεῖαν. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ΕΑΖ ἄρα εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΓΔ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΕΑΖ κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπέζευκται ἡ ΑΒ, ἡ ΑΒ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΑΖ [καὶ φανερόν, ὅτι τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΔ κύκλου, ἐπειδὴ περ ἐκβέβληται διὰ τῆς ΒΑ οὖσης ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπίπεδον τὸ τοῦ ΑΓΔ κύκλου]. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τὴν ΚΑΛ κάθετός ἐστιν ἡ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΑ δύο εὐθείαις ταῖς ΕΖ, ΚΛ τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς ὀρθῇ ἐφέστηκεν, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΒΑ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΖ, ΚΛ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ἐφαπτόμενον. ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας. Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδου ἄπτηται μὴ τέμνοντος, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. ^[25]
- 1 5 σφαῖρα γὰρ ἐπιπέδου ἀπτέσθω μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΒ ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ. ἐπεὶ οὖν σφαῖρα ἐπιπέδου ἄπτεται μὴ τέμνοντος κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ ΓΑ, ἡ ΓΑ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΑ ὀρθὴ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ

τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Α τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ δύο πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο πλὴν τὸ ἐπὶ τῆς ΒΑ· ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. Τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ μείζον ἐλάττονες. ^[15]

1 6 ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ ὁ μὲν ΓΔ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ΑΒ, ΕΖ πρότερον ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι μέγιστος μὲν ἐστὶν ὁ ΓΔ, ἴσοι δὲ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΕΖ. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Η σημεῖον· τὸ αὐτὸ ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ΓΔ κύκλου· καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὰ τῶν ΑΒ, ΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΘ, ΗΚ καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Κ, Θ σημεῖα· τὰ Θ, Κ ἄρα σημεῖα κέντρα ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ. καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Η, Κ ἐπὶ τοὺς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ κύκλους εὐθεῖαι αἱ ΘΛ, ΗΜ, ΚΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΛ, ΗΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΘ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΘΛ οὕσα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΘΗ γωνία. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΝ ὀρθή ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΘΗ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΛΗΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῆς ὑπὸ ΛΗΘ· πλευρὰ ἄρα ἡ ΛΗ πλευρᾶς τῆς ΛΘ ἐστὶ μείζων. καὶ ἐστὶν ἡ ΛΗ τῇ ΗΜ ἴση διὰ τὸ τὸ Η σημεῖον κέντρον εἶναι τῆς σφαίρας, καὶ προσπεπτωκέναι ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰς ΛΗ, ΗΜ· καὶ ἡ ΗΜ ἄρα τῆς ΛΘ μείζων ἐστὶ. καὶ ἡ μὲν ΗΜ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΓΔ κύκλου, ἡ δὲ ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔ κύκλος τοῦ ΑΒ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων καὶ μὴ ὄντων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. λέγω δέ, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΕΖ κύκλοι ἴσοι εἰσὶν. ἐπεὶ γὰρ οἱ ΑΒ, ΕΖ κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΛ τῇ ΗΝ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΛΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΝ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΛΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΝ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΝΚ, ΚΗ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΚ, ΚΗ. ὣν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΛ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΝ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΚΝ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου, ἡ δὲ ΝΚ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου. ἀλλὰ δὲ πάλιν μείζον ἀπεχέτω ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἢ περ ὁ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΕΖ κύκλου. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ μείζον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ ΑΒ κύκλος ἢ περ ὁ ΕΖ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΛ τῇ ΗΝ· τὸ γὰρ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας καὶ τὰ Λ, Ν πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΝ, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΘ, ΘΗ τοῖς ἀπὸ τῶν ΝΚ, ΚΗ. ὣν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΗ μείζον ἐστίν· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΚ ἔλασσόν ἐστίν· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΘ τῆς ΝΚ. ^[45]

1 6 (50) καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΘΛ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ, ἡ δὲ ΝΚ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖ κύκλου· καὶ ὁ ΑΒ κύκλος ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ΕΖ κύκλου. τῶν ἄρα ἐν τῇ σφαίρᾳ οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσοι εἰσὶν, οἱ δὲ μείζον ἐλάττονες. Ἐὰν ἤ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον. ^[55]

1 7 ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Ε σημεῖον, τὸ δὲ τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. διήχθωσαν γὰρ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αἱ ΑΖ, ΖΓ, ΒΖ, ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΔ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὲ αἱ ΒΖ, ΖΕ δύο ταῖς ΔΖ, ΖΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω. καὶ

βάσις ἢ BE βάσει τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση· τὸ γὰρ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας καὶ τὰ Β, Δ πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ BZE γωνία τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BZE, ΔZE· ἢ EZ ἄρα τῇ ΒΔ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ EZ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΒΔ τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκε, καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶ. τὸ δὲ διὰ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἐπίπεδόν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· καὶ ἢ EZ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον. Ἐὰν ἦ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου. ^[20]

¹ ⁸ ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἢ ΔΕ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ε σημεῖον· τὸ Ε ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΔΕ ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Ζ, Η σημεία. λέγω, ὅτι τὰ Ζ, Η σημεία πόλοι εἰσὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. διήχθωσαν γὰρ αἱ ΑΕΓ, ΒΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, ΑΗ, ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ἢ ΖΕ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΖΕΑ, ΖΕΓ, ΖΕΒ, ΖΕΘ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΑΕ τῇ ΕΓ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΖ, βάσις ἄρα ἢ ΑΖ βάσει τῇ ΓΖ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ Η σημεῖον· τὰ Ζ, Η ἄρα σημεία πόλοι εἰσὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐὰν ἄρα ἦ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τὰ ἐξῆς. Ἐὰν ἦ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ ἐπ' αὐτὸν κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τὸ κέντρον πεσεῖται τοῦ κύκλου καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸν ἕτερον πόλον πεσεῖται τοῦ κύκλου. ^[20]

¹ ⁹ ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἀπὸ δὲ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ τοῦ Δ κάθετος ἦχθω ἐπ' αὐτὸν ἢ ΔΕ καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΔΕ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. λέγω, ὅτι τὸ μὲν Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ δὲ Ζ ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ κύκλου. διήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε αἱ ΑΕ, ΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, ΑΖ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἢ ΔΕ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ οὐσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΕΑ, ΔΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΑΔ τῇ ΔΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἐστὶν ἴσον· ἴση ἄρα ἢ ΑΕ τῇ ΕΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ· τὸ Ε ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. λέγω δὲ, ὅτι καὶ τὸ Ζ σημεῖον ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἢ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΖ, βάσις ἄρα ἢ ΑΖ βάσει τῇ ΒΖ ἴση ἐστὶν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ Ε κέντρον· τὸ μὲν ἄρα Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ Ζ ὁ ἕτερος πόλος. Ἐὰν ἦ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἢ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται. ^[30]

¹ ¹⁰ ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, πόλοι δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν τὰ Ε, Ζ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ διὰ τῶν πόλων ἀγομένη καὶ ἔστω ἢ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἢ ΕΖ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ διὰ τοῦ

κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται. συμβαλλέτω γὰρ τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον ἢ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου διήχθωσαν αἱ ΑΗΓ, ΒΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΒΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστὶ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΗ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΗ δύο ταῖς ΗΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΗ βάσει τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΕΒΗ τρίγωνον τῷ ΕΔΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΗΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΕ γωνία. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΕ, ΔΗΕ γωνιῶν· ἡ ΕΗ ἄρα τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΕΗ [καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΑΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ, πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΕΗΖ]· ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἦξει. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, ἀπὸ δέ τινος τῶν πόλων αὐτοῦ ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΕΗ καὶ συμβάλλει τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, τὸ Η ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Η τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἀνίσταται ἡ ΕΗΖ, ἐπὶ τῆς ΕΗΖ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· ἡ ΕΖ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας. ἡ ΕΖ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας. Ἐν σφαίρᾳ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους.

[30]

1 11 ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα. λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους. εἰλήφθω γὰρ αὐτῶν τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Η σημεῖον· τὸ δὲ αὐτό ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΗΖ. καὶ ἐπεὶ τὰ Ε, Η, Ζ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ ΔΓ, ἐπὶ ἀμφοτέροις ἄρα τοῖς ἐπιπέδοις τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων τὰ Ε, Η, Ζ σημεῖα ἐστίν· ἐν τῇ κοινῇ τομῇ ἄρα αὐτῶν ἐστὶ. πάντων δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖα ἐστὶν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒ κύκλου, ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἐστὶν αὐτοῦ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΑΖ, ΕΒΖ ἡμικύκλιόν ἐστὶ. πάλιν ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔ κύκλου, ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἐστὶν αὐτοῦ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΓΖ, ΕΔΖ ἡμικύκλιόν ἐστὶν. οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους. Ἐν σφαίρᾳ οἱ δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι μέγιστοί εἰσιν. ^[15]

1 12 ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα. λέγω, ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ κύκλοι μέγιστοί εἰσιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῆς σφαίρας. τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα κατὰ τὸ Η· τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν κύκλων. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῷ μὲν τοῦ ΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ, τῷ δὲ τοῦ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ ΗΘ, ἐπὶ τῆς ΗΘ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ΗΚ· ἐπὶ τῆς ἄρα κοινῆς τομῆς τῶν ΗΘ, ΗΚ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. ἡ δὲ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἐστὶ τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ κέντρον τὸ Η σημεῖον· οἱ δὲ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντες τῇ σφαίρᾳ κύκλοι μέγιστοί εἰσιν· ἐν σφαίρᾳ ἄρα οἱ δίχα τέμνοντες ἀλλήλους κύκλοι μέγιστοι. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, δίχα αὐτὸν τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων. ^[15]

1 13 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΒΖΔ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω. λέγω, ὅτι δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΒΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ Η σημεῖον· τὸ δὲ αὐτό ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας· καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΗΘ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη

καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεία. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς ἄλληλα τό τε τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τὸ τοῦ ΕΒΖΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΘΑ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων οὕσα τῷ ΑΒΓΔ, ἡ ΑΓ ἄρα καὶ τῷ ΕΒΖΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ καὶ συμπίπτει τῷ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ Θ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΒΕΔ, ΒΖΔ ἡμικύκλιόν ἐστιν. ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τέμνει. λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ καὶ ἐκβέβληται ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ, ἐὰν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου, τὰ Α, Γ ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου. ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. ἔτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ δίχα· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δίχα τέμνη, πρὸς ὀρθὰς τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων. [25]

1 14 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα τὸν ΕΒΖΔ δίχα τεμνέτω. λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπεξεύχθω γὰρ αὐτῶν ἡ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τέμνει, ἐκάτερον ἄρα τῶν ΒΕΔ, ΒΖΔ ἡμικύκλιόν ἐστιν· ἡ ΒΔ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΒΖΔΕ κύκλου. τετμήσθω οὖν ἡ ΒΔ δίχα κατὰ τὸ Θ σημεῖον· τὸ Θ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ Η σημεῖον· τὸ δ' αὐτὸ καὶ τῆς σφαίρας ἐστὶ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεία. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπέζευκται εὐθεῖα ἡ ΗΘ, ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΕΒΖΔ· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΗΘ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸν ΕΒΖΔ. ἐν δὲ τῶν διὰ τῆς ΗΘ ἐπιπέδων ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· καὶ ὁ ΑΒΓΔ ἄρα ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν ΕΒΖΔ. ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει. λέγω δὴ, ὅτι καὶ διὰ τῶν πόλων. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ καὶ ἐκβέβληται ἐπ' ἀμφοτέρω τὰ μέρη καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Α, Γ σημεία, τὰ Α, Γ ἄρα σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ ΕΒΖΔ· ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἄρα τὸν ΕΒΖΔ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. ἔτεμνε δὲ αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον πρὸς ὀρθὰς τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων τέμνη, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ. [25]

1 15 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΒΖΔ τεμνέτω διὰ τῶν πόλων. λέγω, ὅτι δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ. ἔστωσαν γὰρ οἱ πόλοι τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου τὰ Α, Γ σημεία· φανερόν δὴ, ὅτι ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου εἰσὶ· διὰ γὰρ τῶν πόλων τέμνει ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον· καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΒΖΔ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΑΓ, ἐὰν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται, ἡ ΑΓ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΕΒΖΔ κύκλον· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΑΓ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς ΕΒΖΔ. ἐν δὲ τῶν διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν ΕΒΖΔ κύκλον· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. καὶ δίχα δὲ αὐτὸν τεμεῖ· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλος τὸν ΕΒΖΔ κύκλον δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. Ἐὰν ἡ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος, ἡ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. [15]

- 1 16 ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἤχθωσαν γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Ε σημείου τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΖΑ· ἡ ΒΑ ἄρα τετραγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ ΖΑ ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ. λέγω, ὅτι ἡ ΖΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓΔ, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἐκάστην τῶν ΑΕ, ΒΕ, ΓΕ, ΔΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΖ. κοινὴ δὲ ἡ ΕΑ· δύο δὲ αἱ ΒΕ, ΕΑ δύο ταῖς ΑΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ὀρθή τῇ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΒΑ βάσει τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ μὲν ΑΖ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡ δὲ ΒΑ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. Ἐὰν ἦ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἢ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, καὶ αὐτὸς μέγιστος ἔσται. ^[20]
- 1 17 ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, πόλος δὲ αὐτοῦ τὸ Δ σημεῖον, ἡ δὲ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἡ ΔΓ ἴση ἔστω τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ μέγιστός ἐστιν. ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΔΓ καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπίπεδον· τομὴν δὴ τινα ποιήσει μέγιστον κύκλον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ποιείτω τὸν ΒΔΓΕ, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΒ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΓ, ΔΒ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡμικυκλίου ἄρα ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΒΔΓ· διάμετρος ἄρα ἡ ΒΓ τοῦ ΔΕ κύκλου. καὶ ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὁ ΔΒΕΓ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΔΕ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ. καὶ ἐστὶ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΒΓ· ἡ ΒΓ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ τῆς σφαίρας μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓ κύκλος. Τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι. ^[15]
- 1 18 ἔστω ὁ δοθείς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΔΕΖ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΔΕ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ, τὴν δὲ ΕΖ τῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ε σημείου τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ. ἤχθω δὲ διάμετρος τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΓΘ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ ἴση ἐστὶ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΗΖ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ ΑΓΘ ὀρθή τῇ ὑπὸ ΔΖΗ ἴση ἐστὶ, καὶ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα τῇ ΔΗ ἴση ἐστὶ. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΘ διάμετρος τοῦ κύκλου· ἡ ΔΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου. Τῆς δοθείσης σφαίρας τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι. ^[15]
- 1 19 νενοήσθω γὰρ ἡ σφαῖρα, ἥς δεῖ τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ· δυνατόν ἄρα ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου τὴν διάμετρον ἐκθέσθαι. ἐκ τριῶν οὖν εὐθειῶν, αἱ εἰσι δύο μὲν ταῖς ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΒΓΔ ἴσαι, μία δὲ τῇ διαμέτρῳ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΕΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι ἑκατέραν μὲν τῶν ΖΕ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ Α,

τὴν δὲ ΖΗ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ζ, Η ταῖς ΖΕ, ΕΗ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ ΖΘ, ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΘ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. νενοήσθω γὰρ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ΑΚ καὶ διὰ τῆς ΑΚ ἐπίπεδον· τομὴν δὲ ποιήσει μέγιστον κύκλον. ποιείτω νὸν ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΒ, ΒΔ, ΔΚ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΔ δύο ταῖς ΕΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΚΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΖΗ τῇ ὑπὸ ΕΘΗ ἴση, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΕΗΘ ἴση· δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΚΔ, ΕΘΗ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΔΚ, ΔΚΑ ταῖς δύο γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΕΗΘ, ΗΘΕ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΑΔ τῇ ΕΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΕΘ. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΚ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· ἡ ΕΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. Διὰ δύο δοθέντων σημείων, ἃ ἐστὶν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστον κύκλον γράψαι. ^[25]

1 20 ἔστω τὰ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β, ἃ ἐστὶν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας· δεῖ δὲ διὰ τῶν Α, Β σημείων μέγιστον κύκλον γράψαι. εἰ μὲν οὖν τὰ Α, Β κατὰ διάμετρόν ἐστι τῆς σφαίρας, φανερόν, ὅτι μέγιστοι κύκλοι ἅπτεροι διὰ τῶν Α, Β σημείων γραφήσονται. μὴ ἔστω δὲ τὰ Α, Β σημεῖα κατὰ διάμετρον τῆς σφαίρας, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΔΕ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔΕ· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. πάλιν πόλῳ τῷ Β, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΕΗ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΕΗ κύκλος· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν μέγιστον κύκλον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὰ Α, Β εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΕΒ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον· ἴση ἄρα ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ ἐστὶν· ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΒ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΑ τῇ ΕΒ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΒΑΘ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΘ κύκλος· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ ἄρα δύο δοθέντων σημείων τῶν Α, Β, ἃ ἐστὶν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΒΘ. Τοῦ δοθέντος ἐν σφαίρᾳ κύκλου τὸν πόλον εὑρεῖν. ^[20]

1 21 ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὲ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸν πόλον εὑρεῖν. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τυχόν τι σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπειλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΑ, ΑΕ, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ ΔΕ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. ὁ δὲ ΑΒΓ κύκλος ἥτοι μέγιστός ἐστιν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον μὴ μέγιστος, καὶ διὰ δύο δοθέντων σημείων τῶν Ζ, Α, ἃ ἐστὶν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΖΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ περιφέρεια τῇ ΑΕ περιφερείᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ΑΔΖ ὅλη τῇ ΑΕΖ ἴση ἐστὶν· ὁ ΖΑΘ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον δίχα τέμνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΖΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ μέγιστον ὄντα δίχα τέμνει, πρὸς ὀρθὰς τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ διὰ τῶν πόλων· ὁ ΖΘΑ ἄρα τὸν ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς τε καὶ διὰ τῶν πόλων τέμνει. τετμήσθω ἡ ΖΑ δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἀλλὰ δὲ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλος μέγιστος ἔστω. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔΖ περιφέρεια τῇ ΑΕΖ περιφερείᾳ. καὶ τετμήσθω ἡ ΑΖ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΖ περιφερειῶν τεταρτημορίου ἐστὶν· ὁ ἄρα πόλῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΖ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α σημείου, ἐπεὶ περ τὸ Α τῷ Ζ κατὰ διάμετρόν ἐστιν. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΖΑΘ· ὁ ἄρα ΖΑΘ κύκλος μέγιστός ἐστιν· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ τὸ Γ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΖΑΘ κύκλου, ὁ ΑΒΓ ἄρα

κύκλος τὸν ΖΑΘ κύκλον διὰ τῶν πόλων τέμνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΑΘ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΑΘ κύκλον· καὶ ὁ ΖΑΘ κύκλος ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΖΑΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τέμνει καὶ διὰ τῶν πόλων· ὁ ΖΑΘ ἄρα κύκλος τὸν ΑΒΓ κύκλον δίχα τε καὶ διὰ τῶν πόλων τεμεῖ. τετμήσθω ἡ ΖΑ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Η σημεῖον· τὸ Η ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. [Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου οὔσα εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ^[35]

- 1 22 ἡ ἀπόδειξις ὡς ἐν τοῖς κυκλικοῖς· ἐὰν γὰρ διὰ τῆς διαμέτρου διὰ τοῦ κέντρου οὔσης τῆς σφαίρας καὶ τῆς μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσης ἐπίπεδον ἐκβληθῇ, τομὴν ποιήσουσι γραμμὴν κύκλον, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου οὔσα εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν δίχα τέμνουσα· ὥστε καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.] [Ἐὰν ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸν κύκλον. ^[5]
- 1 23 ἔστω γὰρ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τὸ μὲν κέντρον τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Δ σημεῖον, τὸ δὲ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. διήχθω γὰρ τις διὰ τοῦ Ε σημείου εἰς αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ ΑΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δύο ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ ἴση ἐστὶν· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΔΕ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πάσαις ταῖς διὰ τοῦ Ε ἀγομέναις εὐθεῖαις ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΔΕ εὐθεῖα· ἡ ΔΕ ἄρα εὐθεῖα καὶ τῷ τοῦ ΑΓ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν.] Ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται. ^[15]
- 2 1 Ἐν σφαίρᾳ οἱ παράλληλοι κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν. ἔστωσαν γὰρ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, ὅτι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν. εἰλήφθωσαν γὰρ τοῦ ΑΒΓ κύκλου οἱ πόλοι καὶ ἔστωσαν οἱ Π, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ ἀγομένη εὐθεῖα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν κύκλον καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστὶν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ ἐστὶν ὁ ΑΒΓ κύκλος παράλληλος τῷ ΔΕΖ κύκλῳ, καὶ ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἦκται ἡ ΗΘ καὶ ἐκβέβληται ἐπ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη καὶ συμπίπτει τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὰ Η, Θ σημεία, ἐὰν δὲ ἡ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη, ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου, τὰ Η, Θ ἄρα σημεία πόλοι εἰσὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. εἰσὶ δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἄρα περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν. Οἱ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ^[15]
- 2 2 ἔστωσαν περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους τοὺς Η, Θ ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. λέγω, ὅτι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτοῦ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΗΘ, ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον ἡ ΗΘ ὀρθή ἐστὶν. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστὶν, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται· ἐκβαλλόμενα ἄρα τὰ διὰ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓ κύκλος τῷ ΔΕΖ κύκλῳ. Ἐὰν

ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνωσι τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι. ^[10]

² ³ ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΑΓΕ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τεμνέτωσαν τὸ Γ τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ. λέγω, ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι. ἔστωσαν γὰρ αὐτῶν κοινὰ τομαὶ τοῦ μὲν ΑΓΕ καὶ τοῦ ΑΒΓ ἢ ΑΓ, τοῦ δὲ ΑΓΕ καὶ τοῦ ΓΔΕ ἢ ΗΓΖ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΕ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΕ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΓΕ ὀρθός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων, καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΕ κύκλον· καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἄρα τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΕ κύκλον. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἐστὶν ἡ ΖΗ· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΓΕ κύκλον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΓΕ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστίν. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρω τῶν ΑΓ, ΓΕ οὔσα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΕ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΖΗ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΓ, ΓΕ. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου τῆς ΑΓ πρὸς ὀρθάς ἦκται ἡ ΖΗ, ἡ ΖΗ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὸ Γ σημεῖον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου ἐφάπτεται ἡ ΖΗ κατὰ τὸ Γ σημεῖον. ἐν δὲ σφαίρᾳ κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ὅταν ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφάπτηται. ἅπτεται δὲ ἡ ΖΗ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· καὶ οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἄρα κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τῆς συναφῆς αὐτῶν ἐλεύσεται. ^[25]

² ⁴ ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Ζ σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔΕ κύκλου πόλος τὸ Η σημεῖον. λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν Ζ, Η πόλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος διὰ τοῦ Γ σημείου ἦξει. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΖΒΗ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΚΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔΕ κύκλος τῷ ΒΚΘ κύκλῳ· περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΒΚΘ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΖΒΗ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ Β τέμνουσι τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ, ΒΚΘ κύκλοι. ἀλλὰ καὶ τέμνουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν Ζ, Η πόλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος οὐχ ἦξει διὰ τοῦ Γ σημείου. ὁ ἄρα διὰ τῶν πόλων τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων μέγιστος κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τῆς συναφῆς τῶν κύκλων. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν τοῦ ἐνὸς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ἑτέρου πόλων. ^[15]

² ⁵ ἐν σφαίρᾳ γὰρ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Ζ σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔΕ κύκλου πόλος τὸ Η σημεῖον. λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν Ζ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τοῦ Η σημείου ἐλεύσεται. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ὁ ΖΓΘ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Ζ, Η πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΖΓΗ· ἦξει δὲ διὰ τοῦ Γ. ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ μέγιστός ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΖΓΗ, ΖΓΘ, δίχα ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλους· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΚΓ, ΖΛΓ ἡμικύκλιόν ἐστιν· ἡ ΖΓ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῆς σφαίρας, ἐπεὶ καὶ τῶν μεγίστων κύκλων τῶν ΖΓΗ, ΖΓΘ. ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ ἄρα διὰ τῶν Ζ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τοῦ Η σημείου ἦξει. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἐφάπτεται καὶ ἑτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ. ^[15]

² ⁶ ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΓΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται καὶ ἑτέρου κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΓΔ κύκλῳ. εἰλήφθω ὁ πόλος τοῦ ΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Γ, Ε

σημείων μέγιστος κύκλος ὁ ΓΕΔΒΖΗ, καὶ ἀπειλήφθω τῇ ΓΕ περιφερεία ἴση ἢ ΒΖ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἐνὸς πόλων τοῦ Ε καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γεγράφται ὁ ΓΕΔΒΖΗ, ὁ ΓΕΔΒΖΗ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλων. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΒΗ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΓΗ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Β τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἄρα ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ, ΒΗ κύκλοι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῇ ΒΖ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΒ· ὅλη ἄρα ἡ ΓΒ ὅλη τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. ἡμικυκλίου δὲ ἐστὶν ἡ ΓΒ· ἡμικυκλίου ἄρα καὶ ἡ ΕΖ· τὸ Ε ἄρα κατὰ διάμετρόν ἐστι τῷ Ζ. καὶ ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον πόλος τοῦ ΓΔ κύκλου· καὶ τὸ Ζ ἄρα ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΓΔ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΕΖ ἡμικυκλίου ἐστὶ, καὶ ἐστὶ τὸ Ζ πόλος τοῦ ΒΗ κύκλου, καὶ τὸ Ε ἄρα ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τοῦ ΒΗ κύκλου· οἱ ΓΔ, ΒΗ ἄρα κύκλοι περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες παράλληλοί εἰσιν [παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΔ κύκλος τῷ ΒΗ κύκλῳ]. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΖ, ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΓΔ κύκλος τῷ ΒΗ κύκλῳ. ἀλλὰ καὶ παράλληλος ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ἐφάπτεται καὶ ἐτέρου κύκλου τοῦ ΒΗ ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΓΔ. Ἐὰν ὣσιν ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι, ὁ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος ἐφάπτεται καὶ τοῦ ἐτέρου. ^[25]

2 7 ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ δύο ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ. λέγω, ὅτι ὁ τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος ἐφάπτεται καὶ τοῦ ΓΔ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐφαπτέσθω μὲν τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕ κατὰ τὸ Α σημεῖον, τοῦ δὲ ΓΔ μὴ ἐφαπτέσθω. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΒ ἐφάπτεται, ἐφάπτεται ἄρα καὶ ἐτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΑΒ· ἐφαπτέσθω οὖν τοῦ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒ τῷ ΕΖ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ὁ ΑΒ τῷ ΓΔ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ὁ ΓΔ ἄρα τῷ ΕΖ ἴσος ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἔσονται ἄρα ἐν σφαίρᾳ τρεῖς κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ τοῦ ΑΒ μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος οὐκ ἐφάπτεται καὶ τοῦ ΓΔ· ἐφάπτεται ἄρα. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος πρὸς τινὰ κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ λοξὸς ᾗ, ἐφάπτεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ προειρημένῳ. ^[10]

2 8 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ πρὸς τινὰ κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΒΔ λοξὸς ἔστω, τουτέστι μὴ ἔστω διὰ τῶν πόλων. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος λοξὸς ἐστὶ πρὸς τὸν ΒΔ, ὁ πόλος τοῦ ΒΔ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. εἰλήφθω οὖν ὁ πόλος τοῦ ΒΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου καὶ ἐνὸς τῶν τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΓΗ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΑΕ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΖ τῷ ΒΔ· περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΖ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Α τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἄρα ἀλλήλων· ὁ ἄρα ΑΒΓ κύκλος τοῦ ΑΖ κύκλου ἐφάπτεται. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΖ ἐφάπτεται, ἐφάπτεται ἄρα καὶ ἐτέρου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ ΑΖ· ἐφαπτέσθω οὖν τοῦ ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΖ τῷ ΓΗ ἴσος τέ ἐστι καὶ παράλληλος, ἀλλ' ὁ ΑΖ τῷ ΒΔ ἐστὶ παράλληλος, καὶ ὁ ΓΗ ἄρα τῷ ΒΔ ἐστὶ παράλληλος· ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος ἐφάπτεται δύο κύκλων τῶν ΑΖ, ΓΗ ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ ΒΔ. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφῇ, δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. ^[20]

2 9 ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΖΑΕΒ, ΖΓΕΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Ζ, Ε σημεία, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΒΔ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΓΒΔ κύκλος δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΖΑ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΑΕ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΖΒ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΒΕ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΖΓ τῇ ΓΕ, καὶ ἔτι ἡ ΖΔ τῇ ΔΕ.

ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ΑΓΒΔ κύκλου καὶ τοῦ ΖΑΕΒ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΒ, τοῦ δὲ ΑΓΒΔ καὶ τοῦ ΖΓΕΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ τὰ Ζ, Η, Ε σημεῖα ἐν τῷ τοῦ ΑΕΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΖΔΕΓ κύκλου ἐπιπέδῳ, τὰ Ζ, Η, Ε ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ τῶν δύο ἐπιπέδων· πάντως δὲ δύο ἐπιπέδων ἡ κοινὴ τομὴ εὐθεῖα ἐστίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΒΔ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΑΕΒ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΒ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΖΑΕΒ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΖΔΕΓ κύκλου. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΓΒΔ κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ κύκλων, καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΓΒΔ κύκλον. ἐὰν δὲ δύο ἐπίπεδα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾤ, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν τῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ΖΑΕΒ, ΖΔΕΓ τῷ ΑΓΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἐστὶν ἡ ΖΗΕ· καὶ ἡ ΖΗΕ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΓΒΔ κύκλον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΓΒΔ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς ΖΗΕ ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ οὔσα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΒΔ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΖΗΕ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΓΔ· καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὴν ΖΗΕ. ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΖΑΕΒ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΑΒ εὐθειάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν τὴν ΖΗΕ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΑΕ περιφερείᾳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΖΒ τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΓ τῇ ΓΕ, καὶ ἔτι ἡ ΖΔ τῇ ΔΕ ἐστὶν ἴση. ὁ ΑΓΒΔ ἄρα κύκλος δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. Ἐὰν ὥσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοιαὶ εἰσιν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. ^[35]

2 10 ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ. λέγω, ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοιαὶ εἰσιν, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΒΓ περιφέρεια ὁμοία ἐστὶ τῇ ΖΗ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΔΑ τῇ ΘΕ, καὶ ἔτι ἡ ΑΒ τῇ ΕΖ, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν, τουτέστιν ὅτι αἱ τέσσαρες αἱ ΖΒ, ΗΓ, ΘΔ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΒΖΘΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΑΕΗΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΓ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΖΚΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΖΘ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ καὶ τοῦ ΕΚΗ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΗΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΒΓΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς· ἡ ΑΓ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· τὸ Λ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΗΓ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΕΖΗΘ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς· ἡ ΕΗ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΘ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τὸ Μ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΒΖΘΔ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν ἄρα τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΖΘ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΕΗ παράλληλος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΛ, ΛΓ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΖΜ, ΜΗ εἰσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΜΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΛΓ γωνία. καὶ εἰσι πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ βέβηκεν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΜΗ γωνία ἐπὶ τῆς ΖΗ περιφερείας, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΛΓ γωνία ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΖΗ περιφερείᾳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΓΔ περιφέρεια ὁμοία ἐστὶ τῇ ΗΘ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΕΘ, καὶ ἔτι ἡ ΑΒ τῇ ΕΖ· αἱ ἄρα

τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοιαί εἰσι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· λοιπαὶ ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΕΑ, ΖΒ, ΗΓ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ ἄρα τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. Ἐὰν ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐπισταθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι πρὸς τοῖς πέρασι τῶν τμημάτων ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι προσβληθῶσιν, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων. ^[5]

2 11 ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεστάτω τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν πρὸς τοῖς πέρασι τοῖς Α, Δ σημείοις αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων τῶν ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων πρὸς τὰς τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι προσβεβλήσθωσαν αἱ ΗΒ, ΘΕ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων ἐπὶ τὰς τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι· πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς, τουτέστιν ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΖ. πιπτέωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων καὶ ἔστω τὰ Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΒΜ, ΛΕ, ΕΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΚ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΚΒ οὔσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΘΛΕ γωνία ὀρθὴ ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἴσαι ἀπειλημμένοι εἰσὶ περιφέρειαι αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἡγμένοι εἰσὶν αἱ ΚΗ, ΘΛ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΘΕ, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΒ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΛ, ΛΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΚ, ΚΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΛ, ΛΕ· ὦν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ ἐστὶν ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΔΝ, ὦν ἡ ΑΚ τῇ ΔΛ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΜ λοιπῇ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΝΕ ἴση· δύο δὲ αἱ ΚΜ, ΜΒ δύο ταῖς ΔΝ, ΝΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΛΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΝΕ ἐστὶν ἴση. ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὥσι βεβηκυῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ. Ἐὰν ἐν ἴσοις κύκλοις ἐπὶ διαμέτρων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐπισταθῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι πρὸς τοῖς πέρασιν ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων, αἱ ἐπὶ τὰ γενόμενα σημεῖα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις. ^[5]

2 12 ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφεστάτω τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τοῖς πέρασι τῶν τμημάτων αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἀφηρήσθωσαν ἴσαι περιφέρειαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πρὸς τοῖς πέρασι τῶν διαμέτρων αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΒ, ΘΕ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ ΘΕ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Θ σημείων ἐπὶ τὰς τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΚ, ΘΛ· πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς, τουτέστιν ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΖ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων καὶ ἔστω τὰ Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΒΜ, ΛΕ, ΕΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια

τῇ ΔΕ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΝΕ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗΓ, ΔΘΖ, καὶ ἀπειλημμένοι εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἡγμένοι εἰσὶν αἱ ΚΗ, ΘΛ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΜ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΚ τῇ ΔΛ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΜ λοιπῇ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΝΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΒ δύο ταῖς ΔΝ, ΝΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΝΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΔΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἡ ΗΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΚΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΒ γωνία. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΘΛΕ γωνία ὀρθή ἐστὶν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΗΚ τῇ ΘΛ, ἡ δὲ ΚΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΗΚ, ΚΒ δύο ταῖς ΘΛ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΗΒ βάσει τῇ ΘΕ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ὧσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐνὸς μὲν αὐτῶν ἐφαπτόμενοι, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοιαὶ εἰσιν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσαι εἰσίν. ^[5]

2 13 ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, ΚΛ, καὶ γεγράφωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΕΚΗΓΦΤ, ΒΖΛΘΔΥ ἐνὸς μὲν αὐτῶν τοῦ ΚΛ ἐφαπτόμενοι κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνοντες. λέγω, ὅτι αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοιαὶ εἰσιν. τίνες δὲ εἰσιν αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἡμικυκλίων, γνωσόμεθα οὕτως· ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλους, ἡ ἄρα ΣΚΑΤ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια· ἡ ΚΑΤ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡμικυκλίου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΤΦΓΣ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια, ἡ ἄρα ΚΣΗΓΦΤ μείζων ἐστὶν ἡμικυκλίου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΑΤ ἐλάσσων ἐστὶν ἡμικυκλίου· ἔστω οὖν ἡμικυκλίου ἡ ΚΑΤΦ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΣΒΤ ἡμικυκλίου ἐστὶ περιφέρεια, ἡ ἄρα ΛΣΒΤ μείζων ἐστὶν ἡμικυκλίου. κείσθω οὖν ἡμικυκλίου ἡ ΛΣΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἡμικύκλιον, τουτέστι τὸ ΚΑΤΦ, ἀσύμπτωτόν ἐστι τῷ ἀπὸ τοῦ Λ ἡμικυκλίῳ, τουτέστι τῷ ΛΣΒΥ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΚΣΓΦ ἡμικύκλιον ἀσύμπτωτόν ἐστι τῷ ΛΔΤΥ ἡμικυκλίῳ· αἱ ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων οὐσαι τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ ΚΡΛ, ΕΞΖ, ΑΝΒ, ΗΟΘ, ΓΠΔ περιφέρειαι εἰσιν. λέγω οὖν, ὅτι αἱ μὲν ΚΡΛ, ΕΞΖ, ΑΝΒ ὁμοιαὶ εἰσι καὶ ἔτι αἱ ΚΡΛ, ΗΟΘ, ΓΠΔ ὁμοιαὶ ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ δὲ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν ὅτι αἱ μὲν τέσσαρες αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ δὲ τέσσαρες αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΗΓ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ ἔστω τὸ Μ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Μ καὶ ἑκατέρου τῶν Κ, Λ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφωσαν οἱ ΜΚΞΝ, ΜΛΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΕΚΗΓΤ, ΚΛ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Κ σημεῖον, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἐνὸς πόλων τοῦ ΚΛ καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΜΚΞΝ, ὁ ΜΚΞΝ ἄρα κύκλος καὶ διὰ τῶν τοῦ ΑΕΚΗΓΤ ἥξει πόλων καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΜΛΟΠ ἥξει διὰ τῶν τοῦ ΒΖΛΘΔΤ πόλων καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΕΚΗΓΤ, ΒΖΛΘΔΤ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ τῶν Κ, Λ σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται τὰ ΚΜ, ΛΜ καὶ τὰ τούτοις συνεχῇ, ἀπὸ δὲ αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ ΚΜ, ΜΛ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὐσαι τῶν ὅλων, καὶ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ, ἴσας ἄρα περιφερείας ἀπολήφονται· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ περιφέρεια τῇ ΛΔ περιφερείᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΛΘ ἔσται ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΑΕΚΗΓΤ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΜΚΞΝ, ὁ ΜΚΞΝ ἄρα δίχα τεμεῖ τὰ

ἀπειλημμένα τμήματα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕΚ περιφέρεια τῇ ΚΗΓ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΑΝ τῇ ΝΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΒΛ τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΠ τῇ ΠΔ. ^[45]

2 13 (50)

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕΚ περιφέρεια τῇ ΛΘΔ περιφερείᾳ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΕΚ περιφερείας διπλῇ ἡ ΑΕΚΗΓ περιφέρεια, τῆς δὲ ΛΘΔ περιφερείας διπλῇ ἡ ΔΘΛΒ, καὶ ἡ ΑΕΚΗΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ΔΘΛΒ. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι· μέγιστοι γὰρ εἰσιν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΑΒΓ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΓΒ περιφερείᾳ. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒΓ περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΝ, τῆς δὲ ΒΠΔ ἡμίσεια ἡ ΒΠ· καὶ ἡ ΑΝ ἄρα τῇ ΒΠ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΝΒ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΝΒ ὅλη τῇ ΝΒΠ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝΒ περιφέρεια τῇ ΝΒΠ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΝΒΠ τῇ ΚΛ ἐστὶν ὁμοία· ἐὰν γὰρ ὥσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοίαι εἰσιν· καὶ εἰσιν αἱ ΚΛ, ΝΒΠ περιφέρειαι τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ οὗσαι τῶν μεγίστων τῶν ΜΝ, ΜΠ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν ὄντων· καὶ ἡ ΑΝΒ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ὁμοία. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΕΕΖ τῇ ΚΛ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΕΖ ὁμοία ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΠΔ τῇ ΗΟΘ ἐστὶν ὁμοία. αἱ ἄρα τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἡμικυκλίων τῶν μεγίστων κύκλων ὁμοίαι εἰσιν. λέγω δέ, ὅτι καὶ αἱ τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ τέσσαρες αἱ ΑΕΚ, ΚΗΓ, ΒΖΛ, ΛΘΔ περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὧν αἱ τέσσαρες αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ, ΛΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν [ὁμοίως γὰρ ὁ ΚΝ κύκλος μέγιστος ὧν δίχα τέμνει τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τὰ ΕΚΗ, ΕΞΗ καὶ τὰ ΖΛΘ ΖΟΘ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΗ. ἀλλ' ἡ ΕΚ τῇ ΛΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ ΛΘ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ΘΛ τῇ ΛΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΛΖ ἄρα τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΚ, ΚΗ, ΖΛ ΛΘ ἴσαι εἰσίν], λοιπαὶ ἄρα αἱ τέσσαρες αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΘΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ ἄρα τῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν παραλλήλων κύκλων ἴσαι εἰσίν. Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάττωτος τοῦ μεγίστου καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος. ^[80]

2 14

ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒ ἐλάσσων ὧν τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἔστω τὸ Β· δεῖ δὲ διὰ τοῦ Β σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ κύκλου. ἔστω γὰρ ὁ πόλος τοῦ ΑΒ κύκλου τὸ Γ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Γ, Β σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΒΔ, καὶ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΔΒ [οὐ γὰρ ἐγχωρεῖ τὴν ΒΓ εἶναι τεταρτημορίου· ἔσται γὰρ μέγιστος ὁ ΑΒ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΓΒ τεταρτημορίου], καὶ πόλῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΒΖ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΕΒΖ· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒ, ΕΒΖ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τοῦ ΓΒΔ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τὸ Β τέμνουσι τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάψονται ἀλλήλων οἱ κύκλοι· ἐφάψεται ἄρα ὁ ΑΒ κύκλος τοῦ ΕΒΖ κύκλου. διὰ ἄρα τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Β γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΕΒΖ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΒ κύκλου κατὰ τὸ Β σημεῖον. Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονος τοῦ μεγίστου καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὃ ἐστὶ μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος κύκλου. ^[20]

2 15

ἔστω ὁ δοθεὶς ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλάσσων τοῦ μεγίστου ὁ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὃ ἐστὶ μεταξὺ αὐτοῦ τε τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, ἔστω τὸ Γ· δεῖ δὲ διὰ τοῦ Γ σημείου γράψαι μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ ΑΒ κύκλου. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Δ σημεῖον, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΖΗ, καὶ διὰ τῶν Δ, Γ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΓΘ.

ἡ δὲ ΒΓ ἥτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἢ ἴση ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἐλάττων, καὶ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση περιφέρεια ἀπειλήφθω ἡ ΒΘ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Θ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΒΗ· μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΕΒΗ κύκλος· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ ἐφάπεται τοῦ ΑΒ· δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΕΒΗ, ΑΒ μεγίστου κύκλου περιφέρειαν τὴν ΔΒΓΘ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Β τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ. καὶ διὰ τοῦ Δ σημείου καὶ ἐκατέρου τῶν Ε, Η σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΔΜΕΚ, ΔΝΗΛ, καὶ τῇ ΓΘ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἐκατέρα τῶν ΕΚ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΕΒΗ, ΖΕΓΗ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΔΒΓΘ, δίχα ἄρα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ περιφέρεια τῇ ΓΗ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΒΗ περιφερείᾳ. καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΔΜΕ, ΔΒΓ, ΔΝΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ἐκ γὰρ τοῦ πόλου εἰς τοῦ ΖΕΗ κύκλου· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ΔΜ, ΔΒ, ΔΝ ἴσαι ἀλλήλαις, λοιπαὶ ἄρα αἱ ΜΕ, ΒΓ, ΝΗ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ αἱ ΕΚ, ΓΘ, ΗΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὅλαι ἄρα αἱ ΜΚ, ΒΘ, ΝΛ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ ἐστὶν ἡ ΒΘ ἴση τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ αἱ ΜΚ, ΝΛ ἄρα ἴσαι εἰσὶ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΔΒΓΘ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΕΓΗ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΔΒΓΘ ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ κύκλον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΔΝΗΛ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ, καὶ ἔτι ὁ ΔΜΕΚ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΝ, ΛΓ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΖΕΓΗ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ τῶν Γ, Η σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται τὰ ΓΘ, ΗΛ καὶ τὰ τούτοις συνεχῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΓΘ, ΗΛ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΕΓ περιφέρεια τῇ ΓΗ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ τῇ ΛΓ. τετραγώνου δὲ ἡ ΘΕ· καὶ ἡ ΛΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΝ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΝ· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ν σημείου. ^[45]

2 15 (50) ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΓΝΞ. μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΝΞ· ἡ γὰρ ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου περιφέρειαν τὴν ΔΝΗΛ κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον τέμνουσι τὸ Ν τοὺς πόλους ἔχοντες ἐπ' αὐτοῦ, ἐφάπνυνται ἄρα ἀλλήλων· ὁ ΓΝΞ ἄρα τοῦ ΑΒ κύκλου ἐφάπεται. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ πόλῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Μ σημείου. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΓΚ, ΘΗ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται [ὁμοίως γὰρ ἐπὶ τοῦ ΖΕΓΗ κύκλου ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ τῶν Θ, Γ σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται τὰ ΕΚ, ΓΘ καὶ τὰ συνεχῇ αὐτοῖς, καὶ τῶν μὲν ἐφεστηκότων τμημάτων ἴσαι περιφέρειαι ἀφηρημέναι εἰσὶν αἱ ΕΚ, ΓΘ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων, τοῦ δὲ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι αἱ ΕΓ, ΓΗ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΚ εὐθείᾳ τῇ ΘΗ εὐθείᾳ]. καὶ ἐστὶν ἡ ΘΗ τετραγώνου πλευρά· ἐκ γὰρ τοῦ πόλου ἐστὶ μεγίστου κύκλου τοῦ ΕΒΗ· καὶ ἡ ΓΚ ἄρα τετραγώνου ἔσται πλευρά. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΚΓ· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Μ σημείου καὶ ἔσται ὡς ὁ ΓΜΟ καὶ ἐφάπεται τοῦ ΑΒ κύκλου· καὶ γίγνεται διχῶς τὸ πρόβλημα. διὰ ἄρα τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ ἐστὶ μεταξὺ τοῦ ΑΒ καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΓΝΞ καὶ ὁ ΓΜΟ. ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ ἴση ἢ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσαντες ἀποδείξομεν οὕτως· ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ ἐκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΔΗ, ὧν ἡ ΔΒ ἴση ἐστὶν ἐκατέρᾳ τῶν ΔΜ, ΔΝ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ ἴση ἐστὶν

ἐκατέρᾳ τῶν ΝΗ, ΕΜ. τετραγώνου δὲ ἡ ΒΓ· τετραγώνου ἄρα ἐστὶ καὶ ἐκατέρᾳ τῶν ΝΗ, ΕΜ. ἐπεὶ οὖν τετραγώνου ἐστὶν ἡ ΝΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΓ· ἐκ τοῦ πόλου γὰρ τοῦ ΕΒΗ κύκλου ἐστὶν ἡ ΗΓ· ἴση ἐστὶν ἡ ΝΗ τῇ ΓΗ· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΓΗ, γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ν σημείου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὁ πόλῳ τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Μ σημείου· καὶ ἔσται διχῶς τὸ πρόβλημα. ἐὰν δὲ μείζων ᾦ τεταρτημορίου ἡ ΒΓ, ἀναπληρώσομεν τὸν ΔΒΓΘ κύκλον ἕως τοῦ ἐτέρου πόλου, καὶ ἐλάττονος γινομένης τεταρτημορίου τῆς ἀπὸ τοῦ Γ ἕως τοῦ πόλου τοῦ παραλλήλου τῷ ΑΒ κύκλου τοῦ Φ· ἡμικυκλίου γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ τοῦ ΑΒ κύκλου πόλου τοῦ Δ ἕως τοῦ ἐτέρου πόλου τοῦ Φ, μείζων δὲ τεταρτημορίου ἡ ΒΓ· ἀφαιρήσομεν ἴσην τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρά, καὶ ἐπιζεύξαντες καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσαντες δείξομεν τὸν διὰ τοῦ Γ σημείου γραφόμενον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος κύκλου [τοῦ ΑΒ δηλαδή]. Οἱ ὁμοίαις ἀφαιροῦντες περιφερείας ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι παραλλήλων τινῶν κύκλων ἦτοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται. ^[90]

2 16 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ παραλλήλων τινῶν κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ὁμοίαις ἀφαιρείτῳσαν περιφερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν, τουτέστι τὴν ΑΒ τῇ ΕΖ ὁμοίαν. λέγω, ὅτι οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ ἦτοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων ἢ τοῦ αὐτοῦ ἐφάπτονται τῶν παραλλήλων. ἦτοι γὰρ ὁ ΑΗΓ κύκλος διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τῶν παραλλήλων ἢ οὐ. ἔστω πρότερον διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΒΘΔ κύκλος διὰ τῶν πόλων ἐστὶ τῶν παραλλήλων, τουτέστιν ὅτι τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Λ σημεῖον πόλος τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν Λ, Ζ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΖΜ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΜ περιφέρεια τῇ ΕΖ. ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΜΑ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστὶν ὁμοία. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΑ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Λ σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο πλὴν τοῦ Κ σημεῖον· τὸ Κ ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων. οἱ ἄρα ΑΗΓ, ΒΘΔ κύκλοι διὰ τῶν πόλων εἰσὶ τῶν παραλλήλων. ἀλλὰ δὲ πάλιν μὴ ἔστω ὁ ΑΗΓ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων· ἦτοι δὲ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἢ λοξὸς ἔσται πρὸς αὐτόν. ἐφαπτέσθω πρότερον κατὰ τὸ Ε, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΒ ἐφάπτεται. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἐφαπτέσθω, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου τοῦ ΕΖΘ ἐφαπτόμενος μέγιστος κύκλος ὁ ΖΓ ἀσύμπτωτον ποιῶν τὸ ἀπὸ τοῦ ΖΓ ἡμικύκλιον τῷ ἀπὸ τοῦ ΕΑ ἡμικυκλίῳ· ὁμοία ἄρα ἔσται ἡ ΓΑ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΑΒ ἐστὶν ὁμοία. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καὶ ὁ ΒΖΔ κύκλος τοῦ ΕΖΘ κύκλου οὐκ ἐφάπτεται· ἐφάπτεται ἄρα. ἀλλὰ δὲ ὁ ΑΗΓ λοξὸς ἔστω πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς· ἐφάπτεται ἄρα δύο κύκλων ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τοῖς ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΒΖΘ λοξός ἐστι πρὸς τοὺς παραλλήλους καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐφάπτεται. εἰ γὰρ δυνατόν, ὁ μὲν ΑΕΗΓ κύκλος ἐφαπτέσθω ἐνὸς τῶν παραλλήλων τοῦ ΜΞ κατὰ τὸ Λ σημεῖον, ὁ δὲ ΒΖΘΔ μὴ ἐφαπτέσθω, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου ὄντος μεταξὺ τοῦ τε ΑΜ κύκλου καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ μέγιστος κύκλος γεγράφθω ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΜ κατὰ τὸ Μ σημεῖον ὁ ΝΖΜ ἀσύμπτωτον ποιῶν τὸ ἀπὸ τοῦ ΛΑ ἡμικύκλιον τῷ ἀπὸ τοῦ ΜΝ ἡμικυκλίῳ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΝ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΖ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ ὁμοία· καὶ ἡ ΝΑ ἄρα τῇ ΑΒ ἔσται ὁμοία. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ ΝΑ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ ΔΘΒ κύκλος οὐκ ἐφάπτεται [καὶ ὁ ΒΖΘΔ]· ἐφάπτεται ἄρα. οἱ ΑΕΗΓ, ΒΖΘΔ ἄρα κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται. Οἱ ἴσας ἀφαιροῦντες ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων ἴσοι εἰσίν, οἱ δὲ μείζονας ἐλάττονας. ^[45]

ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ AB, ΓΔ μεγίστου τινὸς τοῦ ΒΑΓΔ περιφερείας τὰς ΔΖ, ΖΒ πρότερον ἴσας ἀφαιρείτωσαν πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων κύκλον τὸν ΕΖ. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ AB κύκλος τῷ ΓΔ. ἔστω γὰρ τοῦ μὲν AB κύκλου καὶ τοῦ ΑΓΔ κοινὴ τομὴ ἡ AB, τοῦ δὲ ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ Α[Β]ΓΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΖ, τοῦ δὲ ΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΒΑΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΕΘΖ, ΓΚΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ Α[Β]ΓΔ κύκλου, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ AB τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ Α[Β]ΓΔ δύο παράλληλοι ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΖ, ΓΔ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ περιφέρεια τῇ ΕΓ περιφερείᾳ· ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΔ, ἔσσονται αἱ ἐναλλάξ γωνίαι ἴσαι, ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν· ἴση ἄρα ἔσται ἡ ΕΓ περιφέρεια τῇ ΖΔ περιφερείᾳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΑΕ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΕΓ ἐστὶν ἴση· καὶ συναμφοτέροι ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΓ, ΖΔ ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΕΑΒΖ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΓΜΔΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση· μέγιστοι γὰρ εἰσιν οἱ ΕΘΖ, Α[Β]ΓΔ· ὣν συναμφοτέρος ἡ ΑΕ, ΒΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛΒ λοιπῇ τῇ ΓΜΔ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AB εὐθεΐα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ. ἤτοι δὴ ὁ Α[Β]ΓΔ κύκλος τοὺς ΑΗΒ, ΓΚΔ κύκλους διὰ τῶν πόλων τέμνει ἢ οὐ. τεμνέτω πρότερον διὰ τῶν πόλων· καὶ δίχα ἄρα αὐτοὺς τεμεῖ· ἡ μὲν AB ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΗΒ κύκλου, ἡ δὲ ΓΔ τοῦ ΓΚΔ κύκλου. καὶ ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ ἴση· ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΑΗΒ κύκλος τῷ ΓΚΔ. ἀλλὰ δὴ πάλιν μὴ τεμνέτω ὁ ΒΑΓΔ κύκλος τοὺς ΑΗΒ, ΓΚΔ κύκλους διὰ τῶν πόλων, καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων καὶ ἔστω τὸ Ν σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Ν σημείου καὶ ἐνὸς τῶν τοῦ Α[Β]ΓΔ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΛΘΚΜΞ, καὶ τῇ ΛΝ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΜΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΛΝ περιφέρεια τῇ ΜΞ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΝΚΜ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΛΚΜ περιφέρεια ὅλη τῇ ΝΚΜΞ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. ἡμικυκλίου δὲ ἡ ΛΚΜ· ἡμικυκλίου ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΚΜΞ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ν σημεῖον τῷ Ξ σημείῳ. καὶ ἐστὶ τὸ Ν ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων· καὶ τὸ Ξ ἄρα σημεῖον ὁ ἕτερος πόλος ἐστὶ τῶν παραλλήλων κύκλων. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ Α[Β]ΓΔ, ΓΚΔ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΘΚΞ, ὁ ἄρα ΛΘΚΞ δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ περιφέρεια τῇ ΜΔ περιφερείᾳ· διπλὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜΔ περιφέρεια τῆς ΔΜ περιφερείας. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΒΛΑ περιφέρεια τῆς ΑΛ περιφερείας διπλὴ ἐστὶν. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΓΜΔ τῇ ΑΛΒ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΔ περιφέρεια τῇ ΑΛ περιφερείᾳ. κύκλου δὲ τινος τοῦ Α[Β]ΓΔ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Μ τμήματα κύκλου ὀρθὰ ἐφέσταται τὸ ΛΘΜ καὶ τὸ ΜΞ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ ἀπὸ τούτων ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΛΝ, ΜΞ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὔσαι τῶν ὅλων, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΑΛ, ΔΜ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ. ^[55]

καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΑΗΒ κύκλου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΓΚΔ κύκλου· ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΑΗΒ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ ΓΚΔ κύκλου. ὣν δὲ κύκλων αἱ ἐκ τῶν πόλων ἴσαι εἰσίν, ἴσοι ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΗΒ κύκλος τῷ ΓΚΔ κύκλῳ. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω μείζων ἡ ΔΖ περιφέρεια τῆς ΖΒ περιφερείας. λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΓΚΔ κύκλος τοῦ ΑΗΒ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ περιφέρεια τῆς ΖΒ περιφερείας, ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΔΖ τῇ ΖΒ ἴση ἡ ΖΟ, καὶ διὰ τοῦ Ο τῷ ΕΘΖ κύκλῳ παράλληλος γεγράφθω ὁ ΟΡΠ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΡΟ κύκλος τῷ ΑΗΒ κύκλῳ· ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΟΖ περιφέρεια τῇ ΖΒ περιφερείᾳ. ὁ δὲ ΠΡΟ κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ ΓΚΔ κύκλου· ἔγγιον γὰρ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ὁ ΠΡΟ κύκλος ἢ περὶ ὁ ΓΚΔ κύκλος· καὶ ὁ ΑΗΒ ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ ΓΚΔ κύκλου· ὥστε ὁ ΓΚΔ κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ΑΗΒ

κύκλου. Ἐν σφαίρᾳ οἱ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, οἱ δὲ μείζονες ἐλάττονας. ^[70]

2 18 Ἐν γὰρ σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ AB, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΓΔ περιφερείας τὰς ΒΖ, ΖΔ ἀφαιρείτωσαν πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΖΔ περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια ἴση τῇ ΖΔ, οὐδ' ἄρα ὁ AB κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ ἴσος ἐστίν. ἔστι δέ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ. ἀλλὰ πάλιν ἔστω ὁ AB κύκλος μείζων τοῦ ΓΔ κύκλου. λέγω, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΔ περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἐλάσσων ἡ ΒΖ περιφέρεια τῆς ΖΔ περιφερείας, οὐδ' ἄρα ὁ AB κύκλος τοῦ ΓΔ κύκλου μείζων ἐστίν. ἔστι δέ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῆς ΖΔ περιφερείας. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμεῖ χωρὶς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τῶν δὲ ἀπολαμβανομένων τμημάτων ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων ἡμικυκλίων μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ τε μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου, τὰ δὲ λοιπὰ ἐλάττονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ τε μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ ἀφανοῦς πόλου, τῶν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλάξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ^[5]

2 19 Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ παραλλήλους τοὺς ΑΔ, ΕΖ, ΒΓ μὴ διὰ τῶν πόλων τεμνέτω, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΕΖ. λέγω, ὅτι εἰς ἄνισα αὐτοὺς τεμεῖ χωρὶς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΕΖ, τῶν δὲ ἀπολαμβανομένων τμημάτων ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων ἡμικυκλίων μὲν ἔσται μείζονα, ὅσα ἐστὶ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ καὶ τοῦ φανεροῦ πόλου, τὰ δὲ λοιπὰ ἐλάσσονα, τῶν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλάξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἔστω γὰρ ὁ φανερὸς πόλος τῶν παραλλήλων τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Ε, Η μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΕΘ· ὁ ΗΕΘ ἄρα προσαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου· κατὰ διάμετρον γὰρ τὸ Ε τῷ Ζ διὰ τὸ μέγιστον εἶναι ἐκάτερον τῶν ΕΖ, ΑΒΓΔ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΗΝΖΚ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΒΓ κύκλος ἕως τῶν Θ, Κ σημείων. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΘΕΜΗΝΖΚ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΜΝΔ, ΕΖ, ΘΒΓΚ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΜΝ, ΕΖ, ΘΒΓΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΝ ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ ΑΜΝΔ ἄρα μείζον ἐστὶν ἡμικυκλίου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ Η πόλου μείζονα ἐστὶν ἡμικυκλίων. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΘΒΓΚ ἡμικύκλιόν ἐστι, τὸ ΒΓ ἄρα ἔλασσόν ἐστιν ἡμικυκλίου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πάντα τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τοῦ τε ΕΖ κύκλου καὶ τοῦ ἀφανοῦς πόλου καὶ ὄντα ἐν τῷ αὐτῷ ἡμισφαιρίῳ ἐλάττονα ἐστὶν ἡμικυκλίων. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω ὁ ΑΔ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ ἴσος τε καὶ παράλληλος. λέγω, ὅτι τῶν ΑΔ, ΒΓ κύκλων τὰ ἐναλλάξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΔ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ ἴσος τέ ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ περιφέρεια τῇ ΕΒ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΔΖ περιφέρεια τῇ ΖΓ περιφερείᾳ [ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΓ]· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΑΕ, ΔΖ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΒ, ΖΓ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΕΑΔΖ ὅλη τῇ ΕΒΓΖ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπὴ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση [διὰ τὸ ἡμικυκλίου εἶναι ἐκατέραν τῶν ΕΑΔΖ, ΕΒΓΖ· μέγιστοι γὰρ εἰσιν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ]. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου αἱ ΑΔ, ΒΓ περιφέρειαι· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἡ ὑπὸ τὴν ΑΔ περιφέρειαν ὑποτείνουσα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ ἡ ὑπὸ τὴν ΒΓ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα]· ἐν δὲ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· ἡ μὲν ἄρα τοῦ ΑΔ κύκλου μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ΒΓ κύκλου περιφερείᾳ τῇ μείζονι, ἡ δὲ τοῦ ΑΔ κύκλου ἐλάσσων περιφέρεια [ἴση ἐστὶ] τῇ τοῦ ΒΓ κύκλου ἐλάσσονι περιφερείᾳ. ^[45]

καί ἐστι τὸ μὲν ΑΔ μείζων ἡμικυκλίου, τὸ δὲ ΒΓ ἔλαττον· τῶν ἄρα ΑΔ, ΒΓ κύκλων τὰ ἐναλλάξ τμήματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ μὴ διὰ τῶν πόλων τέμνῃ, τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσσονται αἰεὶ αἱ ἑγγιον τοῦ φανεροῦ πόλου τῶν ἀπώτερον.

2 20 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΓΔΒ παραλλήλους τινὰς κύκλους τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τῶν πόλων τεμνέτω, καὶ ἔστω ὁ φανερός πόλος τῶν παραλλήλων τὸ Η σημεῖον. λέγω, ὅτι τῶν ἀπολαμβανομένων περιφερειῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἡμισφαιρίων μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσσονται αἰεὶ αἱ ἑγγιον τοῦ φανεροῦ πόλου τῶν ἀπώτερον, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΖ. διὰ γὰρ τοῦ Η καὶ ἐκατέρου τῶν Γ, Δ μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΗΘΓ, ΗΚΔ. οἱ ἄρα ΗΘΓ, ΗΚΔ ὁμοίας ἀφαιροῦσι περιφερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν· ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ὁμοία· ἡ ΑΘΚΒ ἄρα τῆς ΓΔ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΕΖ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, γραφόντων ἡμῶν διὰ τοῦ Η καὶ ἐκατέρου τῶν Ε, Ζ μεγίστους κύκλους. δύναται δὲ δειχθῆναι καὶ μὴ γραφόντων ἡμῶν, μόνον δὲ προσαναπληρούντων τὸν ΕΖ, ὡς ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ. Ἐὰν ἐν ἴσαις σφαίραις ἐπὶ μεγίστων κύκλων μέγιστοι κύκλοι κεκλιμένοι ὦσιν, ὁποτέρου αὐτῶν ἂν ὁ πόλος μετεωρότερος ᾖ, μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος· ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι.

[15]

2 21 ἐν γὰρ ἴσαις σφαίραις ἐπὶ μεγίστων κύκλων τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΒΚΔ, ΖΛΘ κεκλιμένοι ἔστωσαν, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΒΚΔ κύκλου πόλος τὸ Μ σημεῖον, τοῦ δὲ ΖΛΘ κύκλου πόλος τὸ Ν σημεῖον, μετεωρότερον δὲ ἔστω τὸ Μ τοῦ Ν. λέγω, ὅτι ὁ ΒΚΔ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον μᾶλλον κέκλιται ἢ πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Μ καὶ ἐνὸς τῶν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΑΚΜΓ, διὰ δὲ τοῦ Ν καὶ ἐνὸς τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου πόλων μέγιστος κύκλος ὁ ΕΛΝΗ, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΒΚΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τοῦ ΑΚΜΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΓ, τοῦ δὲ ΒΚΔ καὶ τοῦ ΑΚΜΓ κοινὴ τομὴ ἡ ΚΞ, καὶ ἔτι τοῦ μὲν ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΖΛΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΖΘ, τοῦ δὲ ΕΖΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ΕΛΝΗ κοινὴ τομὴ ἡ ΕΗ, τοῦ δὲ ΖΛΘ καὶ τοῦ ΕΛΝΗ κοινὴ τομὴ ἡ ΛΟ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΚΓΜ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΑΒΓΔ, ΒΚΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθὰς· ὁ ΑΚΜΓ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἐκάτερον τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ κύκλων· ὥστε καὶ ἐκάτερος τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΚΜΓ κύκλον. ἐὰν δὲ δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα τομὴ τῶν ΑΒΓΔ, ΒΚΔ ἢ ΒΞΔ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΚΜΓ κύκλον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΚΜΓ κύκλου ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς ΒΞΔ ἐκατέρα τῶν ΚΞ, ΞΑ οὐσα ἐν τῷ τοῦ ΑΚΜΓ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΒΞ ἄρα πρὸς ἐκατέραν τῶν ΚΞ, ΞΑ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα τέμνει ἄλληλα τὰ ΑΒΓΔ, ΒΚΔ, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΞ, ΞΑ, ἡ μὲν ΚΞ ἐν τῷ τοῦ ΒΚΔ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΞΑ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις ἐστίν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ ΒΚΔ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ ἐπίπεδον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστίν, ἐν ᾗ κέκλιται τὸ ΖΛΘ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον. λέγω δὴ, ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΟΕ γωνίας, ἐπεὶ γὰρ μετεωρότερόν ἐστι τὸ Μ τοῦ Ν, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Ν καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐπίπεδον. ἀλλ' ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πίπτει τοῦ τε ΑΚΜΓ κύκλου καὶ τοῦ ΑΒΓΔ, τουτέστι τὴν ΑΓ, διὰ τὸ ὀρθὰ εἶναι πρὸς ἄλληλα τὰ ΑΚΜΓ, ΑΒΓΔ ἐπίπεδα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ν κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΕΗ πίπτει· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΑΓ μείζων ἐστὶ

τῆς ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΕΗ καθέτου ἀγομένης. ἐπεὶ οὖν δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΚΜΓ, ΕΛΝΗ, καὶ τυχόντα σημεῖα τὰ Μ, Ν, καὶ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΑΓ μείζων τῆς ἀπὸ τοῦ Ν καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΕΗ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΓ περιφέρεια τῆς ΝΗ περιφερείας. ^[45]

2 21 (50) ἴση δὲ ἡ ΜΚ περιφέρεια τῇ ΝΛ περιφερείᾳ· ἐκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ὅλη ἄρα ἡ ΚΜΓ περιφέρεια ὅλης τῆς ΛΝΗ περιφερείας μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΑΚΜΓ ὅλη τῇ ΕΛΝΗ ἴση ἐστίν, ὥν ἡ ΚΜΓ τῆς ΛΝΗ μείζων ἐστίν, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚ περιφέρεια λοιπῆς τῆς ΕΛ περιφερείας ἐλάσσων ἐστὶ. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΚ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΞΑ, ἐπὶ δὲ τῆς ΛΕ γωνία ἡ ὑπὸ ΛΟΕ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΟΕ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ ΒΚΔ ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ ΖΛΘ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΕΖΗΘ ἐπίπεδον· ἡ ἄρα τοῦ ΒΚΔ κύκλου πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον κλίσις ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ΖΛΘ κύκλου πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον κλίσεως. ὁ ΒΚΔ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον μᾶλλον κέκλινται ἢ ἢ ὁ ΖΛΘ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. ἀλλὰ δὴ πάλιν τῶν ΒΚΔ, ΖΛΘ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπεχέτωσαν τῶν ἐπιπέδων, τουτέστιν ἔστω ἡ ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ Ν καθέτῳ ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐπίπεδον. λέγω, ὅτι οἱ ΒΚΔ, ΖΛΘ κύκλοι πρὸς τοὺς ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, τουτέστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΟΕ γωνίᾳ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις ἐστίν, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ τοῦ ΒΚΔ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστίν, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ τοῦ ΖΛΘ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΕΗΘ κύκλου ἐπίπεδον. λέγω οὖν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΟΕ γωνίᾳ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τῶν Μ, Ν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλων ἐπίπεδα ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ἀπὸ τῶν Μ, Ν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ τῶν ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλων ἐπίπεδα ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΕΗ πίπτουσιν, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Μ, Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΕΗ εὐθείας κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο τμήματα κύκλων ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΚΜΓ, ΕΛΝΗ, καὶ τυχόντα σημεῖα τὰ Μ, Ν, καὶ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἀγομένη ἴση τῇ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΕΗ καθέτῳ ἀγομένη, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΓ περιφέρεια τῇ ΝΗ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΚ τῇ ΛΝ ἴση· ἐκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ, ὅφ' ἦν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΜΓ ὅλη τῇ ΛΝΗ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΚΜΓ ὅλη τῇ ΕΛΝΗ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΚ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΕΛ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΚ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΚΞΑ, ἐπὶ δὲ τῆς ΛΕ γωνία ἡ ὑπὸ ΛΟΕ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΟΕ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΚΞΑ γωνία ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ τοῦ ΒΚΔ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΟΕ γωνία ἡ κλίσις ἐστίν, ἐν ᾗ κέκλινται τὸ τοῦ ΖΛΘ κύκλου ἐπίπεδον πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἡ ἄρα κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται ὁ ΒΚΔ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἴση ἐστὶ τῇ κλίσει τοῦ ΖΛΘ κύκλου πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. οἱ ΒΚΔ, ΖΛΘ ἄρα κύκλοι πρὸς τοὺς ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλους ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι· ἐμάθομεν γάρ, ὅτι ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἴσας γωνίας περιέχωσιν. ^[95]

2 22 Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνη μεταξὺ ὄντα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ μέγιστος κύκλος, ἔτι τε ὁ πόλος τοῦ μεγίστου μεταξὺ ἢ τῶν παραλλήλων, καὶ γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων, κεκλιμένοι ἔσσονται πρὸς τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὀρθότατος μὲν ἔσται ὁ τὴν συναφὴν ἔχων κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ μείζονος τμήματος,

ταπεινότατος δὲ ὁ τὴν συναφὴν ἔχων κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τῶν δὲ ἄλλων οἱ μὲν ἴσον ἀπέχοντες ὅποτερασθαι τῶν διχοτομιῶν ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, αἰεὶ δὲ ὁ πορρώτερον τὴν συναφὴν ἔχων τῆς διχοτομίας τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ ἕγγιον μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος, ἔτι τε οἱ πόλοι τῶν μεγίστων ἐπὶ ἐνὸς ἔσσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος, οὗ ἐφάπτεται ὁ ἐξ ἀρχῆς μέγιστος κύκλος. ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἕτερον δὲ τοῦτω παράλληλον τὸν ΕΖΗΘ τεμνέτω μεταξὺ ὄντα τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ΑΔ κύκλου, ἔτι δὲ ὁ πόλος τοῦ ΑΒΓ κύκλου μεταξὺ ἔστω τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ καὶ ἔστω τὸ Κ σημεῖον, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ ἐφαπτόμενοι τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τοῦ ΕΖΗΘ, ὁ μὲν ΒΖΓ κύκλος κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ μείζονος τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, ὁ δὲ ΥΘ κατὰ τὴν διχοτομίαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κατὰ τὸ Θ σημεῖον, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ἴσον ἀπεχέτωσαν ὅποτερασθαι τῶν διχοτομιῶν, ὁ δὲ ΤΣ πορρώτερον ἔχέτω τὴν κατὰ τὸ Τ συναφὴν τῆς διχοτομίας τοῦ μείζονος τμήματος ἢ περὶ ὁ ΟΠΡ. λέγω, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι κεκλιμένοι ἔσσονται πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ ὀρθότατος μὲν αὐτῶν ἔσται ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ πρὸς τὸν ΑΒΓ μᾶλλον κέκλιται ἢ περὶ ὁ ΟΠΡ, ἔτι δὲ οἱ πόλοι τῶν ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ ἐπὶ ἐνὸς ἔσσονται κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ κύκλου. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ καὶ ἔστω τὸ Λ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Α, Λ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΛ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἐνὸς πόλων καὶ τῆς ἀφ᾽ ἑκαστοῦ μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΛ, ὁ ἄρα ΑΛ ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλων καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. καὶ ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος τὸ Κ σημεῖον· ὁ ΑΛ ἄρα προσαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Κ· ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΛΚ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΕΖΗΘ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΛΚ, ὁ ἄρα ΑΛΚ δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΕΖΗ τμήματος διχοτομία τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΕΘΗ διχοτομία τὸ Θ· ὁ ΑΛΚ ἄρα προσαναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Θ σημείων· ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΘΑΛΚΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐστὶν ὁ ΑΒΓ μέγιστος, ἡ ΑΚ ἄρα ἐστίν, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ ΑΚΖ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΖΗΘ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ μεγίστου καὶ ἐστὶ μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ΑΔ, καὶ ἐστὶν αὐτοῦ πόλος τὸ Λ σημεῖον, ἡ ΛΖ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ^[45]

2 22 (50) ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΚΖ μείζων ἐστὶ τῆς, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ ΛΖ ἐλάσσων, ἔαν ἄρα τῇ, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου, ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἴσην ἀπολάβωμεν περιφέρειαν, μεταξὺ τῶν Α, Λ σημείων πεσεῖται. ἀπειλήφθω αὐτῇ ἴση καὶ ἔστω ἡ ΖΦ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΦ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΦΧΨΩ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τοῖς ΑΔ, ΕΖΗΘ· καὶ διὰ τοῦ Λ σημείου καὶ ἐκάστου τῶν Π, Ν, Τ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΝΛΩ, ΠΛΧ, ΤΛΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΝΛ τῇ ΛΖ· ἐκ πόλου γὰρ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἡ δὲ ΛΩ τῇ ΛΦ· ἐκ πόλου γὰρ τοῦ ΨΩΧ· ὅλη ἄρα ἡ ΝΛΩ ὅλη τῇ ΖΛΦ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐστὶν ἡ ΖΛΦ ἴση τῇ, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· καὶ ἡ ΝΛΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ΧΛΠ, ΨΛΤ, ῥΛΘ ἴση ἐστὶ τῇ, ὅφ' ἢν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν

τοῦ ἐνὸς πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΝΛΩ, ὁ ἄρα ΝΛΩ ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΜΝΞ πόλων καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. καὶ ἐπεὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος μέγιστός ἐστιν, ἡ ἄρα ἐκ τοῦ πόλου αὐτοῦ ἴση ἐστὶ τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου. καὶ ἐστὶν ἡ ΝΛΩ ἴση τῇ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ τοῦ τετραγώνου πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Ω ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶ τοῦ ΜΝΞ κύκλου· τὸ Ω ἄρα σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΜΝΞ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν Φ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΒΖΓ κύκλου, τὸ δὲ Χ τοῦ ΟΠΡ, τὸ δὲ Ψ τοῦ ΣΤ καὶ ἔτι τὸ Ζ τοῦ ΥΘ· οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ ἄρα κύκλοι τοὺς πόλους ἔχουσιν ἐπὶ ἐνὸς κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ. λέγω δὴ, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον κεκλιμένοι εἰσίν, καὶ ὅτι ὀρθότατος μὲν αὐτῶν ἐστὶν ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλινται ἢ περ ὁ ΟΠΡ πρὸς τὸν ΑΒΓ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ, καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν ΝΖ τῇ ζζ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΖΠ περιφέρεια τῇ ρζ περιφερεία ἐστὶν ὁμοία· καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ζζ περιφέρεια τῇ ρζ περιφερεία. ἀλλ' ἡ μὲν ζζ περιφέρεια τῇ ΦΩ περιφερεία ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· ἡ δὲ ρζ τῇ ΧΦ· καὶ ἡ ΦΩ ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΧΦ. κύκλου δὲ τινος τοῦ ΦΧΨΩ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ζ κύκλου τμῆμα ὀρθὸν ἐφέσταται τὸ ΖΚΖ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ ἀπειλημμένη ἐστὶν ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια οὔσα τοῦ ὅλου τμήματος περιφέρεια ἡ ΖΚ, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσίν αἱ ΧΦ, ΦΩ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὸ Χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Ω ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Κ σημείῳ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΧ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ω. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΧΩ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΩ τῷ ΑΒΓ· περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐστὶν αὐτῶ· τὸ γὰρ Κ σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ^[95]

2 22 (100) καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ΧΩ κύκλος τῷ ΑΒΓ κύκλῳ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ω καθέτῳ ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον [ὁμοίως δὲ καὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ι καθέτῳ ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον]. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Χ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ω ἄρα κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον [ἐκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Ι ἀγομένη]· μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τὸ Ω τοῦ Φ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ω πόλος τοῦ ΜΝΞ κύκλου, τὸ δὲ Φ τοῦ ΒΖΓ· ὁ ἄρα τοῦ ΜΝΞ κύκλου πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ τοῦ ΒΖΓ κύκλου πόλου. ὦν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσι, μᾶλλον εἰσι κεκλιμένοι· ὁ ΜΝΞ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλινται ἢ περ ὁ ΒΖΓ κύκλος· ὁ ἄρα ΒΖΓ κύκλος ὀρθότερός ἐστι τοῦ ΜΝΞ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλων ἐφαπτομένων ὁ ΒΖΓ ὀρθότερός ἐστιν· ὀρθότατος ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΖΓ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ ΥΘ κύκλος ταπεινότατός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Ψ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Ψ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ζ πόλος τοῦ ΥΘ κύκλου, τὸ δὲ Ψ πόλος τοῦ ΣΤ κύκλου· ὁ ἄρα τοῦ ΥΘ πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ τοῦ ΣΤ πόλου. ὦν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσιν, μᾶλλον εἰσι κεκλιμένοι· ὁ ΥΘ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλινται ἢ περ ὁ ΣΤ· ταπεινότερος ἄρα ἐστὶν ὁ ΥΘ τοῦ ΣΤ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ πάντων τῶν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐφαπτομένων ταπεινότερός ἐστιν ὁ ΥΘ· ὁ ΥΘ ἄρα ταπεινότατός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ω κάθετος ἀγομένη ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Χ καθέτῳ ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, τὰ Ω, Χ ἄρα σημεία ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ω σημεῖον πόλος τοῦ ΜΝΞ κύκλου, τὸ δὲ Χ σημεῖον πόλος τοῦ ΟΠΡ κύκλου· τῶν

ΜΝΞ, ΟΠΡ ἄρα κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων, ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι· οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ψ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ καθέτου ἀγομένης ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον, μετεωρότερον ἄρα ἐστὶ τὸ Ψ τοῦ Χ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ψ πόλος τοῦ ΣΤ, τὸ δὲ Χ πόλος τοῦ ΟΠΡ· ὁ ἄρα τοῦ ΣΤ κύκλου πόλος μετεωρότερός ἐστι τοῦ τοῦ ΟΠΡ κύκλου πόλου. ὧν δὲ κύκλων οἱ πόλοι μετεωρότεροί εἰσιν, μᾶλλον εἰσὶ κεκλιμένοι· ὁ ΣΤ ἄρα κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται ἢ περὶ ὁ ΟΠΡ. οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΒΖΓ, ΟΠΡ, ΣΤ, ΥΘ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον κεκλιμένοι εἰσὶ, καὶ ὀρθότατος μὲν ἐστὶν αὐτῶν ὁ ΒΖΓ, ταπεινότατος δὲ ὁ ΥΘ, οἱ δὲ ΜΝΞ, ΟΠΡ ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι, ὁ δὲ ΣΤ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον μᾶλλον κέκλιται ἢ περὶ ὁ ΟΠΡ, ἔτι δὲ οἱ πόλοι αὐτῶν ἐπὶ ἐνός εἰσι κύκλου παραλλήλου τε καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΔ κύκλου. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν αἱ ἀπὸ τῶν συνδέσμων καθήκουσαι περιφέρειαι ἴσαι ᾖσιν, ὁμοίως ἔσσονται κεκλιμένοι οἱ προειρημένοι μέγιστοι κύκλοι. ^[145]

2 23 ἔστωσαν γὰρ αἱ ἀπὸ τῶν συνδέσμων τῶν Ν, Π καθήκουσαι περιφέρειαι αἱ ΝΜ, ΠΡ ἴσαι. λέγω, ὅτι οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. εἰλήφθω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τῶν ΑΔ, ΕΖΗΘ τὸ Λ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Α, Λ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΑΛΚΖΥ· φανερόν δὴ, ὅτι καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου πόλου ὄντος τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐλεύσεται· καὶ διὰ τοῦ Λ καὶ ἐκατέρου τῶν Ν, Π μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΝΒ, ΛΠΓ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων οἱ ΕΖΗΘ, ΜΝΞ, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἐνός πόλων καὶ τῆς ἀφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΝΒ, ὁ ἄρα ΛΝΒ ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΜΝΞ πόλων καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ὁ ΛΠΓ διὰ τῶν τοῦ ΟΠΡ πόλων ἐστὶ καὶ ὀρθὸς πρὸς αὐτόν. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις κύκλοις τοῖς ΜΝΞ, ΟΠΡ ἐπὶ διαμέτρων τῶν ἀπὸ τῶν Ν, Π σημείων ἴσα καὶ ὀρθὰ τμήματα κύκλων ἐφέσταται τὰ ΝΛ, ΠΛ καὶ τὰ τούτοις συνεχῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ ΝΛ, ΠΛ ἐλάττους ἢ ἡμίσειαι οὐσαι τῶν ὅλων, ἀπὸ δὲ τῶν ἐξ ἀρχῆς κύκλων ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ ΜΝ, ΠΡ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Μ σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Λ, διαστήματι δὲ τῷ ΛΜ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ρ· ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΜΞΟΡ. καὶ ἐστὶ τοῖς ΑΔ, ΕΖΗΘ κύκλος παράλληλος· περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐστὶν αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΜΞΟΡ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΘΑΛΚΖΥ, ὁ ἄρα ΘΑΛΚΖΥ δίχα τέμνει τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΥ περιφέρεια τῇ ΥΡ περιφερείᾳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΜΝΞ, ΜΞΥΡ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΝΒ, ὁ ἄρα ΛΝΒ δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα τμήματα τῶν κύκλων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΜΝ τῇ ΝΞ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΜΞ τῇ ΞΕ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΟΠ τῇ ΠΡ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΟΤ τῇ ΤΡ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΜΝ περιφέρεια τῇ ΠΡ περιφερείᾳ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΜΝ διπλῇ ἡ ΜΝΞ, τῆς δὲ ΠΡ διπλῇ ἡ ΟΠΡ, καὶ ἡ ΜΝΞ ἄρα τῇ ΟΠΡ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι· ἡ ἄρα τὴν ΜΝΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα. ἀλλ' ἡ μὲν τὴν ΜΝΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ὑποτείνει καὶ τὴν ΜΞΞ, ἡ δὲ τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ὑποτείνει καὶ τὴν ΟΤΡ· καὶ ἡ ἄρα τὴν ΜΞΞ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ τὴν ΟΤΡ περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΞΞ περιφέρεια τῇ ΟΤΡ περιφερείᾳ. καὶ ἐστὶ τῆς ΜΞΞ περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΜΞ, τῆς δὲ ΟΤΡ ἡμίσεια ἡ ΡΤ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΡΤ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΜΞΕΥ ὅλη τῇ ΥΟΤΡ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΕΥ λοιπὴ τῇ ΥΟΤ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΥΞΣ περιφέρεια τῇ ΥΟΤ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν ΞΕΥ περιφέρεια τῇ ΝΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΥΟΤ περιφέρεια τῇ ΠΖ περιφερείᾳ ἐστὶν

ὁμοία· καὶ ἡ ΝΖ ἄρα τῇ ΖΠ ἐστὶν ὁμοία. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΖ περιφέρεια τῇ ΖΠ περιφερείᾳ· οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ὁποτερασοῦν τῶν διχοτομιῶν. ^[45]

- 2 23 (50) οἱ δὲ ἴσον ἀπέχοντες ὁποτερασοῦν τῶν διχοτομιῶν ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι· οἱ ἄρα ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμένοι. Ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ὀρθὸν ἐπισταθῇ μὴ μείζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα, ἡ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν μείζονα περιφέρειαν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ^[5]
- 3 1 ἐὰν δὲ ἡ διαχθεῖσα διάμετρος ᾗ τοῦ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχη, ἐλάσσων μὲν ἔσται ἡ προειρημένη εὐθεῖα πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα. εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΒΔ εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἔστω δὲ μείζων ἡ ΒΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΑΔ περιφερείας, καὶ ἐπὶ τῆς ΒΔ ὀρθὸν τμήμα κύκλου ἐφεστάτω τὸ ΒΕΔ μὴ μείζον ἡμικυκλίου, καὶ διηρήσθω ἡ ΒΕΔ περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ ΒΕ περιφέρεια τῆς ΕΔ περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΕΖ· πεσεῖται δὲ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ΑΒΓΔ, ΒΕΔ ἐπιπέδων ἐπὶ τὴν ΒΔ εὐθεῖαν, ἐπειδὴ περ τὸ ΒΕΔ τμήμα ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ μέρη, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προσβεβλήσθω ἡ ΕΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀποτέμνας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς ΕΖ ἑκατέρα τῶν ΖΒ, ΖΛ οὐσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΖΕ, ΛΖΕ γωνιῶν ὀρθή ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΛ ἐλάσσων ἐστίν, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΒ ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΕ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἄρα ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΛΕ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΕ· ἡ ἄρα ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΒΓΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. λέγω δέ, ὅτι καὶ αἰὲ ἡ ἑγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Κ σημείων. διήχθω γὰρ τις καὶ ἐτέρα ἡ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΛΖ τῆς ΖΓ ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλαττον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΛ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΛ ἐλάσσονά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΓ. ἀλλὰ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΛΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΕ ἄρα ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΛΕ τῆς ΕΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἰὲ ἡ ἑγγιον τῆς ΕΒ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Β, Κ. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΕΚ, ΕΔ. ^[45]
- 3 1 (50) λέγω δὲ, ὅτι πάλιν ἡ μὲν ΕΚ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἡ δὲ ΕΔ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Δ, Κ σημείων. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΖ τῆς ΓΖ μείζων ἐστὶ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ, μείζονά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΓ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΚΕ τῆς ΕΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν

προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μείζων ἐστὶν ἡ ΕΚ· ἡ ἄρα ΕΚ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. λέγω δέ, ὅτι καὶ ἡ ΕΔ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων. διήχθω γὰρ καὶ ἑτέρα ἡ ΕΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΜ ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλαττον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΜ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΜ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΜ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΔ· ἡ ἄρα ΕΔ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου πρὸς τὴν ΚΔ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ τῶν μεταξὺ τῶν Κ, Δ σημείων διαγομένων εὐθειῶν. ἀλλὰ δὴ ἡ διαγομένη ἡ ΒΔ διάμετρος ἔστω τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑποκείσθω. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΕΒ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἡ δὲ ΕΔ μεγίστη. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΔΕ περιφέρεια τῆς ΕΒ περιφερείας, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΕΖ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ. καὶ ἐστὶν ἡ ΒΔ διάμετρος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΖΔ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΔΖ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΒ· ὥστε καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ μὲν ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· ἡ ΔΕ ἄρα τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΕΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΔΕ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ. μεγίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἡ δὲ ΕΒ ἐλάσσων. Ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα ἀπολαμβάνουσα τμήμα μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου, καὶ ἐπ’ αὐτῆς τμήμα κύκλου ἐπισταθῇ μὴ μείζον ἡμικυκλίου κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μείζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα, ἡ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

[5]

- 3 2 εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ ἀπολαμβάνουσα τμήμα μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τμήμα κύκλου ἐφεστάτω τὸ ΑΕΓ μὴ μείζον ἡμικυκλίου κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μείζον ἡμικυκλίου τὸ ΑΔΓ, καὶ διηρήσθω ἡ ΑΕΓ περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΓΕ περιφέρεια τῆς ΕΑ περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΑ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος πεσεῖται δὴ μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔΓ περιφερείας διὰ τὸ κεκλίσθαι τὸ ΑΕΓ τμήμα πρὸς τὸ ΑΔΓ τμήμα. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΕΖ καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κύκλου ἐπίπεδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ. ἦτοι δὴ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἢ μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας διὰ τὸ τὸ ΑΒΓ τμήμα ὑποκεῖσθαι μὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου. ἔστω πρότερον μεταξὺ τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ ἔστω τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Δ, Β μέρη, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν προσβεβλήσθω εὐθεῖα ἡ ΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΕΖ ἑκατέρω τῶν ΑΖ, ΖΘ οὔσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδῳ· καὶ ἑκατέρα ἄρα

τῶν ὑπὸ AZE, ΘZE γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ AZ τῆς ZΘ ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘZ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AZ, ZE, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς AE, ἐλάσσονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν EZ, ZΘ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΘE· ἡ AE ἄρα τῆς EΘ ἐστὶν ἐλάσσων. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν AB περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ AE· ἡ ἄρα AE ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν AB περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. καὶ πάλιν ὁμοίως δείξομεν, ὅτι αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου διαγομένων εὐθειῶν πρὸς τὴν AB περιφέρειαν μεταξὺ τῶν A, B σημείων. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ EB. λέγω, ὅτι ἡ EB μεγίστη ἐπὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν ABΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἐπεὶ γὰρ ἡ BZ τῆς ZΘ ἐστὶ μείζων, μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZB, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς EB, μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν EZ, ZΘ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς EΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῆς EΘ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E πρὸς τὴν ABΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἡ EB μείζων ἐστίν· ἡ EB ἄρα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν ABΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ^[45]

3 2 (50) ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ EΓ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ EΓ ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν BΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν B, Γ σημείων. διήχθω γὰρ καὶ ἑτέρα ἡ EK, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZΓ, ZK. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓZ τῆς ZK ἐστὶν ἐλάσσων, ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZK. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓZ, ZE, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς EΓ, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν KZ, ZE, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς EK· ἡ GE ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς EK. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν BΚΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν B, Γ σημείων ἐλάσσων ἐστὶν ἡ EΓ. καὶ πάλιν ὁμοίως δείξομεν, ὅτι αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων τῶν ἀπὸ τοῦ E σημείου πρὸς τὴν BΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεταξὺ τῶν B, Γ σημείων. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι ἡμικύκλιον ἢ τὸ ABΓ, ὅτι ἡ AE ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ E πρὸς τὴν ABΓ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἑκατέρου αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη περιφερειῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ^[65]

3 3 ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ E σημεῖον, ἀπὸ δὲ ἑκατέρου αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν ἐξῆς ἐφ' ἑκάτερα τοῦ E σημείου ἡ μὲν AE τῇ EB, ἡ δὲ GE τῇ ED, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓA, BΔ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓA τῇ BΔ. ὁ γὰρ πόλῳ τῷ E, διαστήματι δὲ τῷ EA κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B. ἦτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ Γ ἥξει ἢ οὐ. ἐρχέσθω πρότερον καὶ διὰ τοῦ Γ· ἥξει ἄρα καὶ διὰ τοῦ Δ· ἴση γάρ ἐστὶν ἡ GE περιφέρεια τῇ ED περιφερεία. ἐρχέσθω, καὶ ἔστω τοῦ μὲν AΓBΔ καὶ τοῦ AEB κοινὴ τομὴ ἡ AB, τοῦ δὲ AΓBΔ καὶ τοῦ ΓEΔ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ AEB κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν AΓBΔ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ AB ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ AΓBΔ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ διάμετρος ἐστὶ τοῦ AΓBΔ κύκλου· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ AZ, ZΓ, ZB, ZΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AZ, ZΓ δύο ταῖς ΔZ, ZB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZB ἴση ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ AΓ βάσει τῇ ΔB ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ δὲ πάλιν ὁ πόλῳ μὲν τῷ E, διαστήματι δὲ τῷ EA κύκλος γραφόμενος μὴ ἐρχέσθω διὰ τοῦ Γ, ἀλλ' ὑπερπιπτέτω αὐτό· ἥξει μὲν ἄρα καὶ διὰ τοῦ B, ὑπερπεσεῖται δὲ καὶ τὸ Δ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ AHBΘ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΓEΔ κύκλος κατὰ τὰ H, Θ σημεία, καὶ ἔστω τοῦ μὲν AHBΘ κύκλου καὶ τοῦ AEB κοινὴ τομὴ ἡ AB, τοῦ δὲ AHBΘ κύκλου καὶ τοῦ HEΘ κοινὴ τομὴ ἡ HΘ. ὁμοίως δὲ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ AHBΘ κύκλου,

καὶ ὅτι ἐκάτερος τῶν ΑΕΒ, ΗΕΘ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΑΗΒΘ κύκλον. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τῶν Γ, Δ σημείων ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΗΒΘ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΓΚ, ΔΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΛΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ περιφέρεια τῇ ΕΘ περιφερείᾳ· πόλος γάρ ἐστι τὸ Ε σημεῖον· ὧν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΔΘ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τμήμα κύκλου ὀρθόν ἐστι τὸ ΗΕΘ, καὶ ἀπειλημμένα εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΗΓ, ΔΘ, καὶ κάθετοι ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΚ, ΔΛ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΓΚ τῇ ΔΛ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΘΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΗΖ ὅλη τῇ ΖΘ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ λοιπῇ τῇ ΖΛ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ ἴση· αἱ ΑΚ, ΛΒ ἄρα ἴσαι εἰσὶν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΛΒ, ἡ δὲ ΓΚ τῇ ΔΛ, δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΓ δύο ταῖς ΒΛ, ΛΔ ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρα ἐκάτερα. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΚΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΒ ἐστὶν ἴση· ὀρθή γάρ ἐκατέρα αὐτῶν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἐνὸς αὐτῶν ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐφ' ἐκάτερα τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα ἐκβλήθῃ, ὧν τὸ ἐν συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ εἰρημένον σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν μείζων ἢ ἐκατέρας τῶν ἀπειλημμένων ὑπὸ τῶν ἡγμένων ἐπιπέδων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τοῦ ἀσυμπτώτου ἐπιπέδου μείζων ἐστὶ τῆς μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τοῦ συμπίπτοντος ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ^[5]

3 4 ἐν γὰρ σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΕΒ, ΓΕΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ε σημεῖον, ἀπὸ δὲ ἐνὸς αὐτῶν τοῦ ΑΕΒ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ ἐξῆς ἐφ' ἐκάτερα τοῦ Ε σημείου, καὶ διὰ τῶν Α, Β σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διήχθω τὰ ΑΔ, ΓΒ, ὧν τὸ ΑΔ συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ΑΕΒ, ΓΕΔ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν τῶν ΑΕ, ΕΒ μείζων ἔστω ἐκατέρας τῶν ΓΕ, ΕΔ. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΓΕ περιφέρεια τῆς ΕΔ περιφερείας. ὁ πόλῳ γὰρ τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γραφόμενος ἤξει μὲν διὰ τοῦ Β, ὑπερπεσεῖται δὲ τὰ Γ, Δ σημεῖα διὰ τὸ ἐκατέραν τῶν ΑΕ, ΕΒ ἐκατέρας τῶν ΓΕ, ΕΔ μείζονα εἶναι. ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΒΖ, καὶ προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ ὁ μὲν ΑΔ κύκλος συμπιπτέτω τῷ ΑΗΒΖ κύκλῳ κατὰ τὸ Θ σημεῖον, ὁ δὲ ΒΓ κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν ΑΗΒΖ καὶ τῶν ΑΕΒ καὶ ΗΕΖ κοινὰ τομαὶ ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΗΖ, τοῦ δὲ ΑΔΘ κύκλου καὶ τοῦ ΑΗΒΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΑΘ, τοῦ δὲ ΚΓΒ καὶ τοῦ ΑΗΒΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΚΒ, τοῦ δὲ ΗΕΖ καὶ τοῦ ΑΔΘ κοινὴ τομὴ ἡ ΔΜ, τοῦ δὲ ΚΓΒ καὶ τοῦ ΗΕΖ κοινὴ τομὴ ἡ ΓΝ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ΗΕΖ, ΑΕΒ ἐπιπέδων, τουτέστι τῇ ΕΛ, ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Ε σημεῖον, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΛ ἐπὶ τὸ Ξ. τὸ Ξ ἄρα σημεῖον ἐν τῷ ΑΔΘ ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ΗΕΖ, ἔστι δὲ καὶ τὰ Δ, Μ σημεῖα ἐν ἀμφοτέροις τοῖς ΑΔΘ, ΗΕΖ ἐπιπέδοις· ἡ ΜΔ ἄρα συμπίπτει ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Ε σημεῖον· συμπεσοῦνται δὴ κατὰ τὸ Ξ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΕΒ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΑΗΒΖ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΑΒ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΗΖ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου· κέντρον ἄρα ἐστὶν αὐτοῦ τὸ Λ. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΚΓΒ, ΑΔΘ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΑΗΒΖ, αἱ κοινὰ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΓΒ, ΑΔΘ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΗΕΖ, αἱ κοινὰ αὐτῶν ἄρα τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΔΜ. καὶ ἐπεὶ ἐκάτερον τῶν ΑΕΒ, ΗΕΖ ἐπιπέδων πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶν, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν ἄρα τομὴ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἐστὶν ἡ ΕΛ· καὶ ἡ ΕΛ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ΑΗΒΖ ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὖσας ἐν τῷ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς ΕΛ ἐκατέρα τῶν ΑΒ, ΗΖ οὖσα ἐν τῷ τοῦ ΑΗΒΖ κύκλου ἐπιπέδῳ· ἡ ΕΛ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς ἐκατέραν τῶν ΑΒ, ΗΖ. ^[45]

καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\Xi\Lambda\text{M}$ ἐκτός ἐστι γωνία ἢ ὑπὸ $\Xi\Lambda\text{N}$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ $\Xi\text{M}\Lambda$. ὀρθὴ δὲ ἢ ὑπὸ $\Xi\Lambda\text{N}$ ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ $\Xi\text{M}\Lambda$ ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ $\Xi\text{M}\text{Z}$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἢ ΓN τῇ ΔM , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἢ HZ , ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ $\Gamma\text{N}\text{H}$ τῇ ὑπὸ $\Xi\text{M}\Lambda$. ὀξεῖα δὲ ἢ ὑπὸ $\Xi\text{M}\Lambda$ ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ὑπὸ $\Gamma\text{N}\text{H}$. καὶ παράλληλός ἐστιν ἢ AM τῇ NB , καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ AB , MN , καὶ ἐστὶν ἴση ἢ $\text{A}\Lambda$ τῇ AB . ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ $\text{N}\Lambda$ τῇ AM . ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἢ $\text{H}\Lambda$ ὅλη τῇ AZ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἢ HN λοιπῇ τῇ MZ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ HEZ , καὶ αἱ ἀπειλημμένοι ἴσαι εἰσὶν αἱ HN , MZ , καὶ διηγμέναι εἰσὶ παράλληλοι αἱ ΓN , ΔM , καὶ ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ $\Gamma\text{N}\text{H}$ ὀξεῖα, ἢ δὲ ὑπὸ $\Delta\text{M}\text{Z}$ ἀμβλεῖα, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἢ $\text{H}\Gamma$ περιφέρεια τῆς ΔZ περιφερείας. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἢ HE περιφέρεια ὅλη τῇ ZE περιφερεία ἐστὶν ἴση, ὣν ἢ $\text{H}\Gamma$ τῆς ΔZ ἐστὶν ἐλάσσων, λοιπὴ ἄρα ἢ ΓE περιφέρεια λοιπῆς τῆς $\text{E}\Delta$ περιφερείας μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾗ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὣν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων παράλληλοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τὰς μεταξὺ αὐτῶν καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τῆς πορρώτερον. ^[5]

3 5 ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ $\text{A}\text{B}\Gamma$ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ A σημεῖον, καὶ τοῦτον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ $\text{B}\text{Z}\Gamma$, $\Delta\text{Z}\text{E}$ πρὸς ὀρθάς, ὣν ὁ μὲν $\text{B}\text{Z}\Gamma$ εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ $\Delta\text{Z}\text{E}$ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ $\Delta\text{Z}\text{E}$ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ $\text{K}\Theta$, ΘH ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν παραλλήλων τοῦ $\text{B}\text{Z}\Gamma$, διὰ δὲ τῶν K , Θ , H σημείων παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ $\text{O}\text{K}\Pi$, $\text{N}\Theta\Xi$, $\Lambda\text{H}\text{M}$. λέγω, ὅτι οἱ $\text{O}\text{K}\Pi$, $\text{N}\Theta\Xi$, $\Lambda\text{H}\text{M}$ κύκλοι ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τοῦ $\text{A}\text{B}\Gamma$ καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ $\text{B}\text{Z}\Gamma$ τῆς πορρώτερον. λέγω οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ ON περιφέρεια τῆς $\text{N}\Lambda$ περιφερείας. γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν A , Θ σημείων μέγιστος κύκλος ὁ $\text{A}\Theta\text{P}$. καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ $\text{O}\text{K}\Pi$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ ANO περιφέρεια τῇ $\text{A}\Theta\text{P}$ περιφερεία. πάλιν, ἐπεὶ τὸ A σημεῖον πόλος ἐστὶ τοῦ $\text{N}\Theta\Xi$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἢ $\text{A}\Lambda\text{N}$ περιφέρεια τῇ $\text{A}\Sigma\Theta$ περιφερεία· λοιπὴ ἄρα ἢ NO λοιπῇ τῇ ΘP ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἢ $\text{N}\Lambda$ περιφέρεια τῇ $\Sigma\Theta$ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν NO τῇ ΘP , ἢ δὲ AM τῇ $\Sigma\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ $\text{A}\Theta\text{P}$ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν $\text{O}\text{K}\Pi$ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ $\text{A}\Theta\text{P}$ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν $\text{O}\text{K}\Pi$ κύκλον. κύκλου δὲ τινος τοῦ $\text{O}\text{K}\Pi$ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ P τμήμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέσταται τὸ $\text{P}\Theta$ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ ἀπείληπται περιφέρεια ἢ $\text{P}\Theta$ ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια οὔσα τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος· ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ P ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ σημείου πρὸς τὸν $\text{O}\text{K}\Pi$ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ P ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ K ἐπιζευγνυμένης εὐθείας. καὶ εἰσὶν ἴσοι οἱ κύκλοι· μέγιστοι γὰρ εἰσιν· ἢ ἄρα ΘP περιφέρεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘK περιφερείας. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἢ $\Theta\Sigma$ τῆς ΘH ἐλάσσων [ὁμοίως εἰπόντες· κύκλου δὲ τινος τοῦ $\Lambda\text{H}\text{M}$ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Σ σημείου τμήμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκε τὸ $\Sigma\Theta$ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ ἀπείληπται περιφέρεια ἢ $\Sigma\Theta$ ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια οὔσα τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος]. καὶ ἐστὶν ἴση ἢ $\text{K}\Theta$ τῇ ΘH · ἑκατέρα ἄρα τῶν $\text{K}\Theta$, ΘH ἑκατέρας τῶν $\text{P}\Theta$, $\Theta\Sigma$ ἐστὶ μείζων. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ $\text{B}\text{Z}\Gamma$ τῷ $\Lambda\text{H}\text{M}$, ὁ δὲ $\text{B}\text{Z}\Gamma$ συμπίπτει τῇ τῶν $\text{H}\Theta\text{K}$, $\text{A}\Theta\text{P}$ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐντός, τουτέστιν ὡς κατὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ὁ $\Lambda\text{H}\text{M}$ ἄρα κύκλος συμπεσεῖται τῇ τῶν $\text{H}\Theta\text{K}$, $\text{A}\Theta\text{P}$ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐκτός τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ $\text{H}\Theta\text{K}$, $\Sigma\Theta\text{P}$ τέμνουσιν ἀλλήλους, ἀπὸ δὲ ἐνὸς αὐτῶν τοῦ

ΗΘΚ ἴσαι περιφέρεται ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ ΚΘ, ΘΗ ἐξῆς ἐφ' ἐκάτερα τοῦ Θ σημείου, καὶ διὰ τῶν Η, Κ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα ἐκβέβληται τὰ ΛΗΜ, ΟΚΠ, ὧν τὸ ΛΗΜ συμπίπτει τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῶν ΗΘΚ, ΣΘΡ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Θ σημεῖον, μία δὲ τῶν ἴσων περιφερειῶν τῶν ΚΘ, ΘΗ ἐκατέρας τῶν ΡΘ, ΘΣ ἐστὶ μείζων, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΘ περιφέρεια τῆς ΘΣ περιφερείας. ^[45]

3 5 (50) ἀλλ' ἡ μὲν ΡΘ τῇ ΟΝ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΘΣ τῇ ΝΛ· καὶ ἡ ΟΝ ἄρα περιφέρεια τῆς ΝΛ περιφερείας ἐστὶ μείζων. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾗ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρεται ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν γενομένων σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

[5]

3 6 ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθάς οἱ ΒΖΓ, ΔΖΕ, ὧν ὁ μὲν ΒΖΓ εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΖΕ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΖΕ ἴσαι περιφέρεται ἀπειλήφθωσαν αἱ ΚΘ, ΘΗ ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖΓ, διὰ δὲ τοῦ Α καὶ ἐκάστου τῶν Η, Θ, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΗΛ, ΑΘΜ, ΑΚΝ. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας. γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Η, Θ, Κ σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ ΞΗΟ, ΠΘΡ, ΣΚΤ· μείζων ἄρα ἡ ΣΠ περιφέρεια τῆς ΠΞ περιφερείας διὰ τὸ προδειχθὲν θεωρήμα. ἀλλ' ἡ μὲν ΣΠ τῇ ΥΘ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΠΞ τῇ ΘΦ· καὶ ἡ ΥΘ ἄρα τῆς ΘΦ ἐστὶ μείζων. κείσθω οὖν τῇ ΘΦ ἴση ἡ ΘΧ· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΚ ἴση· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ. γεγράφθω δὲ διὰ τοῦ Χ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παράλληλος κύκλος ὁ ΖΧΨΩ. καὶ ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΨΚΝ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΖΧΨΩ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ἄρα ΑΨΚΝ κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν ΖΧΨΩ κύκλον· ὥστε καὶ ὁ ΖΧΨΩ κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΨΚΝ κύκλον. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖΓ, ΖΧΨΩ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τέμνεται τοῦ ΑΨΚΝ, αἱ κοινὰ αὐτῶν ἄρα τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΒΖΓ, ἥπερ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Ν σημείου διάμετρος οὔσα τοῦ ΑΨΚΝ κύκλου, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΖΧΨΩ παράλληλοί εἰσιν· ὥστε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ΑΨΚΝ, ΖΧΨΩ παράλληλός ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΨΚΝ. εἰς δὲ κύκλον τὸν ΑΨΚΝ διηκταὶ τις εὐθεῖα ἡ τῶν ΑΨΚΝ, ΖΧΨΩ κύκλων κοινὴ τομὴ εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον· παράλληλος γὰρ ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΑΨΚΝ κύκλου· καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκε τὸ ΧΨ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ διήρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Χ, καὶ ἡ ΨΧ περιφέρεια ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἡμίσεια τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Χ σημείου πρὸς τὴν ΨΚΝ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ· ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Κ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα ἐπὶ τὸ Φ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΧΨΩ κύκλος ἑγγιὸν ἐστὶ τοῦ κέντρου ἥπερ ὁ ΞΗΟ, μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΧΨΩ κύκλος τοῦ ΞΗΟ κύκλου. ^[45]

3 6 (50) ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἄνισοί εἰσιν οἱ ΧΨΩ, ΞΗΟ, καὶ ἐστὶν ἐλάσσων ὁ ΞΗΟ, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγμέναι εἰσὶν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ ΞΗΟ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ, ἐν δὲ τῷ ΧΨΩ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ, καὶ ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Φ μείζων τῆς ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ Ψ, ἡ ΗΦ ἄρα περιφέρεια τῆς ΧΨ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. ἀλλ' ἡ μὲν ΗΦ τῇ ΛΜ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΧΨ τῇ ΜΝ ἐστὶν

ὁμοία· καὶ ἡ ΜΛ ἄρα περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ περιφέρεια τῆς ΜΝ περιφερείας. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὢν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἔτι δὲ αἱ ἀφαὶ ὥσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων παράλληλοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήφονται περιφερείας τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τὰς μεταξὺ αὐτῶν καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τῆς πορρώτερον. ^[5]

3 7 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΗ λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὢν ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται, ἔτι δὲ αἱ ἀφαὶ ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὰ Ε, Η σημεῖα, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΒΖΓ, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΛΚ, ΚΘ ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖΓ, διὰ δὲ τῶν Θ, Κ, Λ σημείων παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΜΘΝ, ΕΚΟ, ΠΛΡ. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΠΞ περιφέρεια τῆς ΞΜ περιφερείας. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Κ σημείου τοῦ ΑΔ κύκλου ἐφαπτόμενος μέγιστος ὁ ΔΚΣ, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Α, Β μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Σ μέρη, καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων καὶ ἔστω τὸ Υ σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Υ, Κ σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΥΚΦ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΥΚΦ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΠΛΡ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΥΚΦ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΠΛΡ κύκλον. κύκλου δὲ τινος τοῦ ΠΛΡ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Φ κύκλου τμήμα ὀρθὸν ἐφέσταται τὸ ΦΚΥ καὶ τὸ τούτῳ συνεχές, καὶ διήρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ ἐστὶν ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια ἡ ΦΚ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Φ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Κ σημείου πρὸς τὴν ΠΛΡ περιφέρειαν προσιπτουσῶν εὐθειῶν, αἰεὶ δ' ἡ ἑγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Σ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένης εὐθείας· ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Σ ἐπιζευγνυμένης εὐθείας. καὶ εἰσιν ἴσοι οἱ ΔΚΣ, ΕΛΗ κύκλοι· μέγιστοι γὰρ εἰσιν· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ περιφέρεια τῆς ΚΣ περιφερείας. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΘΚ περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῆς ΚΨ περιφερείας. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΘΚ τῇ ΚΛ· μία ἄρα τῶν ΘΚ, ΚΛ ἐκατέρας τῶν ΨΚ, ΚΣ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ὁ ΒΖΓ κύκλος τῷ ΜΘΝ κύκλῳ, ὁ δὲ ΒΖΓ κύκλος συμπίπτει τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κοινῇ τομῇ ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ ὁ ΜΘΝ ἄρα κύκλος ἐκβαλλόμενος συμπίπτει τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κοινῇ τομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Κ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΚΛ, ΨΚΣ τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Κ σημεῖον, ἀπὸ δὲ ἐνὸς αὐτῶν τοῦ ΘΚΛ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΘΚ, ΚΛ ἐξῆς ἐφ' ἐκάτερα τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους, καὶ διὰ τῶν Θ, Λ σημείων παράλληλα ἐπίπεδα ἐκβέβληται τὰ ΠΛΡ, ΜΘΝ, ὧν τὸ ΜΘΝ συμπίπτει τῇ τῶν ΘΚΛ, ΨΚΣ κύκλων κοινῇ τομῇ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὡς κατὰ τὸ Κ σημεῖον, μία δὲ τῶν ΘΚ, ΚΛ περιφερειῶν μείζων ἐστὶν ἐκατέρας τῶν ΣΚ, ΚΨ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΣΚ τῆς ΚΨ. ^[45]

3 7 (50) ἀλλ' ἡ μὲν ΣΚ τῇ ΠΞ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΚΨ τῇ ΜΞ· καὶ ἡ ΠΞ ἄρα τῆς ΞΜ ἐστὶ μείζων. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὢν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἔτι δὲ αἱ ἀφαὶ ὥσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων

γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ὁμοίως ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν ἐπαφῶν ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν σημείων, δι' ὧν ἐγράφησαν, τῷ ἡμικυκλίῳ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῷ, ἐφ' οὗ ἂν ἦ ἡ συναφή τοῦ λοξοῦ κύκλου ἢ μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον. ^[10]

3 8 ἐν γὰρ σφαίρα μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ ΑΔ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΕΖΓ λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται, ἔτι δὲ αἱ ἀφαῖ ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὰ Ε, Γ σημεία, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἔστω ὁ ΒΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΓ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΗΘ, ΘΚ ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΖ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΔΗΛ, ΜΘΝ, ΞΚΟ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΔ κύκλου κατὰ τὰ Δ, Μ, Ξ σημεία ὁμοίως ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ ΛΝ περιφέρεια τῆς ΝΟ περιφερείας. γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Η, Θ, Κ σημείων παράλληλοι κύκλοι οἱ ΠΗΡ, ΣΘ, ΤΥΚ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ ΣΤ περιφέρεια τῆς ΣΠ περιφερείας. ἀλλ' ἢ μὲν ΣΤ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΥ, ἢ δὲ ΣΠ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΡ· καὶ ἢ ΥΘ ἄρα τῆς ΘΡ μείζων ἐστίν. κείσθω οὖν τῇ ΘΡ ἴση ἢ ΘΦ· ἔστι δὲ καὶ ἢ ΗΘ τῇ ΘΚ ἴση· ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα. γεγράφθω δὴ διὰ τοῦ Φ ὁποτέρῳ τῶν ΠΗΡ, ΣΘ, ΤΥΚ, ΒΖ παράλληλος κύκλος ὁ ΧΦΨ, καὶ εἰλήφθω ὁ πόλος τῶν παραλλήλων κύκλων τὸ Ω σημεῖον, καὶ διὰ τῶν Ω, Ο σημείων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΩΟ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΩΟ κύκλον τινὰ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τὸν ΒΖ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὁ ΩΟ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΖ κύκλον· ὁ ΞΚΟ ἄρα πρὸς τὸν ΖΒ κέκλινται ὡς ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β μέρη· καὶ ὁ ΒΖ ἄρα πρὸς τὸν ΞΚΟ κέκλινται ὡς ἐπὶ τὰ Α, Ε, Β μέρη. παράλληλος δὲ ὁ ΒΖ τῷ ΧΦΨ· καὶ ὁ ΧΦΨ ἄρα πρὸς τὸν ΞΚΟ κέκλινται ὡς ἐπὶ τὰ Ξ μέρη. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΧΦΨ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τοῦ λοξοῦ τέμνεται τοῦ ΞΚΟ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ ἄρα παράλληλοί εἰσιν· ἢ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ΞΚΟ, ΧΦΨ παράλληλός ἐστι τῇ τῶν ΞΚΟ, ΒΖ κοινῇ τομῇ. ἢ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ΞΚΟ, ΒΖ ἐστὶν ἢ ἀπὸ τοῦ Ο σημείου διάμετρος τοῦ ΞΚΟ κύκλου· ἢ ἄρα κοινὴ τομὴ τῶν ΞΚΟ, ΧΦΨ, ἣτις ἐστὶν ἀπὸ τοῦ Ψ σημείου διηγμένη, παράλληλός ἐστι τῇ ἀπὸ τοῦ Ο διαμέτρῳ τοῦ ΞΚΟ κύκλου. εἰς δὲ κύκλον τὸν ΞΚΟ διηκταὶ τις εὐθεῖα ἢ τῶν ΞΚΟ, ΧΦΨ κοινὴ τομὴ εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΞΚΟ κύκλου· καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα κύκλου ἐφέστηκε τὸ ΧΨ καὶ τὸ τούτῳ συνεχὲς κεκλιμένον πρὸς τὸ μὴ μείζον ἡμικυκλίῳ, καὶ διήρηται ἢ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ ἢ ΦΨ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἡμίσεια τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος· ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Φ σημείου πρὸς τὴν μὴ ἐλάσσονα ἡμικυκλίῳ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ. ^[55]

3 8 (50) ἢ δὲ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Κ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ· ὥστε ἢ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ μείζων ἐστὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΨΦΧ κύκλος ἑγγιὸν ἐστὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἤπερ ὁ ΠΗΡ, μείζων ἄρα ὁ ΧΦΨ κύκλος τοῦ ΠΗΡ κύκλου. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι ἄνισοί εἰσιν οἱ ΧΦΨ, ΠΗΡ, καὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΠΗΡ κύκλος, καὶ ἐν αὐτοῖς διηγμέναι εἰσιν εὐθεῖαι, ἐν μὲν τῷ ΠΗΡ ἢ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ, ἐν δὲ τῷ ΧΦΨ ἢ ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ, καὶ ἢ ἐν τῷ ἐλάσσονι κύκλῳ διηγμένη μείζων ἐστὶ τῆς ἐν τῷ μείζονι κύκλῳ διηγμένης εὐθείας, τουτέστι μείζων ἐστὶν ἢ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ρ τῆς ἀπὸ τοῦ Φ ἐπὶ τὸ Ψ, ἢ ΗΡ ἄρα περιφέρεια τῆς ΨΦ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία.

ἀλλ' ἡ μὲν HP περιφέρεια τῇ AN περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΦΨ τῇ NO ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ AN ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῆς NO. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ AN περιφέρεια τῆς NO περιφερείας. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾗ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσι μὴ οὔσαι ἐξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν καὶ μείζονα αἰεὶ τὴν ἑγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον. ^[5]

3 9 ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ABΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ A σημεῖον, καὶ τὸν ABΓ κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ ΔΕΓ, ΒΕ πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν ΒΕ τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΓ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΕΓ ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν μὴ οὔσαι ἐξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΕ αἱ ΖΗ, ΘΚ, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ, Κ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΛ, ΑΗΜ, ΑΘΝ, ΑΚΞ. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας. ἡ γὰρ ΗΘ ταῖς ΖΗ, ΘΚ ἥτοι σύμμετρός ἐστιν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον σύμμετρος ἡ ΗΘ ταῖς ΖΗ, ΘΚ, καὶ διηρήσθωσαν αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ εἰς τὰ μέρη κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεία, καὶ διὰ τῶν Ο, Π, Ρ, Σ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΤ, ΠΥ, ΡΦ, ΣΧ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΚ περιφέρειαι ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ΑΤ, ΤΜ, ΜΥ, ΥΦ, ΦΝ, ΝΧ, ΧΞ ἄρα ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΑΤ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΑΤ τῆς ΝΧ, ἡ δὲ ΤΜ τῆς ΧΞ, ὅλη ἄρα ἡ ΑΜ ὅλης τῆς ΝΞ μείζων ἐστίν. μὴ ἔστω δὲ ἡ ΗΘ ταῖς ΖΗ, ΘΚ σύμμετρος. λέγω, ὅτι ὁμοίως μείζων ἐστὶν ἡ ΑΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἡ ΑΜ τῆς ΝΞ περιφερείας μείζων, ἥτοι ἐλάσσων ἐστὶν αὐτῆς ἢ ἴση. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἡ ΑΜ τῆς ΝΞ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς. κείσθω τῇ ΑΜ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ διὰ τοῦ Α πόλου καὶ τοῦ Ο μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΠΟ, καὶ τριῶν οὐσῶν περιφερειῶν ὁμοιογενῶν ἀνίσων τῶν ΚΘ, ΘΠ, ΗΘ εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ΘΡ μείζων μὲν οὔσα τῆς ΘΠ, ἐλάσσων δὲ τῆς ΘΚ, σύμμετρος δὲ τῇ ΗΘ, καὶ κείσθω τῇ ΘΡ ἴση ἡ ΣΗ, καὶ διὰ τῶν Σ, Ρ σημείων καὶ [διὰ] τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΣΤ, ΡΥ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΣΗ τῇ ΘΡ, καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΗΘ ἑκατέρᾳ τῶν ΣΗ, ΘΡ, ἡ ΤΜ ἄρα τῆς ΝΥ μείζων ἐστίν. τῆς δὲ ΤΜ ἡ ΑΜ μείζων ἐστίν· πολλῶ ἄρα ἡ ΜΛ τῆς ΝΟ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἴση ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΜ τῆς ΝΞ. λέγω δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΝΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς γ' καταγραφῆς, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΖΗ, ΘΚ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π σημεία, καὶ διὰ τῶν Ο, Π σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΟ, ΟΗ ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ἄρα ΑΡ, ΡΜ ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΑΡ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΡ τῆς ΡΜ· ἡ ἄρα ΑΜ τῆς ΜΡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ^[45]

3 9 (50) πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΘΠ, ΠΚ ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ΝΣ, ΣΞ ἄρα ἐξῆς ἀλλήλων μείζους εἰσίν ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΝΣ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΣ τῆς ΣΞ· ὥστε ἡ ΕΝ τῆς ΝΣ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΝΞ, ὧν ἡ ΑΜ τῆς ΜΡ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ, ἡ δὲ ΕΝ τῆς ΝΣ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΡΜ τῆς ΝΣ ἴσων ὑποκειμένων τῶν ΟΗ. ΘΠ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΝΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδ' ἐλάσσων· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ περιφέρεια τῆς ΝΞ περιφερείας. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾗ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ληφθῇ δύο τυχόντα σημεία ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσται, ὡς ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια ἡ

μεταξὺ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τῶν πόλων πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, οὕτως ἡ ἐξῆς τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια ἢ μεταξὺ τῶν διὰ τοῦ πόλου μεγίστων κύκλων καὶ τῶν ληφθέντων σημείων πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων δύο σημείων. ^[10]

3 10 ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον δύο κύκλοι τεμνέτωσαν μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς οἱ ΔΕΓ, ΒΕ, ὧν ὁ μὲν ΒΕ τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΓ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΔΕΓ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ ΒΕ, καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΘ, ΑΗΚ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ΖΗ περιφερείας. ἦτοι γὰρ ἡ ΖΗ τῇ ΔΖ σύμμετρός ἐστιν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διηρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη αἱ ΔΖ, ΗΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ διὰ τῶν Λ, Μ, Ν καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΞ, ΜΟ, ΝΠ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ἄρα ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ ἐξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσὶν ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΒΞ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ, ΘΠ, ΠΚ ἐξῆς μείζους ἀλλήλων εἰσίν, αἱ δὲ ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, ΖΝ, ΝΗ ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν πλῆθος τῶν ΒΞ, ΞΟ, ΟΘ ἴσον τῷ πλῆθει τῶν ΔΛ, ΛΜ, ΜΖ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ΘΠ, ΠΚ ἴσον τῷ πλῆθει τῶν ΖΝ, ΝΗ, ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΗ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν ΒΘ πρὸς ΔΖ, οὕτως τὴν ΘΚ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ἐλάσσονά τινα περιφέρειαν τῆς ΖΗ. μὴ ἔστω δὲ ἡ ΖΗ τῇ ΔΖ σύμμετρος. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΖ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΘΚ περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΗ περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι πρὸς μείζονα τῆς ΖΗ ἔσται ἢ πρὸς αὐτήν. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τῆς ΖΗ τὴν ΑΖ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς β' καταγραφῆς, καὶ τριῶν οὐσῶν ἀνίσων περιφερειῶν τῶν ΑΖ, ΖΗ, ΖΔ εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ΖΜ τῆς μὲν ΖΛ οὔσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ΖΗ μείζων, σύμμετρος δὲ τῇ ΖΔ, καὶ διὰ τοῦ Μ καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΖΜ τῇ ΖΔ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΖΜ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΛ· ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΝ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΜ· καὶ ἐναλλάξ· ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΜ. ^[45]

3 10 (50) ἐλάσσων δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΘΝ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΖΜ. ἀλλὰ καὶ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ΖΗ περιφερείας. λέγω δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΗ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΔΖ, ΖΗ δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ διὰ ἑκατέρου τῶν Λ, Μ σημείων καὶ τοῦ Α πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΝ, ΜΞ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΛ, ΑΖ ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, αἱ ΒΝ, ΝΘ ἄρα ἐξῆς μείζους εἰσὶν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΒΝ· ἡ ΒΘ ἄρα τῆς ΘΝ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΞ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΒΘ τῆς ΘΝ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ, ἡ δὲ ΚΘ τῆς ΘΞ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ, ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΞ· καὶ ἐναλλάξ· ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΝΘ πρὸς τὴν ΘΞ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ· ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΞ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ. ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΜ· ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΞΘ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ἐναλλάξ· ἡ ΝΘ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΞΘ πρὸς τὴν ΖΜ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν ΝΘ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως τὴν ΞΘ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ΖΜ

περιφερείας ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστίν, ὥς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΖΗ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα· πρὸς ἐλάσσονα ἄρα. ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΗ περιφερείας. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ἦ τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων ὧν τῶν παραλλήλων τέμνη τὸν λοξὸν κύκλον μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ οὗ ὁ λοξὸς ἐφάπτεται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς κύκλος, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων περιφέρεια ἢ μεταξὺ τοῦ τε ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τῶν πόλων πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων. ^[10]

3 11 ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ Α σημεῖον, καὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς οἱ ΒΕΓ, ΔΕΖ, ὧν ὁ μὲν ΒΕΓ μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕΖ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΑΗΚ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων τεμνέτω τὸν ΔΕΖ μεταξὺ τοῦ τε ΒΕΓ καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ ΔΕΖ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ ΔΕΖ, ἔστω ὁ ΔΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΔΛΜ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν. γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Η παράλληλος κύκλος ὁ ΝΗΞ, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΑΚ, ΔΖ, ΒΓ, ΝΞ, ΔΜ, ΘΟ, ΗΠ, ΟΗ, ΗΡ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτοὺς τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· αἱ ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ ἄρα διαμέτροί εἰσι τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων, καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν εὐθείαι τις ἦκται ἡ ΑΚ, ἡ ΑΚ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐστίν· τὰ Σ, Π, Ο ἄρα σημεῖα κέντρα ἐστὶ τῶν ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ κύκλων. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΔΛΜ, ΝΗΞ, ΒΕΓ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν· αἱ ἄρα ΔΜ, ΝΞ, ΒΓ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΝΗΞ, ΒΕΓ ὑπὸ τινος ἐπιπέδου τοῦ ΑΗΚ τέμνεται, αἱ κοιναὶ ἄρα αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΠ τῇ ΘΟ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΝΠ, ΠΗ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΒΟ, ΟΘ εἰσι μὴ οὔσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΠΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΟΘ γωνία. καὶ ἐπεὶ οἱ ΝΗΞ, ΔΕΖ ὀρθοὶ εἰσι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον, καὶ ἡ τῶν ΝΗΞ, ΔΕΖ ἄρα κοινὴ τομὴ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ὀρθή ἐστίν. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἐστὶν ἡ ΗΡ· καὶ ἡ ΗΡ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς ΗΡ ἑκατέρω τῶν ΠΡ, ΡΟ οὔσα ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΡΠ, ΗΡΟ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τῇ ΝΞ ὀρθή ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ ΡΠΟ γωνία ὀρθή ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΡΠΟ γωνία ὀρθή ἐστίν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΡΟΡ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΟΡ τῆς ΡΠ. κείσθω οὖν τῇ ΡΡ ἴση ἡ ΡΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΤ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΡΡ τῇ ΡΤ, κοινὴ δὲ ἡ ΗΡ, δύο δὲ αἱ ΡΡ, ΡΗ δύο ταῖς ΡΤ, ΡΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ^[45]

3 11 (50) καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΡΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΤΡΗ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΗΠ βάσει τῇ ΗΤ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΠΡΗ τρίγωνον τῷ ΤΡΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΤΡ γωνία. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΟΒ γωνία ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΤΡ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΟΒ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΗΟΡ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Ρ γωνίαν, καὶ διηκταὶ τις ἡ ΗΤ, ἡ ΟΡ ἄρα πρὸς τὴν ΡΤ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ὑπὸ ΡΤΗ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΡΟΗ γωνίαν. ἴση

δὲ ἡ μὲν ΡΤ τῇ ΡΠ, ἡ δὲ ὑπὸ ΡΤΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΟΒ· καὶ ἡ ΟΡ ἄρα πρὸς τὴν ΡΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΟΘ γωνία πρὸς τὴν ΡΟΗ. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΡΟ πρὸς τὴν ΡΠ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΟΔ πρὸς τὴν ΔΣ, τουτέστιν ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ, ὥς δὲ ἡ ΒΟΘ γωνία πρὸς τὴν ΗΟΡ γωνίαν, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν· καὶ ἡ ΖΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΜ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΔΖ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ ΔΜ διάμετρος τοῦ ΔΑΜ κύκλου· ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΔΑΜ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΗ περιφέρειαν. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται ὁμοίας ἀφαιρῶντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἄλλος δὲ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφάπτεται, ἢ ὢν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ τέμνη τοὺς τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ οὗ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς κύκλος, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια ἡ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων. ^[10]

3 12 ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒ, ΓΔ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ ΑΓ κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα ὁμοίας ἀφαιρῶντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἄλλος δὲ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους ὁ ΕΖ μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὢν οἱ ΑΒ, ΓΔ ἐφάπτονται, καὶ τεμνέτω τοὺς ΑΒ, ΓΔ μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων καὶ οὗ οἱ ΑΒ, ΓΔ ἐφάπτονται, τοῦ ΑΓ κύκλου, ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ ΜΒΖ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ ΕΖ, ἔστω ὁ ΕΗ. λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ΕΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν. ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων τὸ Λ σημείον, καὶ διὰ τοῦ Λ καὶ ἐκάστου τῶν Ε, Θ, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΕΜ, ΛΘΝ, ΛΚΞ, διὰ δὲ τοῦ Κ παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ ΟΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΠ ἐφαπτόμενος τοῦ ΕΗ κύκλου κατὰ τὸ Π. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ ΟΚ, ΕΠΗ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΕΘΚΖ, ΟΘΠ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΕΠΗ κατὰ τὰ Ε, Π, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου καὶ τοῦ πόλου τοῦ Λ μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΛΘΡ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΡ τῇ ΡΚ· ἡ ἄρα ΡΣ τῆς ΡΚ ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ΣΚ ἄρα τῆς ΚΡ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. ἀλλ' ἡ μὲν ΣΚ τῇ ΒΔ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΚΡ τῇ ΝΞ· καὶ ἡ ΒΔ ἄρα τῆς ΝΞ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΕΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΝ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΘ περιφέρειαν, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΜΝ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΘ περιφέρειαν μείζονα λόγον ἢ περ ἡ ΝΞ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν, καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΕΠΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΝΞ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν. καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ΕΠΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ τῆς ΝΞ περιφερείας διπλῇ πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν. ἡ δὲ τῆς ΝΞ περιφερείας διπλῇ πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ· ἡ γὰρ τῆς ΝΞ διπλῇ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΔ· πολλῶ ἄρα ἢ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ΕΠΗ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΚ περιφέρειαν. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ^[5]

ἐν γὰρ σφαίρα παράλληλοι κύκλοι οἱ AB, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΔ περιφερείας τὰς ΑΕ, ΕΔ ἴσας ἀφαιρείωσαν πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΗ, καὶ διὰ τῶν Α, Ε, Δ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΓ, ΘΕΚ, ΒΗΔ ἥτοι διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ περιφερείᾳ. ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρα παράλληλοι κύκλοι οἱ AB, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΑΔ περιφερείας τὰς ΑΕ, ΕΔ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΗ, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ AB κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρα ἴσοι τε καὶ παράλληλοι οἱ AB, ΓΔ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ ΚΘ περιφερείας τὰς ΘΕ, ΕΚ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΖΗ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἴση· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἄρα ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθείᾳ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΚΔ περιφερείᾳ. καὶ εἰσιν ἴσοι οἱ κύκλοι· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ περιφέρεια τῇ ΚΔ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΖΕ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΚΔ τῇ ΕΗ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΕΗ περιφερείᾳ ὁμοία ἐστίν. καὶ εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ περιφέρεια τῇ ΕΗ περιφερείᾳ. Ἐὰν ἐν σφαίρα μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρα ἐφάπτηται, ἄλλος δὲ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὢν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἰεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. ^[5]

3 14 ἐν γὰρ σφαίρα μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρα τοῦ ΑΔΞ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον, ἄλλος δὲ τις μέγιστος κύκλος ὁ ΒΕΓ λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὢν ὁ ΑΒΓ ἐφάπτεται. λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες ἢ ὅμοιαι ἔσονται αἰεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ λοξοῦ κύκλου τοῦ ΒΓ δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Κ, καὶ διὰ τῶν Ε, Κ σημείων τῷ ΑΔΞ κύκλῳ παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΖΕΗ, ΘΚΛ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ΕΗ περιφέρεια τῆς ΚΛ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ ΘΚ περιφέρεια τῆς ΖΕ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ε, Κ σημείων μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΕΜ, ΞΝΚ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΔΞ, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Μ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Θ μέρη, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ Ξ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Κ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Λ μέρη. ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ ΑΛ, ΞΚ ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν κύκλων παραλλήλων περιφέρειαι εἰσιν αἱ ΝΗ, ΚΛ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΗ περιφέρεια τῇ ΚΛ περιφερείᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΘΜ ἐστὶν ὁμοία. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΝΗ περιφέρεια τῇ ΚΛ περιφερείᾳ, ἡ ἄρα ΕΗ περιφέρεια τῆς ΚΛ περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΖΕ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. ^[25]