

eul_wid: sam-aa

Σερήνος ὁ Ἀντινόου · Serenus of Antinoöpolis

On the Section of a Cylinder

Περὶ Κυλίνδρου Τομῆς

Period: Ὀψιμαρχαία [Late Antique](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Μαθηματικά [Mathematics](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

2 (1t) ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΗΣ. Πολλοὺς ὁρῶν, ὧ φίλε Κύρε, τῶν περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφόμενων οἰομένους τὴν τοῦ κυλίνδρου πλαγίαν τομὴν ἑτέραν εἶναι τῆς τοῦ κώνου τομῆς τῆς καλουμένης ἐλλείψεως ἐδικαίωσα μὴ χρῆναι περιορᾶν ἀγνοοῦντας αὐτοὺς τε καὶ τοὺς ὑπ' αὐτῶν οὕτω φρονεῖν ἀναπεπεισμένους· καίτοι δόξειεν ἂν παντὶ ἄλογον εἶναι γεωμέτρως γε ὄντας περὶ γεωμετρικοῦ προβλήματος ἄνευ ἀποδείξεως ἀποφαίνεσθαι τι καὶ πιθανολογεῖν ἀτεχνῶς ἀλλότριον γεωμετρίας πρᾶγμα ποιοῦντας. ὅμως δ' οὖν, ἐπεὶ οὕτως ὑπειλήφασιν, ἡμεῖς δὲ οὐ συμφερόμεθα, φέρε γεωμετρικῶς ἀποδείξωμεν, ὅτι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κατ' εἶδος ἀνάγκη γίνεσθαι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς σχήμασι τομὴν, τῷ κώνῳ λέγω καὶ τῷ κυλίνδρῳ, τοιῶσδε μέντοι ἀλλ' οὐχ ἀπλῶς τεμνομένοις. ὥσπερ δὲ οἱ τὰ κωνικὰ πραγματευσάμενοι τῶν παλαιῶν οὐκ ἠρκέσθησαν τῇ κοινῇ ἐννοίᾳ τοῦ κώνου, ὅτι τριγώνου περιενεχθέντος ὀρθογωνίου συνίσταται, περισσότερον δὲ καὶ καθολικώτερον ἐφιλοτεχνήσαντο μὴ μόνον ὀρθοῦς, ἀλλὰ καὶ σκαληνοὺς ὑποστησάμενοι κώνους, οὕτω χρῆ καὶ ἡμᾶς, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ κυλίνδρου τομῆς ἐπισκέψασθαι, μὴ τὸν ὀρθὸν μόνον ἀφορίσαντας ἐπ' αὐτοῦ ποιεῖσθαι τὴν σκέψιν, ἀλλὰ καὶ τὸν σκαληνὸν περιλαβόντας ἐπὶ πλεον ἐκτεῖναι τὴν θεωρίαν.

4 ὅτι μὲν γὰρ οὐκ ἂν προσοιτό τις ἐτοίμως μὴ οὐχὶ πάντα κύλινδρον ὀρθὸν εἶναι τῆς ἐννοίας τοῦτο συνεφελκούσης, οὐκ ἀγνοῶ δῆπουθεν· οὐ μὴν ἀλλ' ἔνεκά γε τῆς θεωρίας ἄμεινον οἶμαι καθολικωτέρῳ ὀρισμῷ περιλαβεῖν, ἐπεὶ καὶ τὴν τομὴν ὀρθοῦ μένοντος αὐτοῦ μόνη τῇ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐλλείψει τὴν αὐτὴν εἶναι συμβήσεται, καθολικώτερον δὲ ὑποτεθέντος ὅλη τῇ ἐλλείψει καὶ αὐτὴν ἐξισάζειν, ὃ δὴ καὶ δείξειν ὁ παρὼν λόγος ἐπαγγέλλεται. ἰτέον οὖν ἡμῖν ἐπὶ τὸ προκείμενον ὀρισσάμενοις τάδε· ἐὰν μενόντων δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων αἱ διάμετροι παράλληλοι οὔσαι διὰ παντὸς αὐταὶ τε περιενεχθεῖσαι ἐν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις περὶ μένον τὸ κέντρον καὶ συμπεριενεγκοῦσαι τὴν τὰ πέρατα αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιζευγνύουσιν εὐθεῖαν εἰς ταῦτό πάλιν ἀποκαταστῶσιν, ἢ γραφεῖσα ὑπὸ τῆς περιενεχθείσης εὐθείας ἐπιφάνεια κυλινδρική ἐπιφάνεια καλεῖσθω, ἥτις καὶ ἐπ' ἄπειρον αὔξεσθαι δύναται τῆς γραφούσης αὐτὴν εὐθείας ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένης. κύλινδρος δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπειλημένης κυλινδρικής ἐπιφανείας. βάσεις δὲ τοῦ κυλίνδρου οἱ κύκλοι. ἄξων δὲ ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα. πλευρὰ δὲ τοῦ κυλίνδρου γραμμὴ τις, ἥτις εὐθεῖα οὔσα καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὔσα τοῦ

κυλίνδρου τῶν βάσεων ἀμφοτέρων ἄπτεται, ἥν καί φαμεν περιενεχθεῖσαν γράφειν τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν.

⁶ τῶν δὲ κυλίνδρων ὀρθοὶ μὲν οἱ τὸν ἄξονα πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι, σκαληνοὶ δὲ οἱ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὸν ἄξονα. ὁριστέον δὲ κατὰ Ἀπολλώνιον καὶ τάδε· πάσης καμπύλης γραμμῆς ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ οὔσης διάμετρος καλεῖσθω εὐθεῖα τις, ἣτις ἡγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθεῖα τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφή δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρασ τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἐκάστην τῶν παραλλήλων. συζυγεῖς δὲ διάμετροι καλεῖσθωσαν, αἵτινες ἀπὸ τῆς γραμμῆς τεταγμένως ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους ὁμοίως αὐτὰς τέμνουσι. τοιούτων δὲ γραμμῶν ὑφισταμένων καὶ ἐν ταῖς πλαγίαις τομαῖς τοῦ κυλίνδρου ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τῆς τομῆς καλεῖσθω, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν γραμμὴν προσπίπτουσα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς γραμμῆς. ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθεῖσα περατουμένη ὑπὸ τῆς γραμμῆς δευτέρα διάμετρος καλεῖσθω· δειχθήσεται γὰρ πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν διάμετρον δίχα τέμνουσα. ἔτι κάκεῖνο προδιωρίσθω, ὅτι ὅμοιοι ἐλλείψεις εἰσὶν, ὧν ἑκατέρας αἱ συζυγεῖς διάμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἀλλήλας.

⁸ α'. Ἐὰν ὧσι δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων καὶ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB, BG παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἴση ἔστω ἡ μὲν AB τῇ ΔΕ, ἡ δὲ BG τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE, ΓΖ, ΑΔ. ἐπεὶ ἡ AB τῇ ΔΕ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι, καὶ ἡ BE ἄρα τῇ ΓΖ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὃ προέκειτο δεῖξαι. β'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμος ἔσται. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ AB εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς AB ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ ἐν μὲν τοῖς κύκλοις εὐθείας τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους οὔσας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΕΗΓ, ΖΔ γραμμὰς.

¹⁰ λέγω, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΗΓ, ΔΖ γραμμῶν εὐθεῖα ἐστίν. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστωσαν εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΗΓ γραμμὴ καὶ ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΔ ἐπιπέδῳ εἰσὶ συνάπτουσαι κατὰ τὰ Ε, Γ σημεῖα, καὶ ἐστὶν ἡ ΕΗΓ γραμμὴ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἡ ΕΘΓ ἄρα εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσι καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ ΕΔ ἐπιπέδου, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· διάμετροι γὰρ εἰσιν ἴσων κύκλων· ἐὰν ἄρα μενόντων τῶν Α, Β σημείων τὰς ΑΓ, BE διαμέτρους νοήσωμεν περιενεγκούσας τὴν ΕΘΓ εὐθεῖαν περὶ τοὺς Α, Β κύκλους καὶ ἀποκαθισταμένας, ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα γράψει τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἔσται τὸ Θ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. ἦν δὲ ἐκτός· ὅπερ ἀδύνατον. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗΓ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΔ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΓΔ· τὸ ΕΔ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. γ'.

¹² (1n) Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμος ἔσται ἴσας γωνίας ἔχον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ AB εὐθεῖα, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμος τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ καὶ ποιοῦντι τομὰς ἐν μὲν ταῖς βάσεσι τὰς ΕΖ, ΗΘ εὐθείας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΕΗ, ΖΘ γραμμὰς. λέγω, ὅτι τὸ ΕΗΖΘ σχῆμα παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἰσογώνιον τῷ ΓΔ. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Β κέντρου ἐπὶ τὴν ΕΖ εὐθεῖαν

κάθετος ἡ ΒΚ, καὶ διὰ τῶν ΚΒ, ΒΑ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ αἱ ΑΛ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΑΘ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ὁ μὲν Α κύκλος τῷ Β, τὸ δὲ ΕΘ ἐπίπεδον τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΑΒΚΛ ἐπιπέδου, παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΒΚ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΒΑ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΑ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΑΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΚΖ τῇ ΛΘ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΖ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΛΘ ἴση ἐστὶ.

14 καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΛΘ. καὶ εἰσιν ἴσαι· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ· ἀλλὰ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῇ ΑΘ παράλληλός ἐστι, τὸ ἄρα διὰ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἀγόμενον ἐπίπεδον ἥξει καὶ διὰ τῆς ΑΘ καὶ τομὴν ποιήσει παραλληλόγραμμον, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ἡ τὰ Ζ, Θ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ πλευρὰ τοῦ ΕΖΗΘ σχήματος ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· κοινὴ ἄρα πλευρὰ ἐστὶ τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΕΗΖΘ σχήματος. εὐθεῖα δὲ ἐδείχθη ἡ πλευρὰ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἡ ΘΖ ἄρα ἐστὶν εὐθεῖα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΗΘ· τὸ ΕΘ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον τῷ ΓΔ. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΜΑ, ΑΘ παράλληλοι εἰσι, καὶ εἰσιν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἴσαι, καὶ αἱ ΖΔ, ΜΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσι διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα. καὶ αἱ ΖΘ, ΔΜ ἄρα καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΑΜ παράλληλος. ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΘΖ γωνία τοῦ ΕΘ παραλληλογράμμου τῇ ὑπὸ ΓΜΔ γωνίᾳ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΘ τῷ ΓΔ. δ'.

16 (1n) Ἐὰν καμπύλην γραμμὴν ὑποτείνειν εὐθεῖα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτείνουσας, ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται. ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΔ, ὑποτείνουσα δὲ αὐτὴν ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΔ αἱ ΒΕ, ΓΖ, καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΖΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΔ κύκλου περιφέρειά ἐστι. τετμήσθω δίχα ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΒ, ΗΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΗΕ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΗΕ, ΕΒ, ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ ἴση δείκνυται καὶ αἱ ἄλλαι· ἡμικύκλιον ἄρα τὸ ΑΒΔ. ε'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσι ποιοῦντι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΞΔ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ ΓΞΔ γραμμὴ κύκλου ἐστὶ περιφέρεια. ἤχθωσαν ἐν τῷ Α κύκλῳ διάμετροι αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ δι' ἐκατέρας τῶν ΕΖ, ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμα τὰς τομάς.

18 ἔστω τοῦ μὲν ΕΚ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, τοῦ δὲ ΗΛ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΔΞ ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΞΔ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ Α κύκλῳ καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΕΚ ἐπιπέδου, ἡ ΓΔ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΝΞ τῇ ΗΘ παράλληλός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ ἐκατέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλός ἐστι, καὶ ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΜΔ. ὁμοίως ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΑ τῇ ΑΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΝ τῇ ΜΞ. ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΕ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ΜΓ, ΜΝ ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πᾶσαι ἄρα αἱ ΜΓ, ΜΔ, ΜΝ, ΜΞ ἴσαι εἰσὶν. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλαι διαχθῶσι, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΞΔ γραμμὴν προσπίπτουσιν ἴσαι εὐρεθήσονται. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΞΔ τομὴ. ὅτι δὲ καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἔχει, δηλον· τὸ γὰρ Μ ἐν τοῖς τρισὶν ἐπιπέδοις ὄν ἐπὶ τῆς ΑΒ κοινῆς τομῆς τῶν παραλληλογράμμων ἐστὶ, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος. ζ'. Ἐὰν κύλινδρος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τε πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον καὶ ποιοῦντι τὴν κοινὴν τομὴν ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ εὐθεῖαν ἴσας μὲν ποιοῦσαν γωνίας ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου, μὴ

παράλληλον δὲ οὖσαν ταῖς βάσεσι τοῦ παραλληλογράμμου, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη ἀγωγή τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντί α .

20 ἔστω σκαληνὸς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ἔστω τὸ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ὄν τῇ βάσει, τετμήσθω δὲ ὁ κύλινδρος καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ΕΖΗ ὀρθῶ καὶ αὐτῷ πρὸς τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον καὶ ποιοῦντι ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΕΗ εὐθεῖαν μὴ παράλληλον μὲν ταῖς ΑΒ, ΓΔ, ἴσας δὲ γωνίας ποιοῦσαν τὴν μὲν ὑπὸ ΗΕΑ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖΗ τομὴ κύκλος ἐστίν. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΗ εὐθείας τὸ Θ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΗ ἦχθω ἡ ΘΖ ἐν τῷ ΕΖΗ ἐπιπέδῳ οὖσα· ἡ ΖΘ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον. ἦχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΚΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΜΝ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἦχθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὴν ΚΖΛ τομὴν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΝ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΒ κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα, κάθετος ἄρα ἐστίν ἡ ΜΝ ἐπὶ τὸ ΑΔ ἐπίπεδον· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΜΝ. παράλληλοι δὲ καὶ αἱ ΚΛ, ΑΒ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα.

22 ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ παράλληλός ἐστι τῇ βάσει· κύκλος ἄρα ἐστίν ἡ ΚΖΛ τομή. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἡ ΚΛ καὶ τῇ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἴσον ἐστίν· ἴση γὰρ ἡ μὲν ΕΘ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΘΛ διὰ τὸ τὰς πρὸς ταῖς ΕΚ, ΛΗ βάσεσι γωνίας ἴσας εἶναι· καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστί. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλην ἀγάγῃς παράλληλον τῇ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ἴσον δυνήσεται τῷ ὑπὸ τῶν γενομένων τμημάτων τῆς ΕΗ· κύκλος ἄρα ἐστίν ἡ ΕΖΗ τομή, οὗ διάμετρος ἡ ΕΘΗ εὐθεῖα. Ζ'. Δοθέντος κυλίνδρου σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἀγαγεῖν διὰ τοῦ σημείου πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὸ Γ, καὶ δεόν ἔστω διὰ τοῦ Γ ἀγαγεῖν τοῦ κυλίνδρου πλευρὰν. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ἥξει ἄρα ἡ τομὴ διὰ τοῦ Γ καὶ ποιήσει εὐθεῖαν ὡς τὴν ΓΕ, ἥτις ἐστὶ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου.

24 η'. Ἐὰν ἐπὶ κυλίνδρου ἐπιφανείας δύο σημεῖα ληφθῇ μὴ ἐπὶ μιᾷς ὄντα πλευρᾷς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις εἰσὶν οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ μὴ ὄντα ἐπὶ μιᾷς πλευρᾷς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ εὐθεῖα. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐντὸς πίπτει τῆς ἐπιφανείας. εἰ γὰρ δυνατόν, πίπτει τῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς. καὶ ἐπεὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾷς τοῦ κυλίνδρου, ἦχθω διὰ μὲν τοῦ Γ ἡ ΕΓΖ πλευρά, διὰ δὲ τοῦ Δ ἡ ΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΘ εὐθεῖαι· ἐντὸς ἄρα πίπτουσι τῶν κύκλων αἱ ΕΗ, ΖΘ. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Κ· τὸ δὲ Κ ἦτοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἢ ἐκτὸς. ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, καὶ διὰ τοῦ Κ ἦχθω πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΑΚΜ εὐθεῖα πίπτουσα ἐπὶ τὰς ΕΗ, ΖΘ περιφερείας ἐκβαλλομένη. οὐδετέραν ἄρα τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ.

26 καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· οὐδὲ τὸ Κ ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΔ ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ, τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. καὶ ἔστιν ἄρα καὶ οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν ἡ ΓΔ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐκτὸς, καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ περιφερείας τοῦ Α ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ. ἐκβληθεῖσα δὴ ἐφ' ἐκάτερα ἡ ΚΛ οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· ὥστε οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ· καὶ τὰ λοιπὰ δήλα. Θ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μήτε παρὰ τὰς βάσεις μήτε ὑπεναντίως μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος οὐδὲ εὐθύγραμμον. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ μήτε παρὰ

τὰς βάσεις μήτε ὑπεναντίως μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παραλλήλως τῷ ἄξονι. τὸ δὲ τέμνον ἐπίπεδον ἦτοι καὶ τὰς βάσεις τέμνει ἀμφοτέρως ἢ τὴν ἐτέραν ἢ οὐδετέραν. πρῶτον δὲ μηδετέραν τεμνέτω καὶ ποιεῖτω γραμμὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΕΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕΔ τομὴ οὔτε κύκλος ἐστὶν οὔτε εὐθύγραμμος. ὅτι μὲν οὐκ ἐστὶν εὐθύγραμμος, δῆλον.

- 28 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω εὐθύγραμμος, καὶ εἰλήφθω πλευρὰ τις αὐτοῦ ἡ ΓΕ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δύο σημεῖα εἴληπται τὰ Γ, Ε μὴ ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου· ἡ γὰρ πλευρὰ κατὰ δύο σημεῖα οὐ τέμνει τὴν τοιαύτην γραμμὴν· ἡ ἄρα τὰ Γ, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα εὐθεῖα ἐστὶν ἡ ΓΕ γραμμὴ· τὸ ἄρα ΓΕΔ σχῆμα οὐκ ἐστὶν εὐθύγραμμος. δεικτέον δὲ, ὅτι οὐδὲ κύκλος. ἐπεὶ γὰρ τὸ τῆς ΓΕΔ τομῆς ἐπίπεδον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ οὐκ ἐστὶ παράλληλον, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τεμεῖ ἄλληλα. τεμνέτω, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α κέντρου ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἢ ΘΑΗ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμος, ἐν δὲ τῇ ΓΕΔ τομῇ τὴν ΓΔ εὐθεῖαν, καὶ τῆς ΓΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Λ ἦχθωσαν τῇ ΖΗ παράλληλοι διὰ μὲν τοῦ Λ ἡ ΕΛΜ, διὰ δὲ τοῦ Α ἡ ΝΑΞ· αἱ ἄρα ΜΕ, ΝΕ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. ἦχθω τοίνυν διὰ τῆς ΕΜ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὴν ΟΕΠΜ· ἡ ΟΕΠ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΟΠ δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Λ· ἐπεὶ γὰρ τῶν ΛΟΓ, ΛΠΔ τριγώνων ὁμοίων ὄντων ἴση ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΟΛ τῇ ΛΠ.
- 30 διάμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΛΜ τοῦ ΟΕΠ κύκλου. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστὶν ἡ μὲν ΟΛ τῇ ΘΑ, ἡ ΛΜ δὲ τῇ ΑΞ, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑ, ΑΞ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ. ἡ ΕΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΟΠ διάμετρον τοῦ κύκλου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΟΛ, ΛΠ. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἐστὶν ἡ τομὴ ὑπεναντία, ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΟΓ γωνία οὐκ ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ ΟΓΛ· οὐδὲ ἡ ΟΛ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΛ ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ, τῷ ἀπὸ τῆς ΛΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ οὐκ ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ ἴσον. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΓΕΔ τομὴ· ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ εὐθύγραμμος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ συναπεδείχθη, ὅτι ἡ τὴν ΓΔ ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ΖΗ διχοτομοῦσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ι'. Ἀλλὰ δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τεμνέτω καὶ τὰς βάσεις, τὴν μὲν Α βάσιν τῇ ΓΕ εὐθείᾳ, τὴν δὲ Β τῇ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἢ ΘΑΛ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ διαμέτρου καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ὃ ποιεῖ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμος, τῆς δὲ ΖΕ τομῆς καὶ τοῦ ΘΚ παραλληλογράμμου κοινὴ τομὴ ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΖΕ ἐπίπεδον οὔτε διὰ τοῦ ἄξονος ἦκται οὔτε παραλλήλως τῷ ἄξονι, ἡ ΛΜ ἄρα ἐπ' ἀπειρον ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὸν ἄξονα· τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν ΘΝ παράλληλον οὔσαν τῷ ἄξονι· ἀμφοτέρα γὰρ ἐν τῷ ΘΚ εἰσιν ἐπιπέδῳ.
- 32 τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα ἡ ΘΝ. ἐὰν δὲ μένοντος τοῦ ἄξονος καὶ τῶν κύκλων ἡ ΘΝ περιενεχθεῖσα σὺν ταῖς διαμέτροις ἀποκατασταθῇ, αὐξήσῃ τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ ὕψος, καὶ προσεκβληθέντος τοῦ ΖΕ ἐπιπέδου αὐξηθήσεται καὶ ἡ τομὴ μέχρι τοῦ Ν· τὸ δ' αὐτὸ ἔσται καὶ ἐπὶ τὰ Γ, Λ μέρη· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ ἐστὶ κυλίνδρου, οἷα καὶ ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι. ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ οὔτε κύκλος οὔτε εὐθύγραμμός ἐστι· καὶ ἡ ΓΕΗΖ ἄρα τομὴ οὔτε εὐθύγραμμος οὔτε κύκλος οὔτε τμήμα κύκλου, ἀλλ' ἐστὶν ἡ τοιαύτη τομὴ κυλίνδρου τομὴ. ια'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἄχθῃ τις εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ, ἥτις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσα τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ παραλληλογράμμου καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

- 34 ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος ἦχθω εὐθεῖα τινὶ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΓΑ βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου καὶ προσεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου. ἦχθω διὰ τοῦ Ε σημείου παρὰ τὸν ἄξονα ἡ ΘΕΗ εὐθεῖα τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἦχθω ἡ ΘΚ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὴν ΓΑ καθέτῳ, ἥτινι παράλληλος ὑπόκειται ἡ ΕΖ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΘΚ τὴν ΓΑ καὶ αὐτή. ἦχθω οὖν διὰ τῶν ΗΘ, ΘΚ ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον καὶ ποιείτω τὸ ΗΝ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ κοινὴ τομὴ τῶν ΓΔ, ΝΗ παραλληλογράμμων. ἐπεὶ τοίνυν αἱ ΕΖ, ΚΘ τῇ αὐτῇ εἰσι παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσι παράλληλοι· καὶ ἐστὶν ἡ ΘΚ ἐν τῷ ΚΗ ἐπιπέδῳ· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα ἐν τῷ ΚΗ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΕΖ πίπτει ἐπὶ τὴν ΛΚ, ἥτις ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ. ἡ ΕΖ ἄρα ἐντὸς πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. φανερόν δέ, ὅτι, κὰν εἰς τὸ ἕτερον μέρος ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Μ, ὅπερ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, δίχα ἔσται τετμημένη κατὰ τὸ Ζ.
- 36 ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΑ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ ΘΚ, ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΝ. καὶ παράλληλοι αἱ ΜΝ, ΛΚ, ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΜΖ τῇ ΖΕ. ιβ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι μὲν τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου γενομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσοῦνται καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ὀρθοῦ μὲν ὄντος τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, σκαληνοῦ δὲ ὄντος οὐκέτι, πλην ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος, ὡς εἴρηται, ἐπιπέδῳ ποιούντι τὴν ΕΖΗΘ τομὴν, ὥστε συμπίπτόντων τοῦ τε τῆς ΕΖΗΘ τομῆς καὶ τοῦ τῆς ΑΓ βάσεως ἐπιπέδου τὴν κοινὴν τομὴν τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τῇ ΓΑΛ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τῆς ΕΖΗ τομῆς ἦχθω τις εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΚΛ ἢ ΖΜ καὶ προσεκβληθεῖσα περατούσθω κατὰ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Θ.
- 38 λέγω, ὅτι ἡ ΖΜ πίπτει ἐπὶ τὴν ΕΗ, καὶ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ. ἐπεὶ γὰρ ἐν τῇ ΕΖΗ τομῇ παράλληλος ἦκται τῇ ΚΛ ἢ ΖΜ, ἐντὸς ἄρα πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ἡ μὲν ΖΜ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΖΗΘ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΕΗ κοινὴ τομὴ ἐστὶν αὐτοῦ καὶ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου, ἡ ΖΜ ἄρα ἐπὶ τὴν ΕΗ πίπτει. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ ἴση ἐστὶ, φανερόν καὶ αὐτὸ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα. λοιπὸν δεῖ δεῖξαι, ὅτι ἡ ΚΛ ὀρθοῦ μὲν ὄντος τοῦ κυλίνδρου ἢ τοῦ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ ΕΗΛ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, τῇ δὲ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΓΑΛ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΚΛ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὔσα, καὶ τῷ λοιπῷ ἄρα τῷ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. εἰ δὲ τὸ ΓΔ οὐκ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ.
- 40 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ. ἔστι δὲ καὶ τῇ ΛΓ πρὸς ὀρθὰς· καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ΓΔ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ ΚΛ. καὶ τὸ δι' αὐτῆς ἄρα ἐπίπεδον τὸ τῆς Α βάσεως πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ΓΔ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ ΛΕ. ἐκ δὲ τῶν δεδειγμένων φανερόν, ὅτι ἡ ΕΗ διάμετρος ἐστὶ τῆς ΕΖΗΘ τομῆς· πάσας γὰρ τὰς παρὰ τὴν

ΚΛ καταγομένης ἐπ' αὐτὴν δίχα τέμνει, ὥσπερ τὴν ΖΘ. ιγ'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὁμοίως τμηθῶσιν, ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας. εὐθεῖαι γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ ὁμοίως τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεία. λέγω, ὅτι, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεὶ, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ.

42 ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὃ προέκειτο δεῖξαι. ιδ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς ἀχθῇ τις ἐπὶ τὴν διάμετρον παράλληλος τῇ εἰρημένη κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀχθεῖσα δυνήσεται τι χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κατ' εὐθεῖαν ὀρθὴν πρὸς ΓΑ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ γενομένη τομὴ ἡ ΕΖΗ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ ΕΗ διάμετρος οὔσα τῆς τομῆς, ὡς ἐδείχθη. ληφθέντος δὲ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Ζ κατήχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΘ· πίπτει ἄρα ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὡς ἐδείχθη.

44 λέγω δὴ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. ἦχθω διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΓΑ ἡ ΚΘΛ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΛ εὐθειῶν ἦχθω ἐπίπεδον τομὴν ποιοῦν τὴν ΚΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων οὔση ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα παράλληλά ἐστιν· ἡ ΚΖΛ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς οὔση πρὸς τὴν ΓΑ, καὶ ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἐστί τῇ ΚΛ. καὶ ἐστὶ κύκλος ὁ ΚΖΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστί τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ. ἐπεὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΗ παράλληλός ἐστιν, ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ ὁμοίον ἐστί τῷ ὑπὸ ΚΘ, ΘΛ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. ιε'. Ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς τεταγμένως ἀγομένη ἐν τῇ τομῇ δευτέρα διάμετρος ἔσται. ἔστω γὰρ τῆς ΕΖΗ τομῆς διάμετρος ἡ ΕΗ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Θ, καὶ διήχθω ἡ ΖΘΜ τεταγμένως. λέγω, ὅτι ἡ ΖΜ δευτέρα διάμετρος ἐστί τῆς τομῆς. ἦχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΗ ἡ ΝΞ, παρὰ δὲ τὴν ΖΜ αἱ ΝΠ, ΞΡ· τεταγμέναι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΝΠ, ΞΡ.

46 ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ τὸν αὐτὸν λόγον, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΝΠ τῷ ἀπὸ ΞΡ· παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ ΝΠΡΞ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΠΗ τῷ ὑπὸ ΕΡΗ. καὶ ἀπ' ἴσων ἀφίρηται τῶν ἀπὸ ΕΘ, ΘΗ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΠΘ λοιπῶ τῷ ἀπὸ ΘΡ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΠΘ τῇ ΘΡ, τουτέστιν ἡ ΝΟ τῇ ΟΞ. ὁμοίως δὲ πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν ΕΗ δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ΖΜ· δευτέρα διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ. ις'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος

ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἡ μὲν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ εἰρημένη κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων δυνήσεται χωρίον, πρὸς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἡ δὲ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται χωρίον, πρὸς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

48 ἔστω κύλινδρος, καὶ κατεσκευάσθω ὡς ἐν τῷ ιδ'. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τῆς διχοτομούσης τὴν ΕΗ τεταγμένως, ὡς ἐδείχθη πρὸς τῷ θ' θεωρήματι, ἡ δὲ διχοτομοῦσα τὴν διάμετρον τεταγμένως δευτέρα διάμετρος ἐστίν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, εἴη ἄν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἀλλὰ δὴ ὑποκείσθω τὸ μὲν Θ διχοτομεῖν τὴν ΕΗ διάμετρον, τὴν δὲ ΖΘΦ τεταγμένην εἶναι δευτέρα ἄρα διάμετρος ἡ ΖΦ. κατήχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς ἡ ΜΝ παράλληλος τῇ ΕΗ λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου τῆς τομῆς. ἦχθω διὰ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμον τὴν τομὴν. ποιεῖτω τὸ ΡΣ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ τομαὶ αὐτοῦ καὶ τῶν παραλλήλων κύκλων αἱ ΣΤ, ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ δὲ καὶ τῆς ΕΖΗ τομῆς κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΜΝ.

50 ἐπεὶ οὖν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΓΔ, ΡΣ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΚΖΛ ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ ΚΘ τῇ ΝΞ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΝΜ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΘΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΞΝΜ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΣ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ γ' θεωρήματι, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΣΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ ἴση ἐστί, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΣΞΝ τῇ ὑπὸ ΕΚΘ· ὅμοια ἄρα ἀλλήλοις τὰ ΕΚΘ, ΜΞΝ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΞΝ πρὸς ΝΜ· καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ΦΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ· κύκλος γάρ ἐστὶν ὁ ΚΖΛ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΘΖ ἐπὶ τὰς ΚΘ, ΞΝ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ὃ προέκειτο δεῖξαι. ιζ'. Ἐὰν κυλίνδρου τομῆς συζυγεῖς διάμετροι ᾖσι, καὶ ποιηθῇ, ὡς ἡ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἑλλείπον εἶδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τρίτης ἀνάλογον.

52 ἔστω κυλίνδρου τομὴ, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΔ, καὶ γενέσθω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἦχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ παραλληλογράμμῳ. ἐπεὶ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖ, ΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΑ, τουτέστι τὸ ΑΘ παραλληλόγραμμον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΑΗ τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ΑΖ ἑλλείπον εἶδει τῷ ὑπὸ ΗΚΘ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΗΑΒ. καλείσθω δὲ ἡ μὲν ΑΒ πλάγια τοῦ εἶδους πλευρά, ἡ δὲ ΑΗ ὀρθία τοῦ εἶδους πλευρά. Τούτων οὕτως ἔχόντων φανερόν ἐστίν, ὅτι ἡ ΑΒΓ τοῦ κυλίνδρου τομῇ ἑλλειψίς ἐστίν· ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τοῦ κώνου τῇ ἑλλείψει

ὑπῆρχεν, ὥς ἐν τοῖς Κωνικοῖς δείκνυται θεωρήματι ιε' τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος, καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασι γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν. ιη'.

54 (1n) Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ συζυγεῖς διάμετροι ᾧσι, καὶ ποιηθῇ, ὥς ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἔλλειπον εἶδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου καὶ τῆς πορισθείσης τρίτης ἀνάλογον. ἔστω κυλίνδρου τομῇ, καὶ γενέσθω, ὥς ἡ ΓΔ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ διάμετρον, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ κείσθω ἡ ΓΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΓΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΘ παραλληλογράμμῳ. ἐπεὶ γάρ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ, τουτέστιν ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ταῦτα γὰρ ἐδείχθη· ὥς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΓ, τουτέστι τὸ ΓΘ ὀρθογώνιον, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΘ, ὃ παραβέβληται παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον τὴν ΓΗ πλάτος ἔχον τὴν ΖΓ ἔλλειπον εἶδει τῷ ὑπὸ ΘΚΗ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΓΗ· ἅπερ ἔδει δεῖξαι.

56 Ταῦτα σαφέστατα παρηκολούθει τῇ ἔλλειψει ἐν τῷ ιε' θεωρήματι τῶν Κωνικῶν· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓ τομῇ τοῦ κυλίνδρου. ιθ'. Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἵδους πλευρᾶς, ὥς τοῦ εἵδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, πρὸς ἑαυτὰ δέ, ὥς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὥς εἴρηται, λαμβανομένων εὐθειῶν. ἔστω κυλίνδρου τομῇ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ καὶ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἵδους, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΖΓ. λέγω, ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἐστὶν, ὥς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἐστὶν, ὥς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ. ἐπεὶ γάρ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ καὶ ἡ ΑΗ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν ΑΔ πλαγίαν, ὥς ἄρα ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ.

58 καὶ ἐναλλάξ ἄρα, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΔ· ἃ προέκειτο δεῖξαι. Καὶ ταῦτα δέδεικται ἐπὶ τῆς ἔλλειψεως ἐν τοῖς Κωνικοῖς θεωρήματι κ'. Ἔστι μὲν οὖν καὶ δι' ἐτέρων πλείστων ἐπιδείξει τὴν ταυτότητα τῶν τομῶν διὰ τῶν κοινῇ συμβαινόντων αὐταῖς· οὐ μὴν ἀλλὰ τὰ γε ἀρχικώτερα τῶν συμπτωμάτων εἴρηται σχεδόν. ἔπειτα μέχρι τοῦδε προαχθείσης τῆς θεωρίας οὐκ ἔμοι προσήκει τοῦντεῦθεν ἔτι τῶν λοιπῶν ἕκαστα διεξιόντι τοῖς ἀλλοτρίοις ἐνδιατρίβειν· ἀνάγκη γάρ που λεπτολογεῖν περὶ ἔλλειψεως ἐπεισκευκλῆσαι καὶ τὰ τῷ Περιγαίῳ Ἀπολλωνίῳ τεθεωρημένα περὶ αὐτῆς. ἀλλ' ὅτῳ σπουδῇ περαιτέρω σκοπεῖν, ἔξεστι ταῦτα παρατιθέντι τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν Κωνικῶν εἰρημένοις αὐτῷ δι' αὐτοῦ βεβαιῶσαι τὸ προκείμενον· ὅσα γὰρ ἐν ἐκείνοις περὶ τὴν τοῦ κώνου τομὴν συμβαίνοντα τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τοσαῦτα καὶ περὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου τομὴν ἐκ τῶν ἐνταῦθα προδεδειγμένων εὐρήσει συμβαίνοντα. διόπερ τούτου μὲν ἀποστάς, ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια προσθείς, δι' ὧν καὶ αὐτῶν ἐνδείκνυται πως ἡ τῶν τομῶν ταυτότης, ἐπ' ἄλλο τι τρέψομαι. κ'. λέγω τοίνυν, ὅτι δυνατόν ἐστι δεῖξαι κῶνον ὁμοῦ καὶ κύλινδρον μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ τεμνομένους ἔλλειψει. ἐκκείσθω τρίγωνον σκαληνὸν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ βάσεως δίχα τεμνομένης κατὰ τὸ Δ, καὶ μείζων ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ, καὶ πρὸς τῇ ΓΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΕ ἥτοι μείζων οὔσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἢ ἐλάσσων, καὶ συμπίπτέτω ἡ ΑΕ τῇ ΒΓΕ κατὰ τὸ Ε, καὶ τῶν ΒΕ, ΕΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ

AZ, καὶ τῇ AE παράλληλος ἐν τῷ τριγώνῳ διήχθω ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τῶν Θ, Η σημείων τῇ AZ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΗΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΜ παραλληλόγραμμον, καὶ διὰ τῆς ΒΕ ἀχθέντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΑΕ ἐπιπέδῳ γεγράφθω ἐν τῷ ἀχθέντι περὶ μὲν τὴν ΚΛ διάμετρον ὁ ΚΝΛ κύκλος βάσις ἐσόμενος κυλίνδρου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ ΚΜ, περὶ δὲ τὴν ΒΓ διάμετρον ὁ ΒΞΓ κύκλος βάσις ἐσόμενος κώνου, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνόν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ, καὶ τῆς ΘΗ ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ Ο ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΕ ἡ ΟΠ ἐν τῷ τῶν κύκλων ἐπιπέδῳ οὔσα, καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΟΠ, ΟΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τῷ ἐπὶ τῆς ΒΞΓ βάσεως.

⁶⁰ ποιεῖτω τὴν ΘΡΗ· ἡ ΘΗ ἄρα εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. τῆς οὖν ΘΗ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Σ κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν δευτέρα μὲν διάμετρος ἡ ΡΣΤ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΥΦ, καὶ γενέσθω, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς ΘΡΗ τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς, οὕτως ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἵδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν.

⁶² ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΘΚ τῇ AZ παράλληλος ἐστίν, ἡ δὲ ΘΟ τῇ AE, ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EZ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥς ἐδείχθη πρότερον· ἡ ἄρα δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ἴση ἐστὶ τῇ ΡΤ δευτέρᾳ διαμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου τομῆς. καὶ ἐστὶν ἡ διχοτομία τῆς ΘΗ κατὰ τὸ Σ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται τῇ ΘΗ δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥσπερ καὶ ἡ ΡΤ· ἡ ἄρα ΡΤ δευτέρα διάμετρος ἐστὶ τῆς τε τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς. ὁμοίως δὲ ἡ ΘΗ διάμετρος ἐστὶ τῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· τὸ Ρ ἄρα σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐστὶ. πάλιν ἐπεὶ ἐν ταῖς τομαῖς τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ αὐταὶ εἰσὶ διάμετροι ἢ τε ΘΗ καὶ ἡ ΡΤ, καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἀνάλογον ἡ αὐτή, τουτέστιν ἡ ΘΧ ὀρθία τοῦ εἵδους πλευρὰ· ἡ ἄρα ΘΧ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ὀρθία ἐστὶ τοῦ εἵδους πλευρὰ.

⁶⁴ ἐπεὶ οὖν, ὥς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΘΧ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΥ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥς ἡ πλαγία τοῦ εἵδους πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καὶ ποιούσης τὰ τμήματα, καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἄρα τομῆς, ὥς ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἵδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ἡ ἴση τῇ ΥΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἐπ' αὐτὴν ἀγομένη κατὰ τὸ Φ οὐχ ἑτέρα ἐστὶ τῆς ΥΦ. ἡ ἄρα ΦΥ καὶ ἐν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ τομῇ· τὸ ἄρα Υ σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ὃν καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δείκνυται, κἂν ὅσαοῦν ὁμοίως τεταγμένως ἀγάγωμεν. ἡ ΘΡΗ ἄρα γραμμὴ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐν ἀμφοτέροις ἐστὶ τοῖς σχήμασι. καὶ ἐπεὶ κατεσκευάσθη ἡ ὑπὸ ΓΑ, ΑΕ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΗ, ΗΘ, ἥτοι μείζων ἢ ἐλάττων οὔσα τῆς πρὸς τῷ Β, ἡ ἄρα τομὴ οὐκ ἐστὶν ὑπεναντία· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ οὐκ ἐστὶ κύκλος· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΡΗ. καὶ τοῦ κώνου ἄρα τοῦ ἐκκειμένου καὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ τομὴ αὕτη ἔλλειψις ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κα'.

⁶⁶ (1n) Κώνου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὐρεῖν κύλινδρον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κώνου. ἔστω ὁ δοθεὶς κώνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐν αὐτῷ ἔλλειψις, ἥς διάμετρος ἡ ΖΕ, ἥτις ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ παράλληλος τῇ ΖΔ ἡ ΑΜ, καὶ τῶν ΒΜ, ΜΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΜΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ διὰ τῶν Ζ καὶ Ε σημείων τῇ ΑΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΘ, ΚΕΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΛ παραλληλόγραμμον. ἐὰν δὴ

νοήσωμεν κύλινδρον, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴ, ἥς διάμετρος ἐστὶν ἡ ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι. εὕρηται ἄρα κύλινδρος, ὃς τέμνεται τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κώνου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. κβ'. Κυλίνδρου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κῶνον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ κυλίνδρου. ἐκκείσθω ἕξωθεν εὐθεῖα τις ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ, καὶ γενέσθω, ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ, Γ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς οἰανδήποτε γωνίαν ἐφεστάτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἀλλήλαις αἱ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἦχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΕΖ, ΔΗ ἢ ΓΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΔΗ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

68 τούτων οὕτως ἰδίᾳ κατασκευασθέντων ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΛΜ, τῆς δὲ δοθείσης ἐν αὐτῷ ἐλλείψεως διάμετρος ἔστω ἡ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἡ ΛΞ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ὁμοίως τῇ ΕΓ, ἴν' ἦ, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΞ. ἔτι γενέσθω, ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΠ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΑΡ, καὶ διὰ τοῦ Ο ἦχθω παράλληλος ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου πλευραῖς ἡ ΟΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΡΝ συμπιπτέτω τῇ ΟΣ κατὰ τὸ Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΠ, ΣΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΠ εὐθεῖα ὁμοίως τῇ ΑΒ τέτμηται, ἔστιν ἄρα καὶ, ὡς μὲν ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΟ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΠΞ, ὡς δὲ ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΞ, οὕτως ἡ ΡΟ πρὸς τὴν ΟΛ, τουτέστιν ἡ ΡΣ οὕτως πρὸς τὴν ΣΝ· παράλληλος ἄρα τῇ ΝΞ ἢ ΣΠ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΡΞ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΣΡΞ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κῶνῳ τομὴ, ἥς διάμετρος ἐστὶν ἡ ΝΞ.

70 ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι. τέτμηται ἄρα καὶ ὁ κῶνος τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κυλίνδρου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. κγ'. Κώνου δοθέντος εὑρεῖν κύλινδρον καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἐνὶ ἐπιπέδῳ διὰ τῆς τομῆς ποιοῦντι ἐν ἐκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις. δεδόσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΓΒΔ πρὸς ὀρθὰς ὄν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα ἡ ΑΓΕ, ΑΔΖ, καὶ πρὸς τῇ ΔΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνία ἥτοι μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΒΓΔ ἢ ἐλάσσων, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, τοῦ δὲ ζητουμένου κυλίνδρου βάσις ἔστω ἥτοι ὁ Α κύκλος ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α κύκλῳ· οὐδὲν γὰρ διοίσει. ἔστω δὴ ὁ περὶ τὴν ΕΘ διάμετρον, καὶ διὰ τῶν Ε, Θ σημείων παράλληλοι τῇ ΒΗ εὐθεῖα ἦχθωσαν αἱ ΕΚ, ΘΛ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ ΓΒΔ τριγώνῳ.

72 καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τέμνει τὴν ΒΗ, ἡ ΒΖ ἄρα ἐκβαλλομένη πάσας τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένας τέμνει· καὶ αἱ παράλληλοι οὖν τῇ ΒΖ τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους τέμνουσιν. ἦχθω τῇ ΒΖ παράλληλος ἡ ΜΝ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὰς ΘΛ, ΕΚ κατὰ τὰ Ξ, Ο σημεία, καὶ τῇ ΕΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΛ καὶ περὶ τὴν ΚΛ διάμετρον κύκλος παράλληλος τῷ περὶ τὴν ΕΘ· νοηθήσεται δὴ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ ΕΘ, ΚΛ κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΚΘ, δηλονότι καὶ αὐτὸ πρὸς ὀρθὰς ὄν τῇ βάσει. καὶ ἐὰν διὰ τοῦ Μ τῇ ΓΔΖ βάσει πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὴν ΜΡ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαν τῷ Α κύκλῳ καὶ διὰ τῶν ΜΡ, ΜΟ διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ποιήσει ἐν μὲν τῷ κῶνῳ τὴν ΝΣΤ ἔλλειψιν, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τὴν ΟΦΞ, διάμετροι δὲ τῆς μὲν ἡ ΝΤ, τῆς δὲ ἡ ΟΞ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΝΣΤ ἔλλειψις τῇ ΟΦΞ ἐλλείψει ὁμοία ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΟΜ, ΒΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, ἀλλὰ καὶ αἱ ΕΚ, ΘΛ, ΒΗ παράλληλοι ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ τέμνει, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΦΨ, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΣΩ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΨ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΩ.

- 74 καὶ ὥς ἡ ΟΞ ἄρα πρὸς τὴν ΦΨ συζυγὴ διάμετρον, οὕτως καὶ ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΣΩ συζυγὴ διάμετρον. ὅτι δὲ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἢ τε ΟΞ τὴν ΦΨ καὶ ἡ ΝΤ τὴν ΣΩ, δῆλον· τὰς γὰρ ΨΦ, ΩΣ παραλλήλους οὖσας ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΜΡ ἢ ΜΟ τέμνει. ἡ ἄρα ΟΦΞ τομὴ τῇ ΝΣΤ τομῇ ὁμοία ἐστίν. καὶ οὐκ ἐστὶ κύκλος οὐδετέρα αὐτῶν διὰ τὸ μὴ ὑπεναντίαν εἶναι τὴν τομὴν τῆς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνίας, τουτέστι τῆς ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΝ, ἀνίσου οὔσης τῇ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ. ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΟΦΞ, ΝΤΣ τομῶν, καὶ εἰσιν ὅμοιαι ἀλλήλαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κδ'. Κυλίνδρου δοθέντος εὑρεῖν κῶνον καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἐνὶ ἐπιπέδῳ ποιοῦντι διὰ τῆς τομῆς ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις. δεδοσθω κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ὄν τῇ βάσει, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ζητουμένου κώνου βάσις ἔστω ἡ τοι ὁ Α κύκλος ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α, οἷον περὶ τὴν ΕΖ διάμετρον, ἐφ' ἧς κέντρον τὸ Δ, καὶ ληφθέντος σημείου τυχόντος ἐπὶ τῆς ΖΗ τοῦ Η εἰλήφθω τῶν ΕΗ, ΗΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΘΗ, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἡ τοι μείζονι ἢ ἐλάττωι τοῦ ΗΘ γεγράφθω ἐν τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ περιφέρεια κύκλου ἡ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Θ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΘΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, καὶ τῇ ΜΗ παράλληλος ἦχθω τέμνουσα τὸ τρίγωνον καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἡ ΝΞ.
- 76 ἐὰν δὴ διὰ τῆς ΝΞ διαγάγωμεν ἐπίπεδον κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον, ἔσται ἡ τομὴ ὁμοία ἐν ἑκατέρῳ, δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῷ πρὸ τούτου. ὅτι δὲ καὶ ἐλλείψεις αἱ τομαὶ καὶ οὐχὶ κύκλοι, δῆλον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΗ ἡ τοι μείζον κατεσκευάσθη ἢ ἐλάττων τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ. κε'. Ἐστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ τετμημένη κατὰ τὸ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΔΒ μὴ ἔστω μείζων. λέγω δὴ, ὅτι, ἐὰν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἴσον χωρίον παρὰ τὴν ΑΓ παραβάλω ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ. εἰ γὰρ δυνατόν, ὑποκείσθω πρῶτον ἡ ΓΔ πλευρὰ εἶναι τοῦ ὑπερβλήματος. ἐπεὶ οὖν τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ ταυτόν ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, ἔστι δὲ τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.
- 78 ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὐκ ἐλάττων· οὐ γὰρ ἐλάττων ἡ ΔΒ τῆς ΑΓ οὐδὲ ἡ ΓΒ τῆς ΑΔ· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνου οὐκ ἐστὶν ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον. τὸ δὲ αὐτὸ δειχθήσεται, εἰ καὶ ἐλάττων τῆς ΓΔ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος ἡ ΓΒ. ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· ὅπερ ἀδύνατον. τὸ αὐτὸ δέ, εἰ καὶ μείζων τῆς ΓΒ ὑποτεθείη γίνεσθαι ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος. ἡ ἄρα πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ. κς'. Κυλίνδρου δοθέντος τετμημένου ἐλλείψει κῶνον συστήσασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τεμνόμενον καὶ ποιοῦντα ὁμοίαν ἔλλειψιν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει. ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, ἐν ᾧ διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ΕΔ, ἣτις ἐκβλήθεισα συμπίπτει τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΔΖ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΗ συμπίπτουσα τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Η, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΖΔΘ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΘΗ παραλληλογράμμου ἡ ΖΗ πλευρὰ τῇ ΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΘΓ τῆς ΒΚ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΒΚ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων.

ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παραβάλλωμεν παρὰ τὴν ΒΚ ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΚΖ, ἐλάττων δὲ τῆς ΚΗ διὰ τὸ προδειχθέν. ἔστω τοίνυν ἡ ΚΛ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἦχθω τῇ ΗΓ ἢ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΚ, καὶ νενοήσθω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Μ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον δηλονότι τὸ ΒΚΜ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν καὶ τὸν κῶνον τετμημένον τῷ ἐπιπέδῳ, ὅφ' οὗ γέγονεν ἡ ΕΔ διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἥς διάμετρος ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὴν ΒΚ παραβέβληται ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνῳ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΒ, ΚΓ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, ὥς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΑΚ. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΑΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου.

82 καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου. καὶ ὥς ἄρα ἡ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν συζυγὴν διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὴν συζυγὴν διάμετρον. καὶ εἰσιν αἱ δευτέραι διάμετροι πρὸς ἴσας γωνίας ταῖς διαμέτροις· ἀμφοτέραι γὰρ παράλληλοί εἰσι ταῖς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΗ τῇ ΖΟ καὶ τῇ ΑΠ. ἡ ἄρα τοῦ κώνου ἔλλειψις ὁμοία ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει, καὶ γέγονεν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ συνέστη ὁ κῶνος ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἅπερ ἦν τὰ ἐπιταχθέντα. κζ'. Τὸν δοθέντα κύλινδρον ἢ κῶνον σκαληνὸν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις μὴ παραλλήλως μὲν κειμένοις, ποιοῦσι δὲ ὁμοίας ἐλλείψεις. ἔστω πρῶτον ὁ δοθεὶς κύλινδρος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ὃν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὑποκείσθω ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀξεῖα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ πλευρὰν ἡ ΓΔ· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ πασῶν τῶν ταῖς ΑΔ, ΓΒ παραλλήλοις ἐμπίπτουσῶν.

84 εἰλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Δ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΓ τῇ ΖΓ. ἐὰν οὖν κατὰ τὸν παραδεδομένον τρόπον ἀγάγωμεν διὰ τῶν ΓΕ, ΓΖ ἐπίπεδα, τεμεῖ τὸν κύλινδρον. τεμνέτω καὶ ποιεῖτω τὰς ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις. λέγω δὴ, ὅτι ὁμοιαί εἰσιν. ἐπεὶ γάρ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑαυτῇ συζυγοῦς διαμέτρου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΕΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγὴν διάμετρον, οὕτω καὶ ἡ ΖΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῇ συζυγὴν διάμετρον. ἀλλὰ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνονται ἐν ἑκατέρᾳ αἱ διάμετροι, ὥς ἐδείχθη πολλάκις· ὁμοίαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις. κὰν ἑτέρας δὲ ἀπολάβῃς ἴσας εὐθείας παρ' ἑκάτερα τοῦ Δ, συστήσονται πάλιν ἕτεραι δύο ἐλλείψεις ὁμοίαι ἀλλήλαις. ἐπισημαντέον δέ, ὅτι ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἀνάγκη τὰς ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίας καὶ ἴσας εἶναι διὰ τὸν λόγον εἶναι τῶν διαμέτρων τὸν αὐτὸν πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν ΑΓ.

86 Ἔστω δὲ νῦν ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς ὃν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ μείζων, καὶ περιγεγράφθω κύκλος, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ δηλονότι τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ τῆς ΔΑ περιφερείας δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ περιφερείας τὸ Ζ, καὶ ἦχθω παράλληλος τῇ

ΔΑ ή ΖΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ μὲν ΖΑ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ ΗΑ κατὰ τὸ Κ· ὥς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, ὥς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΖ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΘΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ. ἐὰν οὖν διαγάγωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ μὲν ΑΚ τὴν ΑΜ, τῇ δὲ ΑΘ τὴν ΑΝ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθέντα ἐπίπεδα τέμνῃ τὸν κῶνον, ὁμοίας ἐλλείψεις ποιήσει. ἐπεὶ γάρ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ, ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΜ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἐαυτῇ διαμέτρου, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἐαυτῇ διαμέτρου, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΜ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ΑΝ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγὴν διάμετρον.

⁸⁸ αἱ ἄρα ΑΜ, ΑΝ ὁμοίων ἐλλείψεων εἰσι διάμετροι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶν ἐτέρας δὲ τῇ ΖΗ παραλλήλους ἀγάγωμεν, ὥς τὴν ΞΟ, καὶ ἀπὸ τῶν Ξ καὶ Ο ἐπὶ τὸ Α ἐπιζεύξαντες ἐκβάλωμεν ἐπὶ τὴν ΒΘ, καὶ ταῖς ἐκβληθείσαις παραλλήλους ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, συστήσονται πάλιν ἕτεροι δύο ἐλλείψεις ὁμοίαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἀπειρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κη'. Τὸν δοθέντα κύλινδρον σκαληνὸν ἢ κῶνον δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις καὶ ποιεῖν ἐλλείψεις ὁμοίας. ἔστω πρῶτον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου δεῖξαι, καὶ κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῇ πρότερον, καὶ τῇ ΑΔ ἴση ἔστω ἡ ΔΗ· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ τοίνυν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΒ ἀγομένη εὐθεῖα μείζων ἐστὶν ἐκατέρας τῶν ΑΓ, ΓΗ καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ μεταξὺ τῶν Η, Α σημείων πιπτουσῶν, δηλον, ὥς, ἐὰν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀγάγωμεν δύο εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις, ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἀγομένη ὑπερπεσεῖται τὸ Η. ἤχθωσαν οὖν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν αἱ ΑΘ, ΓΚ ἴσαι οὔσαι ἀλλήλαις, δι' ὧν ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσται, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἐαυτῇ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς.

⁹⁰ διαμέτρου. αἱ ἄρα ΚΓ, ΑΘ διάμετροι εἰσιν ὁμοίων ἐλλείψεων. Κείσθω πάλιν ἡ καταγραφὴ τοῦ κώνου, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΒ ἐπὶ θάτερα δέον ἔστω ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἀγαγεῖν ἐπίπεδα ποιοῦντα ὁμοίας ἐλλείψεις. διήχθω τις εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ ἢ ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΠ, ΑΡ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Σ, Τ σημεία· ὥς ἄρα ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΠ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΡ. καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΤ, ΤΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΓ. ἐὰν ἄρα ταῖς ΣΑ, ΑΤ παραλλήλους εὐθείας ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, ὥς τὰς ΒΥ, ΓΦ, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσονται διὰ τὰ πολλάκις εἰρημένα αἱ ΒΥ, ΓΦ εὐθεῖαι ὁμοίων ἐλλείψεων διάμετροι. Καὶ φανερόν, ὅτι τῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγία γίνεται τις ὁμοία ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγία, ἀντιπεπονηθείας μέντοι τὰς διαμέτρους ἔχουσα ταῖς διαμέτροις.

⁹² ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καταγραφῆς κατασκευάσωμεν, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἢ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἢ τῆς ΓΚ, γενήσεται, ὥς τὸ ἀπὸ ἐκατέρας τῶν ΕΓ, ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστιν ὥς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους ἡγμένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ἐκατέρας τῶν ΑΘ, ΓΚ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων ἡγμένων ὁμοίων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὥς ἄρα τῆς ἐτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς

έτέρας συζυγίας ἢ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν πάλιν κατασκευάσωμεν, ὡς τὴν ΗΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως τὴν ΑΠ πρὸς τὴν ΠΣ, ἔσται, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΣΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίων δύο ἐλλείψεων ἦτοι τῆς ΑΝ ἢ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἡγμένων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου.

94 ὡς ἄρα τῆς ἐτέρας συζυγίας ἢ διαμέτρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἐτέρας συζυγίας ἢ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. Καὶ γέγονε φανερόν ἐκ τούτων, ὅτι ἐν παντὶ μὲν κυλίνδρῳ καὶ κώνῳ συνίστανται δύο συζυγαὶ ἐλλείψεων ὁμοίων μὲν ἀλλήλαις, ἀντιπεπονηθείας δὲ τὰς διαμέτρους ἔχουσῶν, καὶ ὅτι παρὰ τὰς τέσσαρας ταύτας ἄλλη ὁμοία οὐ συνίσταται πλὴν τῶν παραλλήλων αὐταῖς· αἱ γὰρ αἱ παράλληλοι τομαὶ ὁμοίας ποιοῦσιν ἐλλείψεις, ἐὰν ποιῶσι· καὶ ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ κυλίνδρου ἡ διὰ τῆς ΓΗ ἀγωγή τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία τέ ἐστι καὶ κύκλον ποιεῖ τὴν τομὴν, ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν διὰ τοῦ Α τοῦ κύκλου ἐφάπτηταί τις ὡς ἡ ΑΧ, διὰ τὸ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΧ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΧ, ΧΓ ἴσον ἢ διὰ τῶν τῇ ΑΧ παραλλήλων εὐθειῶν ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγωγή τῶν ἐπιπέδων ποιήσει κύκλους· ὑπεναντία γὰρ ἐστι καὶ αὐτὴ, ὡς τῷ προσέχοντι γίνεται καταφανές· καὶ ὅτι τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει ἐν κυλίνδρῳ σκαληνῷ καὶ κώνῳ τρεῖς ὁμοίας ἄλλας ἔστιν εὐρεῖν, μίαν μὲν αὐτῇ τῇ δοθείσῃ σύζυγον, δύο δὲ ἑαυταῖς μὲν συζύγους, ταῖς δὲ λοιπαῖς ὁμοίας κατὰ ἀντιπεπόνηθσιν τῶν διαμέτρων· ὥστε καὶ τῇ δοθείσῃ δυνατόν τρεῖς ὁμοίας πορίσασθαι· δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν μῆτε ὑπεναντίαν εἶναι· ταύτη γὰρ οὐδεμία συνίσταται ὁμοία πλὴν τῶν παραλλήλων· μῆτε τὴν διάμετρον αὐτῆς παράλληλον εἶναι τῇ διὰ τῶν Ε καὶ Α ἀγομένη εὐθείᾳ ἐν τῇ καταγραφῇ τοῦ κώνου· μονήρης γὰρ καὶ αὕτη διὰ τὸ τὴν διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλον ἀγομένην ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου πίπτειν ἐκτὸς καὶ μὴ εἶναι τῷ Ε σημεῖον σύζυγον ὡς τῷ Ξ τὸ Ο ἢ τῷ Ζ τὸ Η.

96 Περὶ μὲν οὖν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος ἀπὸ πλειόνων ἀρκείτω καὶ τὰ εἰρημένα, ὥρα δ' ἂν εἴη μετελθεῖν, ἐφ' ὅπερ ἀρτίως ἐπηγγειλάμην· ἀφορμὴ δέ μοι τῆς μελλούσης σκέψεως οὐκ ἄκαιρος, ἔστι δὲ ἡδε. Πείθων ὁ γεωμέτρης ἐν συγγράμματι ἑαυτοῦ τὰς παραλλήλους ἐξηγούμενος, οἷς μὲν Εὐκλείδης εἶπεν, οὐκ ἠρκέσθη, σοφώτερον δὲ δι' ὑποδείγματος αὐτὰς ἐσαφηνίσεν· φησὶ γὰρ τὰς παραλλήλους εὐθείας εἶναι τοιοῦτον, οἷας ἐν τοῖς τοίχοις ἢ τῷ ἐδάφει τὰς τῶν κιόνων σκιάς ὁρῶμεν ἀποτελουμένας ἦτοι λαμπάδος τινὸς ἀπ' ἀντικρὺ καιομένης ἢ λύχνου. τούτων δὲ εἰ καὶ πᾶσι πλεῖστον παρέχει κατάγελων, ἀλλὰ ἡμῖν οὐ καταγέλαστον αἰδοῖ τοῦ γεγραφότος φίλος γὰρ ἀνὴρ. ἀλλὰ σκεπτέον, ὅπως τὸ τοιοῦτον ἔχει μαθηματικῶς οἰκεία δὲ ἢ σκέψις τοῖς ἐνταῦθα προτεθεωρημένοις· δι' αὐτῶν γὰρ ἀποδειχθήσεται τὸ προκείμενον. κθ'.

98 (1n) Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη πᾶσαι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται. ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἤχθωσαν αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κατὰ τὰ Δ, Ε σημεία. λέγω, ὅτι τὰ Ε, Δ τῶν ἐπαφῶν σημεία ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί. κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κύκλον, ὥστε κύλινδρον ὑποστῆναι, οὗ βάσεις οἱ Β, Ζ κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΒΖ εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ,

καὶ τῇ ΖΓ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὕσα, καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ διεκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμὰς, ἐν δὲ τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΜΓ, ΝΞΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι.

100 κατήχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς ΛΔΜΡ γραμμῆς ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ δέδεικται ἡ τοιαύτη τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψις οὕσα, ἀλλ' οὐ κύκλος, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ, ὥς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, ὥς δέδεικται τῷ Ἀπολλωνίῳ ἐν τῷ α' τῶν Κωνικῶν. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὥς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΝΗ τῇ ΘΜ παράλληλός ἐστιν, ὥς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Π, Ο σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐν τῷ ΗΘ ἐπιπέδῳ ἐστὶ καὶ παράλληλος ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ, ΘΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΔΟ, ΕΠ τῇ ΓΚ παράλληλός ἐστιν, αἱ ΔΟ, ΕΠ ἄρα καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ἐὰν δὴ διὰ τῶν ΔΟ, ΕΠ εὐθειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τεμεῖ τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν ΟΠ γραμμὴν, καὶ ἔσται τὸ ΠΕΔΟ ἐπίπεδον παράλληλον ἐπιπέδῳ τινὶ τῶν διὰ τῆς ΒΑ ἀγομένων καὶ τεμνόντων τὸ ΗΘ· τὸ ἄρα ΠΕΔΟ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσει ἐν τῷ κυλίνδρῳ παραλληλόγραμμον, ὥς ἐδείχθη θεωρήματι τρίτῳ. καὶ ἐστὶν ἡ ΕΔ γραμμὴ κοινὴ τομὴ τοῦ ΠΕΔΟ ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ ΕΔ ἄρα εὐθεῖα ἐστὶ καὶ πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου. ὁμοίως δὴ δείκνυται καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων, καὶ ὅτι πάλιν ἐπὶ θάτερα μέρη αἱ ἀφαὶ κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ γίνονται καὶ εἰσιν ἐπὶ μιᾷς εὐθείας παραλλήλου τῇ ΕΔ.

102 πᾶσαι ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι καθ' ἐνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἀφὰς ποιοῦνται· ὃ προέκειτο δεῖξαι. λ'. Τούτου δειχθέντος ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ αὐτοῦ βάσιν ἦχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Κ μὴ ὄν ἐν τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓΔ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα. τὸ δὴ διὰ τῶν ΚΛ, ΕΖ εὐθειῶν ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον τεμεῖ καὶ τὸ ΛΜΝΞ ἐπίπεδον καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινήν τομὴν τὴν ΛΜ εὐθεῖαν παράλληλον οὕσαν τῇ ΕΖ· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ διὰ τῶν ΚΝ, ΗΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ποιήσει παράλληλον τὴν ΝΞ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΛΚΝ τρίγωνον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓΔ, ΛΝΞΜ, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ ΝΛ τῇ ΗΕ· διὰ τὰ αὐτά δὲ καὶ ἡ ΞΜ τῇ ΘΖ παράλληλος. ὥς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ, ὥς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΛΜ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐναλλάξ· καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ.

104 εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα καὶ ἡ ΜΞ εὐθεῖα τῇ ΛΝ. Ἐὰν δὴ τὸ μὲν Κ σημεῖον ὑποθώμεθα εἶναι τὸ φωτίζον, τὸ δὲ ΑΓ παραλληλόγραμμον τὸ ἐπιπροσθοῦν ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καθ' αὐτὸ εἴτε ἐν κυλίνδρῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Κ φωτίζοντος ἀκτῖνας ἐκβαλλομένας ὀρίζεσθαι τῇ τε ΜΛ καὶ τῇ ΝΞ εὐθείᾳ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν ΜΛ, ΞΝ παραλλήλων ἐσκιασμένον ἔσται. ὅτι μὲν οὖν παράλληλος καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΞΜ, δέδεικται· οὐ μὴν καὶ οὕτω φανοῦνται· τῶν γὰρ ΛΜ, ΝΞ διαστάσεων ἡ ἐγγύτερον τῆς ὀψεως μείζων φαίνεται· ταῦτα δὲ παρειλήφαμεν ἐκ τῶν Ὀπτικῶν. Ἐπειδὴ δὲ παρακείμενόν ἐστὶ καὶ περὶ τοῦ κώνου θεωρῆσαι τὸ ὅμοιον διὰ τὸ κοινὸν εἶναι τὴν ἔλλειψιν τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ἔσκεπται δὲ περὶ τοῦ κυλίνδρου, φέρε καὶ περὶ τοῦ κώνου σκεψώμεθα. λα'. Ἐὰν τριγώνου ληφθῇ σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ τις ἐτέρα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν διηγμένην οὕτως, ὥστε ἔχειν, ὥς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, οὕτως τῆς ἐντὸς ἀπειλημένης τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὸ ἔλασσον καὶ πρὸς τῷ

ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενον, ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀνάλογον ἔσται τετμημένη ὑπὸ τῆς ἡγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας.

106

κἂν πᾶσαι αἱ οὕτως ἡγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ τέμνουσα αὐτὰς εὐθεῖα ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγομένη διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐλεύσεται. τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον ἢ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῆτω ἢ ΑΗΘ τέμνουσα τὴν ΖΔ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω τις ἐτέρα εὐθεῖα ἢ ΔΚΛ. λέγω, ὅτι, ὡς ἢ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἢ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ἤχθωσαν διὰ μὲν τῶν Ε, Κ σημείων τῇ ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΝ, ΚΞ, διὰ δὲ τῶν Ε, Ζ τῇ ΜΔ παράλληλοι αἱ ΕΟ, ΖΠΡ. ἐπεὶ τοῦ ΑΜΚ τριγώνου παρὰ τὴν ΑΜ πλευράν ἐστιν ἢ ΕΝ, ὡς ἄρα ἢ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἢ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΚ, τουτέστιν οὕτως ἢ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ. πάλιν ἐπεὶ ἢ ΖΑ τῇ ΚΞ παράλληλός ἐστιν, ἔστιν ἄρα, ὡς ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἢ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν, ὡς μὲν ἢ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἢ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ, ὡς δὲ ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἢ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ, καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένη ἀναλογίᾳ, ὡς ἢ ΕΝ πρὸς τὴν ΚΞ, οὕτως ἢ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΡ, τουτέστιν ἢ ΕΟ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ λόγῳ, ὁ δὲ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΕ, καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς ΔΚ λόγος ἄρα σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

108

ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ δὲ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΝ πρὸς τὴν ΕΚ, ὁ αὐτός ἐδείχθη τῷ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· ὁ ἄρα τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. πάλιν ἐπεὶ ὁ τῆς ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ, ὁ δὲ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΟΕ λόγου, τουτέστι τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ὁ τῆς ΜΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΖ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συγκείμενος· ὡς ἄρα ἢ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἢ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλαι διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δ· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῆς ΑΘ διαιρεθήσονται τὸν εἰρημένον τρόπον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Κἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Δ διαχθεῖσαι ἀνάλογον ᾧσι τετμημέναι, ἴν' ἦ, ὡς μὲν ἢ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἢ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, ὡς δὲ ἢ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἢ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ, ἢ τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ἀπειλημμένας εὐθείας, οἷον τὰς ΖΕ, ΜΚ, ἀνάλογον τέμνουσα εὐθεῖα διαγομένη διὰ τῆς κορυφῆς ἥξει τοῦ τριγώνου. εἰ γὰρ δυνατόν, ἡκέτω ἐκτὸς κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ διήχθω ἢ ΑΗΨ εὐθεῖα.

110

ἐπεὶ οὖν κατὰ τὸ προδειχθὲν εὐθεῖα τις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἢ ΑΨ ἀγομένη τέμνει τὴν ΖΔ εὐθεῖαν, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τὴν ΜΔ ἄρα ἀνάλογον τέμνει. ὡς ἄρα ἢ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἢ ΜΨ πρὸς τὴν ΨΚ· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γάρ, ὡς ἢ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἢ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ἢ ἄρα ΛΗ ἐκβαλλομένη οὐχ ἥξει δι' ἄλλου σημείου πλὴν τοῦ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λβ'. Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κωνικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφοτέρα τὰ μέρη πᾶσαι καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται. ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Β σημεῖον, ἄξων δὲ ἢ ΑΒ εὐθεῖα, σημείου δέ τινος τοῦ Γ ληφθέντος ἐκτὸς τοῦ κώνου ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Γ αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι τὰ Ε, Δ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἐπὶ μιᾷς εὐθείας ἐστί. κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κέντρον κύκλον, ὥστε κῶνον ὑποστήναι, οὗ βάσις μὲν ὁ Ζ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΖΒ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΒΗΘ, καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἢ ΓΚ ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὔσα, καὶ διὰ

τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ ἤχθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κῶνον καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΒΗΘ τριγώνου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΓ, ΝΓ εὐθείας διάμετροι ἄρα τῶν ΛΔΜ, ΝΕΞ τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι.

112 ἤχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμένως καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῆς ΛΔΜ γραμμῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ, ὥς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ· καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὥς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Ο καὶ Π σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἤξει διὰ τῆς κορυφῆς διὰ τὸ πρὸ τούτου. διήχθω τοίνυν ἡ ΟΠΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΣ, ΔΡ τῇ ΓΚ ἐστὶ παράλληλος, αἱ ἄρα ΔΡ, ΕΣ παράλληλοί τε εἰσιν ἀλλήλαις καὶ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. τὸ οὖν διὰ τῆς ΒΠΟ καὶ τῶν ΕΣ, ΔΡ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τὴν τομὴν ποιήσει τρίγωνον ἐν τῇ τοῦ κῶνου ἐπιφανείᾳ· τὰ ἄρα Ε καὶ Δ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὄντα τοῦ κῶνου ἐπὶ πλευρᾷς ἐστὶ τριγώνου τοῦ τέμνοντος τὸ ΒΗΘ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΠΟ εὐθεῖαν. ὁμοίως δὲ δείκνυται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων πασῶν καὶ τῶν κατὰ τὸ Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένων τὸ αὐτὸ συμβαῖνον. πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καθ' ἐνὸς τριγώνου πλευρῶν πίπτουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

114 λγ'. Τούτου δὲ δειχθέντος ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παρὰ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Θ μὴ ὄν ἐν τῷ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΚΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τεμεῖ καὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΚΝ εὐθεῖαν παράλληλον οὔσαν τῇ ΕΔ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ διὰ τῶν ΖΗ, ΛΘ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ποιήσει παράλληλον τῇ ΖΗ τὴν ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΚΘΛ ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΚΛΜΝ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΚΛ, ΔΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΗΕ παράλληλός ἐστιν· ἐκβληθεῖσαι ἄρα αἱ ΚΛ, ΜΝ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΚΞ, ΞΝ δυσι ταῖς ΔΑ, ΑΕ παράλληλοί εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ξ γωνία τῇ πρὸς τῷ Α. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΞΚ, ΚΝ δυσι ταῖς ΑΔ, ΔΕ παράλληλοί εἰσιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚ, ΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ ἴση. τὰ ἄρα ΞΚΝ, ΑΒΓ τρίγωνα ὁμοιά ἐστὶν ἀλλήλοις. Ἐὰν οὖν πάλιν τὸ μὲν Θ σημεῖον ὑποθώμεθα τὸ φωτίζον εἶναι, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἐπιπροσθοῦν ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καθ' αὐτὸ ὄν τὸ τρίγωνον εἴτε ἐν κῶνῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Θ φερομένας ἀκτῖνας ἐκπιπτούσας διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ποιεῖν τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῆς σκιάς ὅμοιον ὄν τῷ ΑΒΓ.

116 Ταῦτα εἰ καὶ ὀπτικῆς θεωρίας ἔχεται καὶ δοκεῖ διὰ τοῦτο τῆς παρούσης πραγματείας ἀλλότρια εἶναι, ἀλλ' οὖν ἐκεῖνό γε φανερόν γε γέγονεν, ὅτι ἄνευ τῶν περὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς τοῦ κῶνου τομῆς ἐνταῦθα δειχθέντων, τῆς ἐλλείψεως λέγω καὶ τῶν ἀπτομένων αὐτῆς εὐθειῶν, ἀδύνατον ἦν καταστήσαι τὸ τοιοῦτον πρόβλημα· ὥστε οὐκ ἀλόγως, ἀλλὰ διὰ τὴν χρεῖαν ἐπεισηλθεν ὁ περὶ τούτων λόγος.