

eul_wid: sam-ab

Σερήνος ὁ Ἀντινόου · Serenus of Antinoöpolis

On the Section of a Cone

Περὶ Κώνου Τομῆς

Period: Ὀψιμαρχία Late Antique
Dialect: Κοινή τεχνική Technical Koine
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

120 (1t) ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ. Τῆς ἐν τοῖς κώνοις τομῆς, ἄριστε Κύρε, ὅταν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν γίνηται, τρίγωνα μὲν ὑφιστάσης ἐν τοῖς κώνοις, ποικίλην δὲ καὶ γλαφυράν θεωρίαν ἐχούσης καὶ μηδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν, ὅσα γε ἐμὲ εἰδέναι, πραγματευθείσης ἔδοξέ μοι μὴ καλῶς ἔχειν ἀνεξέργαστον ἀφεῖναι τὸν τόπον τοῦτον, εἰπεῖν δὲ περὶ αὐτῶν, ὅσα γε εἰς ἐμὴν ἀφίκται κατάληψιν. σχεδὸν μὲν οὖν τά γε πλείω καὶ βαθυτέρας δοκοῦντα δεῖσθαι γεωμετρίας ἡγοῦμαι λόγου τετυχηκέναι παρ' ἡμῶν, οὐκ ἂν δὲ θαυμάσαιμι, εἰ καὶ τι τῶν ὀφειλόντων λεχθῆναι παρείκων ὀφθεῖν ἅτε πρῶτος ἐγχειρήσας τῇ τούτων θεωρίᾳ· ὥστε εἰκὸς ἢ σὲ καθέντα εἰς τὴν αὐτὴν σκέψιν ἢ τῶν ὕστερον ἐντευξομένων τινὰ ὀρμώμενον ἐνθένδε τὸ παροφθὲν ἡμῖν προσθεῖναι. ἔστι δὲ ἃ καὶ ἐκόντες παραλελοίπαμεν ἢ διὰ τὸ σαφὲς ἢ διὰ τὸ ἄλλοις δεδειχθαι· αὐτίκα τὸ μὲν ἐν παντὶ κώνῳ τρίγωνον εἶναι τομὴν, εἰ διὰ τῆς κορυφῆς τμηθεῖ, διὰ τὸ δεδειχθαι ἄλλοις ὡς οὕτως ἔχον ἡμεῖς παραλιμπάνομεν, ἵνα μηδὲν ἀλλότριον τοῖς ὑφ' ἡμῶν εὐρεθεῖσι συντεταγμένον ᾦ. τὰ δ' ἐπιπολαιότερα καὶ τοῖς πολλοῖς εὐληπτα γραφῆς οὐκ ἠξιώσαμεν, ἵνα μὴ τῶν ἐντυγχανόντων τὴν προσοχὴν τῆς διανοίας ἐκλύσωμεν.

122 ἰτέον δὴ ἐπὶ τὴν τῶν προκειμένων ἀπόδειξιν. α'. Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ πρὸς τὴν τρίτην πρὸς τὴν τετάρτην, τὸ ὑπὸ πρώτης καὶ τετάρτης μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δευτέρας καὶ τρίτης. εὐθεῖα γὰρ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχέτω ἢ πρὸς τὴν Γ πρὸς τὴν ΔΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Β, Γ. ἐπεὶ ἡ Α πρὸς Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ΔΕ, ἔστω, ὡς ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς ΔΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ Α, ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ. μείζον δὲ τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ τοῦ ὑπὸ Α, ΔΖ· καὶ τοῦ ὑπὸ Β, Γ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ. β'. Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν γωνιῶν ἐπὶ μὴν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ καθέτῳ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν τμηθεῖσαν πλευρὰν ὑπὸ τῆς ἀχθείσης. τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν Α γωνίαν ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἦχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ.

124 λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἦχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΔΓ τῆς ΔΕ. ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἢ πρὸς ΓΒ πρὸς ΒΑ. γ'. Ἐὰν κώνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν γινομένων ἐν ταῖς τομαῖς τριγώνων τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. ἔστω κώνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον

κύκλος, τοῦ δὲ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς τμηθέντος ἐπιπέδοις γεγενῆσθω τὰ ὑπὸ τῆς τομῆς γενόμενα τρίγωνα· ὅτι γὰρ τρίγωνα ποιοῦσιν αἱ τοιαῦται τομαί, ἐν ἄλλοις δείκνυται. γεγενῆσθω δὴ τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΓΔ, ΕΖ βάσεις. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ βάσεις ἴσαι ἀλλήλαις, ἴσαι δὲ καὶ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα τῶ τριγώνῳ ἴσον. δ'. Ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις τὰ ὅμοια τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῶ ΑΕΖ ὅμοιον.

126 λέγω, ὅτι καὶ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ ἄρα. καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ ΓΑ, ΕΑ· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων τρίγωνα ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις ἴσα ἐστίν· ἴσα ἄρα τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα. ε'. Ἐὰν κώνος ὀρθὸς ἐπιπέδοις τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς τῶ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ἢ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τῶν γινομένων ἐν τῶ κώνῳ τριγώνων μέγιστον ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἔστω κώνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ. τμηθέντος δὲ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς γεγενῆσθω τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΕΖ, καὶ κείσθω παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, ὁ δὲ ἄξων, τουτέστιν ἡ ΑΒ εὐθεῖα, μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΒΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ τριγώνου. ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἦχθω ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· ἡ ΑΗ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ· ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΕ, ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΕΗ.

128 ἀφηρήσθω τοίνυν τῇ ΕΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΕΗ τῇ ΒΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΗ, δύο ἄρα δυσὶν ἴσαι. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΒΘ ἴση· ὀρθή γὰρ ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΕΒ τῇ ΘΗ ἴση ἐστί, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ. ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ὡς προεδείχθη· ὀρθογώνιον γὰρ τὸ ΑΒΗ. καὶ ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ διὰ τὸ πρῶτον λημμάτιον. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΗΑ ἡμισὺ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΑΕΖ μείζον ἐστὶ. καὶ πάντων ἄρα τῶν ἴσας βάσεις ἐχόντων τῇ ΕΖ καὶ διὰ τοῦτο ἴσων ὄντων μείζον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος· μέγιστον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον. ζ'. Ἔστι τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως καθολικώτερον δεῖξαι, ὅτι καὶ ἀπλῶς τῶν τριγώνων τὸ μείζονα βάσιν ἔχον μείζον ἐστὶ. τμηθέντος γὰρ τοῦ κώνου γενέσθω τὰ ΑΓΔ, ΑΖΔ τρίγωνα, ὥστε τὰς ΓΔ, ΖΔ βάσεις συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ πέρας, καὶ ἔστω μείζων τῆς ΖΔ ἡ ΓΔ εἴτε διὰ τοῦ κέντρου οὔσα εἴτε μή.

130 λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μείζον ἐστίν. ἦχθωσαν ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΓΔ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΖΔ μείζων ἐστί, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΗ μείζων· τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΗ μείζον ἐστὶ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἔλαττόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα πρὸς ΘΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. γενέσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· κάθετος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὡς δειχθήσεται. καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ οὐκ ἐλάττων, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ ἢ ἴση. ἔστω πρότερον μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΘΔ. τετμήσθω ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστὶ τῶ ἀπὸ ΑΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστὶ τῶ ἀπὸ ΑΚ, καὶ ἐστὶ μείζον τὸ ἀπὸ ΑΚ τοῦ ἀπὸ ΑΘ, μείζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ· ἡ ΘΒ ἄρα μείζων τῆς ΗΚ. καὶ εἰσιν αἱ ΒΘ, ΗΚ ὕψη τῶν ΑΒΔ, ΑΗΔ τριγώνων· μείζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΔ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια· τὸ ἄρα ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μείζον ἐστίν.

132 ἀλλὰ τῷ ΑΖΔ ἴσον ἕκαστον, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ΖΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ παντὸς τριγώνου μείζον ἐστίν, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ· ὁμοίως ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ. ἡ ἄρα ΒΘ μείζων ἐστὶ τῆς ΚΗ, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τοῦ ΑΗΔ τριγώνου μείζων. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἄλλας βάσεις διαγάγωμεν· ὥστε τὸ οὕτως ἔχον μείζονα βάσιν τρίγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ ἔχοντος ἐλάσσονα. Ζ'. Ὅτι δὲ ἡ ΗΚ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΔ, δείκνυται οὕτως. τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΗΔ διηρήσθω ἡ βάσις ὑπὸ τῆς ΗΚ, ὥστε εἶναι, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως τὴν ΑΚ πρὸς ΚΔ. λέγω, ὅτι κάθετός ἐστὶν ἡ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ ΗΛ κάθετος ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ΛΔ. ἦν δέ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ· ἔσται ἄρα, ὡς ἡ ΑΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ ΗΛ. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι οὐδὲ ἄλλη πλὴν τῆς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΚ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΔ. η'.

134 (1n) Ἐὰν ἐν κώνῳ ὀρθῶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μέγιστον ἢ πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων, ὁ ἄξων τοῦ κώνου οὐκ ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. ἔστω κώνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ μέγιστον ὃν πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων, καὶ ἦχθω ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ὀρθή ἐστίν, ἡ ἄρα τὰ Α, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ. ἐὰν ἄρα ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ Α ὑπὸ τῇ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ ἐναρμοσθῇ, μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β καὶ Ε σημείων. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τοῦ Ζ παρά τὴν ΓΔ ἦχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ· γενήσεται δὴ, ὡς ἐν τῷ ε' θεωρήματι ἐδείχθη, τὰ ΑΒΖ, ΗΒΖ τρίγωνα ὅμοια, καὶ ἴσαι αἱ ὁμόλογοι, καὶ ὡς ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΗΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ τὸ ΑΓΔ μέγιστον εἶναι.

136 οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. Θ'. Κώνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων οὐκ ἐστὶν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον λόγον ἔχον δεδομένον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον λόγον ἐλάττονος εἶναι πρὸς μείζον. ἔστω κορυφή μὲν τοῦ κώνου τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΒ ἐστὶ. δεῖ δὴ τὸν κώνον τεμεῖν τριγώνῳ, ὃ λόγον ἔξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τὸν ἐπιταχθέντα· ἐπιτετάχθω δὲ ὁ τῆς Κ ἐλάττονος πρὸς μείζονα τὴν Α λόγος. ἐπεὶ τὸ ΑΒΔ ὀρθογώνιον ἐστὶ, γεγράφθω περὶ αὐτὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἦχθω ἡ ΒΕ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς Α, οὕτως ἔστω ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος ἦχθω τῇ ΕΔ ἡ ΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Η τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ Κ πρὸς Α, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, οὕτως τὰ ἡμίση τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΔ, ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς Α, οὕτως τὸ ΑΔΗ πρὸς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΔ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν.

138 ἐὰν οὖν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐναρμόσωμεν διπλὴν τῆς ΗΔ καὶ διὰ τῆς ἐναρμοσθείσης καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τὸ ἐπίπεδον ἐκβάλωμεν, ποιήσει τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ διπλάσιον τοῦ ΑΗΔ. σχήσει ἄρα τὸ συνιστάμενον τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον, ὃν τὸ ΑΗΔ ἔχει πρὸς ΑΒΔ, τουτέστιν ὃν ἡ Κ πρὸς Α. ι'. Ἐὰν κώνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, τῶν δὲ γενομένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν ὅτιοῦν ἴσον ἢ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὁ τοῦ κώνου ἄξων ἐλάττων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. τμηθέντος γὰρ τοῦ κώνου γενέσθω τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τὸ

ΑΕΖ ἴσον ὃν τῷ ΑΓΔ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ καὶ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΗ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΒ ὁ ἄξων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΒΔ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΕΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ μιᾶ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴσην ἔχει ὀρθή γὰρ ἑκατέρα· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΕΒΗ, ΑΗΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα.

140 ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΕΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα ἄξων οὔσα τοῦ κῶνου ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ὃ προέκειτο δεῖξαι. ἐπεὶ τοίνυν ἐδείχθη ἐπὶ παραλλήλων τῶν ΓΔ, ΕΖ, φανερόν, ὡς, κἂν μὴ παράλληλοι ᾖσιν, οὐδὲν διοίσει· ἐδείχθη γάρ, ὡς τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις τρίγωνα ἴσα ἐστί. ια'. Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι, ἐὰν διαχθῇ πάλιν ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον διὰ τῆς κορυφῆς καὶ ποιῶν ἐν τῇ βάσει εὐθεῖαν τῷ μεγέθει μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν ἴσων τριγώνων, ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον μείζον ἔσται ἑκατέρου τῶν ἴσων τριγώνων. ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς ὁμοίας καταγραφῆς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν ΕΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΚΜ μεγέθει μεταξὺ τῶν ΓΔ, ΕΖ καὶ ἑκατέρᾳ αὐτῶν κείσθω παράλληλος, καὶ διήχθω τὸ ἐπίπεδον. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΚΜ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν ΑΓΔ, ΑΕΖ. τετμήσθω γὰρ πάλιν δίχα ἡ ΚΜ τῷ Λ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ τριγώνῳ, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΕΗ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΕΖ ἴση ἐστίν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου συναπεδείχθη.

142 μείζον δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΕΗ· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα μείζον ἐστὶν ἡ ΚΛ. κείσθω οὖν τῇ ΚΛ ἴση ἡ ΒΝ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς προειρημένοις ἔσται τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΑΝΒ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιον· ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ΑΝ πρὸς ΝΒ. ἡ δὲ ΑΝ πρὸς ΝΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΒ· καὶ ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς ΚΜ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΚΜ, ΛΑ, τουτέστι τὸ ΑΓΔ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΚΜ· μείζον ἄρα τὸ ΑΚΜ τοῦ ΑΓΔ. τὸ αὐτὸ δὴ δεικνύται καὶ ἐπὶ πάντων, ὧν ἡ βάσις μεγέθει μεταξὺ ἐστὶ τῶν ΓΔ καὶ ΕΖ· οὐδὲν δὲ διοίσει, κἂν μὴ παράλληλοι ᾖσιν αἱ βάσεις, ὡς καὶ πρότερον ἐδείχθη. ιβ'. Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ. ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ἐπιπέδῳ ποιῶντι τρίγωνον ἐν τῷ κῶνῳ ἴσον τῷ ΑΓΔ.

144 ἤχθω τῇ ΓΔ ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἡ ΑΗ ὑποτείνουσα μὲν τὴν ὑπὸ ΑΒΖ γωνίαν, ἴση δὲ οὔσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· τοῦτο δὲ ῥᾶδιον ποιῆσαι· καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΓΔ ἤχθω ἡ ΘΗΚ· ἡ ΘΗΚ ἄρα κατὰ τὸ Η δίχα τέτμηται καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΒΖ. διεκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΘΚ, ΗΑ ἐπίπεδον ποιῶν τὸ ΑΘΚ τρίγωνον. λέγω, ὅτι τὸ ΑΘΚ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ. ἐπεξεύχθω ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχει ὀρθαὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ΘΗΒ, ΑΒΗ· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπά, ὅμοια ἄρα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ, ΗΑ· καὶ τὰ ἡμίσεα. τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ιγ'. Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν δὲ γενομένων ἐν τῷ κῶνῳ τριγώνων τινὸς ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση ἢ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τοῦτο μείζον ἔσται πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κῶνῳ τριγώνων.

ἐν γὰρ κώνῳ ὀρθῷ τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ ἔχον τὴν ΑΒ κάθετον ἴσην τῇ ΒΔ ἡμισείᾳ οὕσῃ τῆς ΓΔ βάσεως. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μείζον ἐστὶ πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων. εἰλήφθω γὰρ ἄλλο τυχὸν τρίγωνον ἀνόμοιον αὐτῷ τὸ ΑΕΖ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΗ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος ἦχθω ἡ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος ἦχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ ἀνόμοιον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τῷ ΑΕΖ, ἀνόμοιον ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ τῷ ΑΗΖ. καὶ ἐστὶν ὀρθογώνια, καὶ ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΖ ἄρα ἀνισοσκελές. καὶ τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἄνισον. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΖ· ἡ μὲν ἄρα ΑΔ εἰς ἴσα τέτμηται, ἡ δὲ ΑΖ εἰς ἄνισα. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἡ μὲν εἰς ἴσα διήρηται, ἡ δὲ εἰς ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων τμημάτων τοῦ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μείζον ἐστὶ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΘΔ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΚΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΘΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΘ, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΚΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΗΚ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΗΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΘ τῆς ΗΚ.

148 ὥς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ, οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚ, ΑΖ, καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ΑΗΖ· μείζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΖ, καὶ τὰ διπλάσια τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ. ὁμοίως δὴ δείκνυται, ὅτι πάντων τῶν ἀνομοίων μείζον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ιδ'. Τὸν δοθέντα κώνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον μείζον εἶναι πάντων τῶν ἀνομοίων αὐτῷ ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων. ἔστω ὁ δοθεὶς κώνος ὀρθός, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ ἐλάττων ὢν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κώνον, ὥς προστέτακται. ἦχθω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· ἡ ΑΒ ἄρα κάθετος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΒΔ. ἦχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ ᾧ μείζον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τούτου ἥμισυ ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ, καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος ἦχθω τῇ ΓΔ ἡ ΖΗΘ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΒΘ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ἀπὸ ΒΑ μείζον ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἀπὸ ΒΗ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΗ τοῦ ἀπὸ ΑΒ μείζον ἐστὶν ἐνὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΑΗ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ.

150 ἔστι δὲ καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΒ μείζον τὸ ἀπὸ ΒΘ· ἐκατέρου ἄρα τῶν ἀπὸ ΑΗ, ΗΘ τῷ αὐτῷ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΒΘ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ τῷ ἀπὸ ΗΘ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΘ. καὶ ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ ἴση· ἡ ἄρα ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΖΘ. ἐὰν ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΗΑ διεκβάλωμεν ἐπίπεδον, ἔσται τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ· γεγονέντω τὸ ΑΖΘ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ἐν κώνῳ τὸ ΑΖΘ, οὗ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετος ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως, τὸ ΑΖΘ ἄρα μείζον ἐστὶ πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων ἀνομοίων αὐτῷ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ιε'. Τὸν δοθέντα κώνον διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τεμεῖν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. ἔστω ὁ δοθεὶς κώνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, καὶ δέον ἔστω τὸν κώνον τεμεῖν διὰ τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. εἰ μὲν οὖν ὀρθός ἐστὶν ὁ κώνος, δῆλον, ὥς ἢ τε ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βάσει, καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βάσει· ὥστε τὸ ΑΓΔ τρίγωνον διὰ τῆς ΑΒ ὃν πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βάσει. ἀλλὰ δὴ σκαληνός ἔστω ὁ κώνος· ἡ ἄρα ΑΒ οὐκ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. πιπτέτω τοῖνον ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

152 λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΑΕ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ις'. Ἐὰν κώνος σκαληνός διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τὸ γενόμενον τρίγωνον ἔσται σκαληνόν, οὗ ἡ μὲν μείζων πλευρὰ μεγίστη ἔσται πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ἐλάττων

πλευρά ἐλαχίστη πασῶν τῶν ὁμοίως ἀγομένων εὐθειῶν, τῶν δὲ ἄλλων εὐθειῶν ἢ τῇ μεγίστῃ ἔγγιον τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ κῶνου τμηθέντος διὰ τοῦ ἄξωνος πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΕΔ κύκλῳ τὸ γενόμενον τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ, προσνευέτω δὲ ὁ ἄξων ἐπὶ τὸ Δ μέρος. ἐπεὶ οὖν σκαληνοῦ ὄντος τοῦ κῶνου οὐκ ἐστὶν ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΔΕ κύκλῳ, ἔστω πρὸς ὀρθὰς αὐτῷ ἡ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΓΒΔ ἐκβληθεῖσαν.

154 ἐπεὶ οὖν μείζων ἡ ΓΘ τῆς ΘΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΘΔ μείζων. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΘ, ΘΑ τῶν ἀπὸ ΘΔ, ΘΑ μείζονά ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ. μείζων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΑΔ. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΓ καὶ πασῶν ἀπλῶς μεγίστη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΔ ἐλαχίστη. ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΘ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ ἄρα μέγιστόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΘΑ μείζον ἐστὶν ἐκάστου τῶν ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΘΑ, ΖΘΑ, ΗΘΑ, ΔΘΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ ἐκάστου τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. καὶ ἡ ΑΓ ἄρα μείζων ἐστὶν ἐκάστης τῶν ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. ὁμοίως δείκνυται, ὅτι καὶ τῶν ἄλλων· μεγίστη ἄρα ἡ ΑΓ πασῶν τῶν, ὡς εἴρηται, ἀγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ κῶνῳ. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΑΔ ἐλαχίστη, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΑΕ τῆς ΑΖ μείζων, ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΑΗ, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΑΓ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

156 ιζ'. Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἀχθῇ, τὰ ἀπὸ τῶν πλευρῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως καὶ τῷ δις ἀπὸ τῆς ἡγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας. ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, οὗ δίχα τεμηθῇ ἡ βάσις κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δις ἀπὸ τῆς ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελές ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, φανερά ἡ δεῖξις διὰ τὸ ἐκατέραν τῶν πρὸς τῷ Δ γίνεσθαι ὀρθήν. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ κατήχθωσαν ἐπ' αὐτὴν κάθετοι αἱ ΒΕ, ΓΖ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΕΒΔ, ΓΖΔ ὀρθογώνια διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΖΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ καὶ τὸ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ μείζον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τῷ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ ἑλαττόν ἐστὶ τῷ αὐτῷ τῷ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δις ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

158 ιη'. Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ ἢ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης. κἂν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης, ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην. ἔστωσαν εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἐχέτω δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἢ περ ἢ Γ πρὸς τὴν Δ. λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα διπλάσιος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἐλάττονος διπλάσιου. ἔστι δὲ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου μείζονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος, τοῦ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγου ἐλάττονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. πάλιν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ περ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

160

λέγω, ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. ἐπεὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγου, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα ἡμισυς τοῦ τοῦ ἐλάττονος ἡμίσεος μείζων ἐστίν. ἔστι δὲ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγου μείζονος ὄντος ἡμισυς ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ ἐλάττονος ὄντος ἡμισυς ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὁ τῆς Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ιθ'. Ἐὰν δύο μεγέθη ἴσα ἀνομοίως διαιρεθῇ, τῶν δὲ τοῦ ἐτέρου τμημάτων τὸ μείζον πρὸς τὸ ἐλάττον μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ περ τοῦ λοιποῦ τὸ μείζον πρὸς τὸ ἐλάττον ἢ τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἴσον, τῶν προειρημένων τμημάτων τὸ μὲν μείζον μέγιστον ἔσται τῶν τεσσάρων τμημάτων, τὸ δὲ ἐλάττον ἐλάχιστον τῶν τεσσάρων. ἔστω δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ διηρήσθω τὸ μὲν ΑΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΔ τῷ Ζ, ἔστω δὲ τὸ μὲν ΑΕ τοῦ ΕΒ μείζον, τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ μὴ ἐλάττον, ὥστε τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχειν ἢ περ τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ μεγεθῶν μέγιστον μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΒΕ. ἐπεὶ τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ ἐναλλάξ τὸ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ΕΒ πρὸς ΖΔ.

162 καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ἐλάττον ἄρα τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. τὸ δὲ ΖΔ τοῦ ΓΖ οὐ μείζον· καὶ τοῦ ΓΖ ἄρα ἔλασσόν ἐστὶ τὸ ΕΒ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΑΕ ἐλάττον· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΒ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἴσον, ὦν τὸ ΕΒ τοῦ ΔΖ ἐλάττον, λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΑ λοιποῦ τοῦ ΓΖ μείζον. τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ οὐκ ἐλάττον ἐστὶ· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ ΑΕ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΕΒ μείζον· μέγιστον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ, τὸ δὲ ΕΒ ἐλάχιστον. κ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡγμένης εὐθείας ἴσας, τοῦ δὲ ἐτέρου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχῃ ἢ περ ἡ τοῦ λοιποῦ μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα ἢ καὶ ἴση πρὸς τὴν ἴσην, οὗ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἐλαττόν ἐστίν. ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ, ΕΖ βάσεις, ὧν ἑκατέρα τετμήσθω δίχα κατὰ τὰ Η καὶ Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΗ, ΔΘ ἴσαι ἔστωσαν· ἔστω δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΔΖ μείζων, ἡ δὲ ΒΑ τῆς ΑΓ μὴ ἐλάττων, ὥστε τὴν ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχειν ἢ περ τὴν ΒΑ πρὸς ΑΓ.

164 λέγω, ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐλαττόν ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ ἴσαι τέ εἰσι καὶ εἰς ἴσα διήρηνται, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ ἴση, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΑΗ τοῖς ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη· τοῖς δὲ ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ· καὶ συναμφοτέρων ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ συναμφοτέρω τῷ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ ἴσον ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσων μεγεθῶν τοῦ τε ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΓ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΔΖ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὸ ἐλάττον, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ τοῦ λοιποῦ τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν τμήμα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΕΔ μέγιστον ὃν μείζον ἐστὶν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ ἐλάχιστον ὃν ἐλαττόν ἐστὶν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ διὰ τοῦ πρὸς τούτου θεωρήματος· καὶ ἡ μὲν ΕΔ ἄρα ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΔΖ ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττων. ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΕΔ γραφόμενος κύκλος ὑπερπεσεῖται τὴν ΒΑ· γεγράφθω ὁ ΚΛ· καὶ ὁ κέντρω μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΔΖ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ· γεγράφθω ὁ ΜΝ.

166 τέμνουσι δὴ ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, ὡς δειχθήσεται. τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ· ἡ μὲν ἄρα ΒΞ τῇ ΕΔ ἴση, ἡ δὲ ΞΓ τῇ ΔΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΒΞΓ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ ἴσον ἐστίν. ὥστε ἴση καὶ ἡ ΞΗ τῇ ΔΘ, τουτέστι τῇ ΑΗ· ὁξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΑΗ γωνία. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ ἄρα γωνία

τῆς ὑπὸ ΑΗΓ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΗΓ οὐ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΑΞ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΗΑ, ΞΑΗ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· οὐκ ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΗΓ παράλληλός ἐστιν. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΠ· τὸ ἄρα ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΠΓ τριγώνῳ. τὸ ἄρα ΒΑΓ μεῖζόν ἐστὶ τοῦ ΒΞΓ, τουτέστι τοῦ ΕΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, δεικτέον οὕτως. ἔστω γὰρ τῇ μὲν ΕΔ ἴση ἡ ΒΑΡ, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ ΓΣ ἐπ' εὐθείας οὔσα τῇ ΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΣ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρος ἡ ΕΖ, ΖΔ τῆς ΕΔ μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ΒΣ ἄρα τῆς ΒΡ μείζων ἐστὶν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΡ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΒΣ. ἡ δὲ ΓΣ ἴση οὔσα τῇ ΔΖ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΓΑ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΣ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ.

168 τεμνέτω κατὰ τὸ Υ· ἥξει ἄρα διὰ τῆς ΡΤ περιφερείας. τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους καὶ οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι. κα'. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἀνισοσκελῇ τὰς τε βάσεις ἴσας ἔχη, ἔχη δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡγμένας εὐθείας ἴσας, τοῦ ἐλάττονος ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ τοῦ μείζονος μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα. ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ἴσας ἔχοντα τὰς τε ΑΓ, ΕΗ βάσεις δίχα τετμημένας κατὰ τὰ Δ καὶ Θ σημεία, ἴσαι δὲ ἔστωσαν καὶ αἱ ΒΔ, ΖΘ, καὶ μεῖζον τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΕΖ πρὸς ΖΗ. εἰ γὰρ μή, ἦτοι τὸν αὐτὸν ἢ ἐλάττονα. ἔστω οὖν πρότερον, εἰ δυνατόν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρον τὸ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς συναμφοτέρον τὸ ἀπὸ ΕΖ, ΖΗ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἀλλὰ συναμφοτέρον τὸ ἀπὸ ΑΒΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ ΕΖΗ ἴσον· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τῷ ἀπὸ ΖΗ ἴσον.

170 ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΕΖ ἴσον· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ αἱ βάσεις ἴσαι· πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα. ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ· ὅπερ ἄτοπον· ἦν γὰρ ἔλαττον τὸ ΑΒΓ. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἐχέτω ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἢ περ ἢ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΑΒ πρὸς ΒΓ. τὸ ἄρα ΕΖΗ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ διὰ τὰ δειχθέντα· ὅπερ ἄτοπον· ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ τὸν αὐτόν· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ ΕΖ πρὸς ΖΗ. κβ'. Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι ἐν τῷ κώνῳ τρίγωνον ἰσοσκελές. ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτόν, ὡς ἐπιτέτακται. τετμήσθω πρῶτον διὰ τοῦ ἄξονος τῷ ΑΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ κάθετος, ἥτις πίπτει ἐπὶ τὴν ΓΔ βάσιν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ καὶ τῆς Α κορυφῆς ἐκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον.

172 λέγω, ὅτι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστὶν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ. ἐπεὶ ἡ ΓΔ τὴν ΕΖ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΗ. καὶ κοινὴ ἡ ΑΗ, καὶ ὀρθὴ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΗΕ, ΑΗΖ γωνιῶν· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΑΖ ἴση ἐστίν. ἰσοσκελές ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον. ἐκ δὲ τούτου φανερόν ἐστὶν, ὅτι πάντα τὰ συνιστάμενα τρίγωνα τὰς βάσεις ἔχοντα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἰσοσκελῆ ἐστὶν. κγ'. Ἔτι δεικτέον, ὅτι, ἐὰν τὰ γινόμενα τρίγωνα τὰς βάσεις μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχη τῇ ΓΔ, οὐκ ἔσται ἰσοσκελῆ. ὑποκείσθω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἡ ΕΖ μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ· αἱ ΕΗ, ΖΗ ἄρα ἄνισοί εἰσι. κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς καὶ αἱ ἄρα ΕΑ, ΑΖ ἄνισοί εἰσι. τὸ ΕΑΖ ἄρα τρίγωνον οὐκ ἐστὶν ἰσοσκελές. κδ'. Ἐν κώνῳ σκαληνῷ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ ἰσοσκελές, ἐλάχιστον δὲ τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστὶ τοῦ ἀπώτερον.

174 ἐν γὰρ κώνῳ σκαληνῷ διὰ τοῦ AB ἄξονος ἔστω τρίγωνον, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ ΑΓΔ, ὀρθὸν δὲ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τὸ ΑΕΖ. λέγω, ὅτι πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μὲν ἐστὶ τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ. ἔστω γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος ἡγμένον ἄλλο τρίγωνον τὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ σκαληνὸς ὁ κῶνος, κεκλίσθω ὁ AB ἄξων ἐπὶ τὰ τοῦ Z μέρη· μέγιστη μὲν ἄρα ἡ ΑΕ πλευρὰ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΖ. ἡ μὲν ἄρα ΕΑ τῆς ΑΗ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΖΑ τῆς ΑΘ ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΕΖ, ΑΗΘ ἴσας ἔχει βάσεις τὰς ΕΖ, ΗΘ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τὴν αὐτὴν τὴν ΑΒ, καὶ μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΑΖ ἢ περ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τοῦ ΗΑΘ. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΑΖ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΑΗΘ, ΑΓΔ τριγώνων αἱ τε βάσεις ἴσαι καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡ αὐτή, καὶ ἔχει ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ μείζονα λόγον ἢ περ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ· ἴσαι γὰρ αἱ ΓΑ, ΑΔ· τὸ ΗΑΘ ἄρα τρίγωνον ἔλαττόν ἐστὶ τοῦ ΓΑΔ τριγώνου.

176 ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τοῦ ΓΑΔ ἐλάττονα ἐστὶ. μέγιστον ἄρα πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπώτερον. κε'. Ἐν τῷ δοθέντι κώνῳ σκαληνῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, πρὸς ἣν ἡ μέγιστη λόγον ἔξει δοθέντα· δεῖ δὴ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος μὲν εἶναι πρὸς ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ εἶναι τοῦ ὃν ἔχει ἡ μέγιστη τῶν ἐν τῷ κώνῳ πρὸς τὴν ἐλαχίστην. δεδόσθω κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΒΓ κύκλος καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΒΓ, κορυφή δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ὀρθὰς δὲ τῷ ΒΓ κύκλῳ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· μέγιστη μὲν ἄρα ἡ ΒΑ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔξει, ὃν ἔχει ἡ Δ εὐθεῖα μείζων οὕσα πρὸς τὴν Ε ἐλάττονα· ἐχέτω δὲ ἡ Δ πρὸς Ε λόγον ἐλάττονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. κατήχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΖΗ, καὶ ὥς ἡ Δ πρὸς Ε, οὕτως ἐχέτω ἡ ΒΑ πρὸς ἄλλην τινά, ἐχέτω δὲ πρὸς τὴν ΑΗ, ἥτις ἐνηρμόσθω ὑπὸ τὴν ὑπὸ ΑΖΗ γωνίαν.

178 ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ· μείζων ἄρα ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΗΖ τῆς ΖΓ. ἐπεὶ οὖν, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΒΖ, ΖΑ τῶν ἀπὸ ΑΖ, ΖΗ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μείζον, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς μὲν ΖΓ μείζων ἐστὶ, τῆς δὲ ΖΒ ἐλάττων. ἐνηρμόσθω τοῖνυν τῷ κύκλῳ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΖ τῇ ΖΗ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΖΑ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑκατέρᾳ αὐτῶν, καὶ βάσις ἄρα ἡ ΘΑ τῇ ΑΗ ἴση. ἐπεὶ οὖν, ὥς ἡ Δ πρὸς Ε, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστὶ, καὶ ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΘ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἡ ΑΘ ἄρα διῆκται, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. κς'.

180 (1n) Ἔστω τρίγωνον δοθὲν τὸ ΑΒΓ σκαληνὸν μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ βάσις τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἡ μὲν ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΓ ἴση οὕσα τῇ ΔΑ, ἡ δὲ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. μείζον τοῦ ΑΒΓ ἄλλο τρίγωνον συστήσασθαι τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἴσην ἑκατέρᾳ τῷ ΔΕ, ΔΑ καὶ προσέτι λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὃν ἡ Θ πρὸς Η μείζων πρὸς ἐλάττονα· ἐχέτω δὲ ἡ Θ πρὸς Η λόγον μὴ μείζονα ἢ περ ἡ ΔΕ πρὸς ΑΖ. κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΑ γεγράφθω κύκλος ἥξει δὴ καὶ διὰ τοῦ Ε· ἔστω δὴ ὁ ΕΑ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς Θ πρὸς Η λόγος οὐ μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς ΔΕ πρὸς ΑΖ, ἥτοι ὁ αὐτός ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ὁ αὐτός, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ.

182

ἐπεὶ οὖν, ὥς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, ὥς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ, ὥς ἄρα ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΕΓ ἄρα πρὸς τὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἡ Θ πρὸς Η, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα. ἀλλὰ δὴ ἐχέτω ἡ Θ πρὸς Η ἐλάττονα λόγον ἢ περὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, γενέσθω δέ, ὥς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ. ἐπεὶ οὖν, ὥς ἡ Θ πρὸς Η, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, ὥς δὲ ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ΒΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον, τὸ ἄρα ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τὸν ἐπιταχθέντα ἔχει λόγον τὸν τῆς Θ πρὸς Η· ἔχει δὲ καὶ τὴν ΛΔ ἴσην τῇ ΔΑ· ὁ προστέτακται ποιῆσαι. κζ'. Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κῶνῳ, ὃ τὸν δοθέντα λόγον ἔξει πρὸς τὸ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· δεῖ δὴ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος ὄντα πρὸς ἑλάττον μὴ μείζονα εἶναι τοῦ ὃν ἔχει τὸ μέγιστον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ἐλάχιστον. ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνός, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἀγαγεῖν ἐπίπεδον ποιοῦν τρίγωνον, ὃ λόγον ἔξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὃν ἔχει ἡ Ε εὐθεῖα μείζων οὔσα πρὸς τὴν Ζ, μὴ μείζονα λόγον ἢ περὶ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον τὸ ΑΓΔ.

184 εἰ μὲν οὖν ἡ Ε πρὸς Ζ λόγον ἔχει, ὃν τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, διὰ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἀγαγόντες εὐθεῖαν ἐν τῷ κύκλῳ καὶ διὰ τῆς ἀχθείσης καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβαλόντες ἐπίπεδον ἔξομεν τρίγωνον ἰσοσκελές, ὃ μέγιστόν ἐστι τῶν διὰ τοῦ ἄξονος· ταῦτα γὰρ ἐδείχθη· καὶ ἔξει πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον τὸν τῆς Ε πρὸς Ζ, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα. ἐχέτω δὲ νῦν ἡ Ε πρὸς Ζ ἐλάττονα λόγον ἢ περὶ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, καὶ κείσθω ἐκτὸς εὐθεῖα ἡ ΗΘ ἴση οὔσα τῇ ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον ὅμοιον ὃν τῷ ΑΓΔ, ὥστε καὶ τὴν ΚΗ τῇ ΑΓ ἴσην εἶναι καὶ πάντα πᾶσιν, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΘ συνεστάτω τρίγωνον ἴσην ἔχον τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ ΚΛ καὶ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΚΗΘ, ὃν ἡ Ε πρὸς Ζ.

186 τὸ δὲ συνιστάμενον τρίγωνον τὴν κορυφὴν ἔξει ἐπὶ τὰ τοῦ Η μέρη, ὥς δειχθήσεται. ἔστω δὴ τὸ ΜΗΘ, ὥστε τὴν ΜΗ πλευρὰν τῆς ΜΘ μείζονα εἶναι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΛ τῇ ΑΚ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΚΛΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΛΗ, μείζων ἄρα ἡ ΚΗ τῆς ΜΗ. ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΓΑ ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων ἐστὶ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΚΘ τῆς ΜΘ ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων, ἡ ἄρα ΚΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΗ τῆς μὲν μεγίστης τῶν ἐν τῷ κῶνῳ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΑΓ, τῆς δὲ ἐλαχίστης μείζων τῆς ΑΔ, δυνατόν ἄρα εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΜΗ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγαγεῖν, ὥς ἤδη μεμαθήκαμεν. ἦχθω δὴ καὶ ἔστω ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΝΒΞ καὶ ἡ ΑΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΑΝ τῇ ΜΗ, ἡ δὲ ΝΒ τῇ ΗΛ, ἡ δὲ ΒΑ τῇ ΛΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΝΒ τρίγωνον τῷ ΜΗΛ ἴσον ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΛΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ ἄρα τῇ ὑπὸ ΜΛΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΛΜ, ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΛΘ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΛΘ, ἴση ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΜΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΜΗ ἴση καὶ ἡ ΝΞ βάσις τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ΑΝΞ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΜΘ. ἀλλὰ τὸ ΗΜΘ πρὸς τὸ ΗΚΘ, τουτέστι πρὸς τὸ ΓΑΔ, λόγον ἔχει τὸν τῆς Ε πρὸς Ζ· καὶ τὸ ΑΝΞ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον ἔχει, ὃν ἡ Ε πρὸς Ζ.

188 ἦκται ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΝΞ τρίγωνον, ὥς ἐπιτέτακται. κη'. Εἰ δέ τις λέγει, ὅτι τὸ συνιστάμενον ἐπὶ τῆς ΗΘ τρίγωνον μείζον ὑπάρχον τοῦ ΗΚΘ ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἔξει, συμβήσεται ἀδύνατον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, οὕτως. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ ΚΛ, ΜΛ, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΜΛΗ γωνία μείζων τῆς ὑπὸ ΚΛΗ, μείζων ἄρα ἡ ΜΗ τῆς ΚΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΜ μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΜΗ τῆς ΗΚ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΘΚ ἐλάττων, ἡ ἄρα ΜΗ πρὸς ΗΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΜΘ πρὸς ΘΚ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἡ ΗΜ πρὸς ΘΜ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἑλάττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΜΘ τοῦ ΗΚΘ· ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο

γὰρ μείζον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἔξει τὸ τρίγωνον· ἐπὶ τὰ τοῦ Η ἄρα μέρη ἔξει. κθ'. Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τοῦ δὲ γενομένου τριγώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος μὴ ἐλάττων ἢ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τρίγωνον μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν τῷ κῶνῳ συνισταμένων τριγώνων καὶ παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τριγώνου.

190 κῶνος γάρ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τετμήσθω διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κῶνου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κῶνῳ συνισταμένων τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ. διήχθω γὰρ ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ, ἐφ' ἧς τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω τῇ ΓΔ ἡ ΒΗ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΗ· ἡ ΒΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ καθέτῳ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΔ, ΗΕ, ΗΖ· νοηθήσεται δὲ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Η, ἄξων δὲ ἡ ΗΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἐν ᾧ τρίγωνα διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΗΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΗΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διὰ τὰ προοδευγμένα ἄρα τὸ ΗΓΔ μείζον ἐστὶ τοῦ ΗΕΖ καὶ πάντων τῶν ἐν τῷ κῶνῳ τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΗΓΔ τῷ ΑΓΔ ἴσον ἐστίν· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις· τὸ δὲ ΗΕΖ τῷ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ μείζον ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ.

192 τὸ ΑΓΔ ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λ'. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐλάττων ἢ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ΑΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν τὰς παραλλήλους τῇ ΓΔ βάσεις ἐχόντων τριγώνων· ἡ δὲ αὕτη δεῖξις καὶ καταγραφή. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΗΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα ΗΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν παραλλήλους αὐτῷ βάσεις ἐχόντων· ἐδείχθη γὰρ καὶ μείζονα αὐτοῦ συνιστάμενα καὶ ἐλάττονα καὶ ἴσα. εἰ μὲν οὖν ἔλαττον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, ἔλαττον ἔσται καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ, εἰ δὲ μείζον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, μείζον καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ, καὶ ἴσον ὁμοίως. λα'. Ἐὰν ἐν σκαληνῷ κῶνῳ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελὴ τρίγωνα συστήῃ, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κῶνου μὴ ἐλάττων ἢ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἰσοσκελῶν τῶν συνισταμένων, ἐφ' ὃ μέρος προσενεύει ὁ ἄξων. ἔστω κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ τριγώνου διὰ τοῦ ἄξονος ἡγμένου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς, ὥστε τὴν ΑΒ ἐπὶ τὰ Δ μέρη προσενεύειν, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

194 λέγω, ὅτι τὸ διὰ τῆς ΑΒ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι τῶν γινομένων ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἡ δὲ ΒΑ τῆς ΑΕ ἤτοι ἐλάττων ἐστὶν ἢ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων. ὑποκείσθω δὲ μὴ εἶναι ἐλάττων ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ οὐκ ἐλάττων, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΖ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν ἔχον τὴν διπλὴν τῆς ΒΖ, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν διπλὴν τῆς ΕΗ, ὕψος δὲ τὴν ΑΕ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μείζον ἐστὶ τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ τὰς βάσεις ἐχόντων μέγιστόν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. λβ'.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ ἐλάττων. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἦχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ ἴση οὕσα τῇ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΑΕ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσι. συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΚΕ παράλληλος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὀρθαὶ γάρ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΘΒΛ, μείζων ἄρα ἡ ΘΕ τῆς ΘΛ· ἡ ΘΒ ἄρα πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ. ἀλλ' ὥς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ· ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ. ἡ δὲ ΒΚ πρὸς ΚΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, ὥς ἐν τῷ ἐξῆς δείκνυται· πολλῶν ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ. ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν ἢ περ ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστι πρὸς ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ.

198 ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελές· μείζον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὲ δείκνυται, ὅτι καὶ τῶν ἄλλων, ὧν αἱ βάσεις μεταξὺ τῶν Β, Δ· ὃ προέκειτο δεῖξαι. λγ'. Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ ἡ λοιπὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν. ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Β, ἀφ' ἧς ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν ἦχθω ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ἦχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Ε, μείζων ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ. ὥς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· ἡ ἄρα ΒΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ὥστε φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ὃ ἐχρησίμευεν ἡμῖν εἰς τὸ πρὸ τούτου. λδ'.

200 (1n) Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῇ τρίγωνον συστή, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γενομένων ἰσοσκελῶν ἔν ὅτιοῦν ἴσον ἢ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου κάθετος μείζων ἔσται τοῦ ἄξονος. ἔστω σκαληνὸς κώνος, οὗ κορυφὴ τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ προσνεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἦχθωσαν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ὑποκείσθω τὸ διὰ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελές ἴσον εἶναι τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΖ, ὃ ἐστὶ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ. ἐπεὶ γὰρ τὸ διὰ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἰσοσκελές ἴσον ἐστὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΖ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ, ὥς ἄρα ἡ ΒΖ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΖ τῆς ΗΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ. λε'. Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῇ τρίγωνον συστή, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γενομένων ἰσοσκελῶν ἔν ὅτιοῦν ἴσον ἢ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

202 ἔστω κώνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ νεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἀγομένου τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ὑποκείσθω τῷ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΒΖ ἀγομένῳ τριγώνῳ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, τὸ διὰ τῆς ΕΑ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἀγόμενον ἰσοσκελές ἴσον εἶναι. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἦχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ διὰ τὸ πρὸ τούτου, ἡ

ἄρα ὑπὸ BEA γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΕΑ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπίπτουσιν κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AB, BZ, τὸ δὲ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ, καὶ ἐστὶν ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἰσοσκελῆ, καὶ τὸ ὑπὸ AB, BZ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ· ὥς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΖΒ, τουτέστι πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ διὰ τὸ λγ' θεώρημα, ὥς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ἐλάττονα μὲν τινὰ τῆς ΘΕ, μείζονα δὲ τῆς ΘΒ.

204 ἔστω δὴ, ὥς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΚΘ ἦχθω ἡ ΕΛ συμπίπτουσα τῇ ΒΘ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν, ὥς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ, ἦν δέ, ὥς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΕ, ΗΕΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει ὀρθογώνια γάρ· περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς Λ, Η τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέρα ὀξεῖα, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒΕ, ΗΕΒ τρίγωνα. ὥς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΒΕ· ἴση ἄρα ἡ ΛΒ τῇ ΗΕ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· καὶ ἡ ΒΛ ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. καὶ ἐπεὶ συναμφοτέρως ἡ ΕΛΒ συναμφοτέρως τῆς ΕΑΒ μείζων ἐστὶ, καὶ ἐστὶν, ὥς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΒ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΛΒ, καὶ συνθέντι ἄρα, ὥς συναμφοτέρως ἡ ΕΛΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως συναμφοτέρως ἡ ΕΑΒ πρὸς ΒΑ, καὶ ἐναλλάξ· μείζων δὲ συναμφοτέρως ἡ ΕΛΒ συναμφοτέρως τῆς ΕΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΒ τῆς ΒΑ. ἐδείχθη δὲ ἡ ΛΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λζ'.

206 (1n) Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστήῃ, ἀφ' οὗ μέρους ἀπονέυει ὁ ἄξων, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συστάντων ἰσοσκελῶν οὐκ ἔσται πάντων ἐλάχιστον. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ διάμετρος, ἐλάττων δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ὀρθῆς. λέγω, ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων οὐ πάντων ἐλάχιστόν ἐστιν. ἐπεζεύχθω γάρ ἡ ΑΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ [ἐκ κέντρου], ἔστω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ παρὰ τὴν ΕΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜΗ, καὶ παρὰ τὴν ΖΕ ἡ ΗΘ· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΖΘ. ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ· ἡ ἄρα ΗΘ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἴση. ἦχθωσαν δὴ πάλιν ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΚΒ, ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τὰ ΘΗΒ, ΛΒΗ ἴσας ἔχει γωνίας τὰς ὀρθὰς, περὶ δὲ ἄλλας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προτάσεως, ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὥς ἄρα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΛΗ.

208 ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ δὲ ΗΜ πρὸς ΜΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἀλλ' ὥς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ, τουτέστιν ἡ ΒΚ, πρὸς ΛΗ· ἡ ἄρα ΒΚ πρὸς ΛΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΚ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΗΛ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μείζον ἐστὶ τοῦ διὰ τῆς ΑΗ ἰσοσκελοῦς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλὴ τῆς ΑΗ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἐλάχιστόν ἐστὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων ἰσοσκελῶν. λζ'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δύο τρίγωνα συστήῃ, καὶ τοῦ μὲν ἐτέρου ἡ πλευρὰ πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει, τοῦ δὲ ἐτέρου πρὸς ἀμβλεῖαν γωνίαν, τὸ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου ὕψος μὴ ἔλαττον ἢ τοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ὕψους, ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τοῦ ὀρθογωνίου μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου. συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ τρίγωνα, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἔστω ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΔΖ μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΓΒ καθέτου. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ. ἐπεὶ παράλληλοι μὲν αἱ ΒΓ, ΔΖ καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΖ, οὐκ ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ γωνία οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ.

- 210 καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιον ἐστίν, ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ· περιγραφὲν ἄρα τὸ ἡμικύκλιον τεμεῖ τὴν ΑΔ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μείζων τῆς ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ. λη΄. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία μὴ μείζων ᾖ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλείαν τῇ βάσει, ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλείαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλείαν τῇ βάσει. καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τρίγωνα, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ μὴ μείζων τῆς ὑπὸ ΓΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ἐπεὶ μείζων ἐστίν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἐδείχθη, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ, συνεστάτω τῇ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΗ τρίγωνα [ὅμοια].
- 212 ὡς ἄρα ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΗ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ οὐκ ἐστίν ἐλάττων, ἤτοι ἴση ἐστίν ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΖ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΔΒΖ, οὐ μείζων ἐστίν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΓΔ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΑΓΒ οὐ μείζονες εἰσι δυεῖν ὀρθῶν, ὅ ἐστιν αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ οὐ μείζονες εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ οὐ μείζονες εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΑΒΔ οὐ μείζονες εἰσι τριῶν ὀρθῶν. λοιπὴ ἄρα εἰς τέσσαρας ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ μιᾶς ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΔΗ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ἀλλ’ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· καὶ ἡ ἄρα ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ μείζων· ἀμβλεία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΒ. ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΒΘ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τῆς δὲ ὑπὸ ΔΒΘ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, οὐ μείζων ἐστίν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ, οὐ μείζονες εἰσι δυεῖν ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ οὐ μείζονες εἰσι τριῶν ὀρθῶν.
- 214 ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάττων ὀρθῆς ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ. ἡ ΑΔ ἄρα πρὸς ΔΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λθ΄. Τῶν αὐτῶν ὄντων τῶν ἄλλων ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει μείζονα λόγον ἔχη ἢ περ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλείαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλείαν τῇ βάσει, ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία μείζων ἐστὶ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλείαν τῇ βάσει. κείσθω ἡ αὕτη καταγραφὴ τῶν αὐτῶν κατεσκευασμένων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, καὶ ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς μιᾶς· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ μείζονες εἰσι τριῶν ὀρθῶν.
- 216 ἀλλ’ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΒΔ μείζονες εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ δύο ὀρθῶν μείζονες εἰσιν. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μετὰ μὲν τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν εἰσι μείζους, μετὰ δὲ τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ. μ’. Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστήῃ, ἀφ’ οὗ μέρους ἀπονέυει ὁ ἄξων, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν οὔτε μέγιστον ἔσται πάντων οὔτε πάντων ἐλάχιστον. ἔστω κῶνος, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς γωνίας τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς. λέγω, ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων

ἰσοσκελῶν τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξύ τῶν Γ, Β σημείων οὔτε μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον. ὁ δὲ ἄξων ἦτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἢ ἴσος αὐτῇ ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἐλάττων.

218 ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Ε σημείων τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΕΖ, ΒΗ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΕΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΒΘ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς ἴσα· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα. ὥς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ ΖΕ τῆς ΕΘ, ἴσαι δὲ αἱ ΒΗ, ΒΘ, ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΗ πρὸς ΖΕ. ἀλλ' ὥς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΗ πρὸς ΕΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕ, ΕΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΗ, τουτέστι τὸ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελές, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῇ τῆς ΕΖ, τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μείζον ἐστὶ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων τριγώνων. ἐδείχθη δὲ ἐν τῷ τριακοστῷ ἔκτῳ καθόλου, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον. μα'. Ἀλλὰ δὲ ἔστω ὁ ΑΒ ἄξων ἴσος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάττων οὔσα ὀρθῆς ἦτοι ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς ἢ οὐ. ἔστω πρότερον οὐκ ἐλάττων ἡμισείας, καὶ διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΒ ἡ ΑΕ καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ, ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΒΘ, ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ.

220 ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΒΑ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΕΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΖΑΒ ἐπὶ μιᾷ βάσει συνέστηκε, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΚ, οὐκ ἐστὶν ἐλάττων τῆς ΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΒ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ, ἡ ἄρα ΖΕ πρὸς ΕΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ διὰ τὸ τριακοστὸν ὄγδοον θεώρημα. ὥς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΒΘ, πρὸς ΖΗ· ἴση γὰρ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· καὶ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΘ ἐλάττον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές τοῦ διὰ τῆς ΑΖ ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν.

222 ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα πάντων μέγιστόν ἐστιν οὔτε ἐλάχιστον. μβ'. Ἀλλὰ δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒΕ, καὶ κείσθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ ΑΕ, τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΖ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΗ, καὶ ὑποτεινέτω τὴν ὑπὸ ΖΒΗ γωνίαν ἡ ΖΗ εὐθεῖα ἴση συσταθεῖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΒΕ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς ἡμισείας, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε, ἡ ἄρα ΒΕ τῆς ΕΖ μείζων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ, ΕΒ, ὧν μείζον τὸ ἀπὸ ΕΒ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΒΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ μείζον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΖΒ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΒΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΒ ἡμισεία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΖ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δις ἀπὸ ΑΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ μείζον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΒ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΗΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ.

224 ἐὰν οὖν πάλιν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΒΘ, ἐπιζευχθῇ τε ἡ ΒΚ, ἡ ΒΘ πρὸς ΖΚ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές ἔλαττον ἐστὶ τοῦ διὰ τῆς ΑΖ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελές μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται,

συνισταμένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστιν οὔτε ἐλάχιστον. μγ'. Ἐστω δὲ νῦν ὁ AB ἄξων μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἢ ΑΕ. ἡ δὲ ΑΕ ἦτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἦχθω ἡ ΑΖ, διὰ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἢ ΒΖ, καὶ συστήτω ἡ ὑπὸ ΒΖΗ μὴ μείζων οὔσα τῆς ὑπὸ ΖΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. πάλιν ἄρα διὰ τὰ δειχθέντα ἡ ΖΗ πρὸς ΖΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΒ ἴση οὔσα τῇ ΑΕ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΖΗ τῆς ΖΒ, ἡ ἄρα ΖΗ ἦτοι μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἐλάττων ἢ ἴση. ἔστω πρῶτον ἴση.

226 ἐὰν οὖν πάλιν, τὸ εἰωθός, ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὰς ΗΛ, ΜΒ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΛ, διὰ τὰ δειχθέντα πολλάκις ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ· ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἰσοσκελὲς μείζον ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς. εἰ δὲ ἡ ΖΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΗΝ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, ἡ δὲ ΗΖ πρὸς ΖΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, καὶ ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ. καὶ οὕτως τὸ διὰ τῆς ΑΗ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μείζον ἔσται. εἰ δὲ ἡ ΖΗ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διήχθω ἡ ΖΞ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΞΖΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ, ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΞΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ. ὥς δὲ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΞΟ· ἡ ἄρα ΞΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΞΟ. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΑΞ, ΞΟ ἰσοσκελὲς μείζον ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον.

228 μδ'. Ἐστω δὲ ἡ ΑΕ κάθετος μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ΖΒ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΑΘ, καὶ συστήτω ἡ ὑπὸ ΒΘΗ μὴ μείζων οὔσα τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. ἔξει δὲ πάλιν διὰ τὰ δειχθέντα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἥπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΘΗ τῆς ΘΒ, ἡ ΘΗ ἄρα ἦτοι ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἢ ἐλάσσων ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἦχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ὥς δὲ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ, ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μείζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς. εἰ δὲ ἡ ΘΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα ἥπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ. ὥστε καὶ οὕτω μείζον τὸ διὰ τῆς ΗΑ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

230 εἰ δὲ μείζων ἡ ΗΘ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΘΝ ἐνηρμοσμένη ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΑ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΝΘΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, ἡ ἄρα ΝΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. ὥς δὲ ἡ ΝΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΝΞ· ἡ ἄρα ΒΛ πρὸς ΝΞ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. μείζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΝ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων οὔτε ἐλάχιστον. με'. Παντὸς κώνου σκαληνοῦ δυνάμει ἀπείρων ὄντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων ἀγόμεναι κάθετοι πᾶσαι ἐπὶ ἐνὸς κύκλου περιφέρειαν πίπτουσιν ὄντος τε ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ περὶ διάμετρον τὴν ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐπιπέδῳ ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε κέντρου τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καθέντος. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ

ἄξων ὁ AB, ἀπὸ δὲ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἡ AG, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ GB, τῇ δὲ GB ἀπὸ τοῦ B πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΔB, τυχοῦσαι δὲ αἱ ZH, KΘ· γίνονται δὴ αἱ ΔE, ZH, ΘK βάσεις τριγώνων διὰ τοῦ ἄξονος ἡγμένων.

232 ἦχθωσαν οὖν κάθετοι ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὰς ΔE, ZH, ΘK εὐθείας αἱ AB, AL, AM· ὅτι γὰρ ὁ μὲν AB ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ ΔE, αἱ δὲ AL, AM κάθετοι ἐπὶ τὰ BH, BK μέρη πίπτουσιν, ἐξῆς δειχθήσεται. λέγω δὴ, ὅτι τὰ B καὶ L καὶ M σημεῖα ἐπὶ ἐνὸς κύκλου περιφερείας ἐστίν, οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ BG εὐθεῖα. ἐπεζεύχθωσαν αἱ GL, GM. ἐπεὶ οὖν ἡ AL κάθετος ἐπὶ τὴν ZH, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZLA γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡ AG κάθετος ἐστὶν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ὀρθαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AGB, AGL, AGM γωνίαι· ὥστε ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AB τοῖς ἀπὸ BL, LA ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ LA τοῖς ἀπὸ LG, GA ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῖς ἀπὸ BL, LG, GA ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ BG, GA ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς BA· τὰ ἄρα ἀπὸ BG, GA τοῖς ἀπὸ BL, LG, GA ἴσα ἐστί. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ GA· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ BG ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ BL, LG· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BΛΓ γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ.

234 πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσον τοῖς ἀπὸ BM, MA, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς MA ἴσον τοῖς ἀπὸ MG, GA, τὸ ἄρα ἀπὸ AB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ BM, MG, GA. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ BG, GA ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ BG ἴσον τοῖς ἀπὸ BM, MG· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BMG γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. τὰ ἄρα L, M σημεῖα ἐπὶ περιφερείας ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ BG. ὁμοίως οὖν, κἂν ὅσα σοῦν ἀγάγωμεν, ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, ὥσπερ οὖν καὶ τὴν NOΞ, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον δειχθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. μζ'. Ὅτι δὲ ὁ μὲν AB ἄξων πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῇ ΔE, αἱ δὲ AL, AM κάθετοι ἐπὶ τὰ BH, BK μέρη πίπτουσιν, οὕτω δεικτέον. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς AD, AE, ἔσται τὸ ΔAE τρίγωνον ἰσοσκελές, καὶ διὰ τοῦτο ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς βάσεως καὶ τῆς A κορυφῆς ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ΔE. ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΓZ, ΓH, AZ, AH. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖα μὲν ἡ ὑπὸ ZBG γωνία, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ GBH, μείζων ἄρα ἡ ZΓ τῆς ΓH, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓH μείζον. καὶ κοινοῦ ἄρα προστεθέντος τοῦ ἀπὸ τῆς AG τὰ ἀπὸ τῶν ZΓ, GA τῶν ἀπὸ τῶν HΓ, GA μείζονα ἐστὶ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ZA τοῦ ἀπὸ AH μείζον ἐστὶ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ZA τῆς AH.

236 ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ZB, BH ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ BA, μείζων δὲ ἡ ZA τῆς AH, ἡ μὲν ἄρα ὑπὸ ZBA γωνία ἀμβλεῖα ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ABH ὀξεῖα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν ZH ἐπὶ τὰ BH μέρη πίπτει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. Ὡστε φανερόν, ὅτι αἱ προειρημέναι κάθετοι ἀπὸ μετεώρου τοῦ A σημείου ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν πίπτουσαι κατὰ ἐπιφανείας οἰσθήσονται κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ ὑπὸ τῶν πτώσεων τῶν καθέτων γραφόμενος κύκλος, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ ἐξ ἀρχῆς κώνῳ. μζ'. Ἐν κώνῳ σκαληνῷ δοθέντος τινὸς τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων, ὃ μήτε μέγιστόν ἐστι μήτε ἐλάχιστον, εὐρεῖν ἕτερον τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλάχιστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος, ἔστω κώνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ AB, καὶ ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κάθετος ἡ AG, καὶ διὰ τοῦ Γ καὶ τοῦ B κέντρου διήχθω ἡ ΓΔBE εὐθεῖα, ἥ πρὸς ὀρθὰς ἡ ZBH· τῶν ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται, ὡς ἐδείχθη πολλάκις, οὗ βάσις μὲν ἡ ZH, ὕψος δὲ ἡ AB, ἐλάχιστον δέ, οὗ βάσις μὲν ἡ ED, ὕψος δὲ ἡ AG.

238 ἔστω δὴ τὸ δοθὲν τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ ΘK, ὕψος δὲ ἡ AL, καὶ δέον ἔστω ἕτερον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος εὐρεῖν, ὃ μετὰ τοῦ τριγώνου, οὗ βάσις μὲν ἡ ΘK, ὕψος δὲ ἡ AL, ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλάχιστῳ. ἐπεὶ ἡ AL κάθετος ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘK βάσιν, τὸ ἄρα L σημεῖον ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἐστίν, οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ BG, διὰ τὸ προδειχθέν. γεγράφθω δὲ ὁ BΛΓ κύκλος, καὶ ᾧ μείζων ἐστὶ συναμφοτέρος ἡ BA, AG τῆς AL, τοῦτ' ἴση ἔστω ἡ M. ἐπεὶ οὖν τῶν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν BΛΓ περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ AB, ἐλάχιστη δὲ ἡ AG, ἡ ἄρα AL ἐλάττων μὲν ἐστὶ τῆς AB, μείζων δὲ τῆς AG. ἀλλ'

ή ΛΑ μετὰ τῆς Μ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρω τῇ ΒΑΓ, ὧν ή ΑΛ ἐλάττων τῆς ΑΒ· ή ἄρα Μ τῆς ΑΓ μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ Μ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΑΓ μείζον ἐστίν. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Μ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΝ τῆς ΓΝ ἐναρμοσθείσης εἰς τὸν κύκλον, καὶ διήχθω ή ΝΞΒΟ, καὶ ἐπεζεύχθω ή ΝΑ· ή ἄρα ὑπὸ ΒΝΓ γωνία ὀρθή ἐστίν· ἐν ήμικυκλίῳ γάρ.

240 ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΓ, ΓΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΓ, ΓΑ, ὧν τοῖς ἀπὸ ΓΝ, ΓΑ τὸ ἀπὸ ΑΝ ἴσον ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΒΝ, ΝΑ ἴσον ἐστίν. ὀρθή ἄρα ή ὑπὸ ΒΝΑ γωνία· ή ΑΝ ἄρα ὕψος ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, οὗ βάσις ἐστίν ή ΟΒΞ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Μ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΑΓ, ΓΝ, ἴση ἄρα ή Μ τῇ ΑΝ· ὥστε καὶ συναμφοτέρος ή ΛΑΝ συναμφοτέρω τῇ ΒΑΓ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑΝ τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΖΗ, ΕΔ, ὕψη δὲ αἱ ΒΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΑΝ διπλάσιόν ἐστὶ τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ· τὰ ἄρα τρίγωνα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘΚ, ΟΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛΑ, ΑΝ, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἐλαχίστῳ καὶ τῷ μεγίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος. καὶ ἐστὶ τὸ δοθὲν τὸ ἐπὶ τῆς ΘΚ· εὐρίηται ἄρα τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ἐπὶ τῆς ΟΞ, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

242 μῆ'. Ἐὰν δύο τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ βάσεις ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνωσι πρὸς τῇ διὰ τῆς καθέτου διαμέτρῳ, τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται· καλείσθω δὲ ὁμοταγ ή . ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ ΑΒ, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ή ΑΓ, ή δὲ διὰ τοῦ Γ σημείου τῆς καθέτου διάμετρος ή ΔΓΒΕ, διήχθωσαν δὲ αἱ ΖΒΗ, ΘΒΚ ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνουσαι πρὸς τῇ ΕΔ τὰς ΚΔ, ΔΗ. λέγω, ὅτι τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. γεγράφθω περὶ τὴν ΒΓ διάμετρον κύκλος ὁ ΒΛΓΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΑΜ· κάθετοι ἄρα εἰσὶν ή μὲν ΑΛ ἐπὶ τὴν ΖΗ, ή δὲ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΘΚ.

244 καὶ ἐπεὶ ή ὑπὸ ΓΒΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΛ ἴση ἐστίν, ἴση ἄρα καὶ ή ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΒ ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΛ, ΛΒ ἴσα ἐστίν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΑ τῷ ἀπὸ ΑΛ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ή ΛΑ τῇ ΑΜ. καὶ εἰσὶν ὕψη τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΖΗ, ΘΚ βάσεων τρίγωνα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. μθ'. Τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὰ ὁμοταγ ή ἴσα τε καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστί. ἔστω γάρ ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ὁμοταγ ή. λέγω, ὅτι ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστίν ἀλλήλοις. ὅτι μὲν οὖν ἴσα ἐστίν, ἤδη δέδεικται· ὅτι δὲ ὅμοια, νῦν δεικτέον. ἐπεὶ γὰρ ή ΑΒ ἐν ἐκατέρῳ τῶν τριγώνων ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἦκται τῆς βάσεως, καὶ ἐστίν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῖς ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ, καὶ τὰ ἀπὸ ΑΜ, ΜΒ ἄρα τοῖς ἀπὸ ΑΛ, ΛΒ ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΜ τῷ ἀπὸ ΑΛ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ καὶ ή ΜΒ εὐθεῖα τῇ ΒΛ· ὥστε καὶ ὅλη ή ΜΘ τῇ ΛΖ.

246 ἴση δὲ καὶ ή ΜΑ τῇ ΛΑ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΖ τῷ ἀπὸ ΑΘ, καὶ ή ΑΖ τῇ ΑΘ ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ ή ΑΚ τῇ ΑΗ δείκνυται ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ΖΗ, ΘΚ βάσεις ἴσαι· τὰ ἄρα ΖΑΗ, ΘΑΚ τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστίν ἀλλήλοις. δῆλον δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ. ν'. Ἐὰν κῶνος σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ἢ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἔσται, ὡς τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, οὕτως τὸ ἐλάχιστον πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελές. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ή ΑΒ εὐθεῖα ἴση οὔσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ μὲν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἔστω τὸ ΓΑΔ, τὸ δὲ ἰσοσκελές τὸ ΕΑΖ· μέγιστον μὲν ἄρα ἐστὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΕΑΖ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΓΑΔ, διὰ τὰ πρότερον δειχθέντα. ἦχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ

τὴν βάσιν κάθετος· πίπτει δὴ ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον. ἔστω οὖν ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἡ ΘΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΘΑΚ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὃν καὶ ὀρθὸν πρὸς τὴν βάσιν.

248 λέγω δὴ, ὅτι, ὡς τὸ ΕΑΖ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ΓΑΔ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἰσοσκελές. ἐπεὶ γὰρ τῶν ΕΑΖ, ΓΑΔ τριγώνων αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΔ, ΕΖ διαμέτροι, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ΕΑΖ ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ΓΑΔ ἡ ΑΗ, ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΓΑΔ καὶ ΘΑΚ τριγώνων κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΗ, βάσεις δὲ τοῦ μὲν ΓΑΔ ἡ ΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, τοῦ δὲ ΘΑΚ ἡ ΘΚ, ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως αἱ ἡμίσειαι, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὅμοια γὰρ τὰ ΒΗΚ, ΒΗΑ τρίγωνα ὀρθογώνια· καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς ΘΑΚ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ἦν δὲ καὶ τὸ ΕΑΖ πρὸς ΓΑΔ, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. νά'.

Πάλιν ἔστω, ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. ἐπεὶ, ὡς τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΖ πρὸς ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ, καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ.

250 ὡς δὲ τὸ ΓΑΔ πρὸς ΘΑΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, καὶ ἐστὶν ὅμοια τὰ ΒΑΗ, ΒΚΗ τρίγωνα καὶ ὁμόλογοι αἱ ΑΒ, ΒΚ. ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΒΚ ἐκ τοῦ κέντρου· ὃ προέκειτο δεῖξαι. Καὶ συναπεδείχθη καθ' ἑκατέραν τῶνδείξεων, ὅτι τὸ ΕΑΖ τρίγωνον τῷ ΘΑΚ ὁμοίον ἐστίν· ὡς γὰρ ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. καὶ ἔτι τὸ μὲν ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ. καὶ ἐστὶ τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ, ὡς ἡ ΓΔ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΖ, πρὸς ΘΚ· ὥστε τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν ΕΖ, ΘΚ. ὅμοια ἄρα τὰ ΕΑΖ, ΘΑΚ. ὥστε φανερόν, ὅτι, ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾗ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὁμοίον ἐστὶ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι, ἐὰν τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὁμοίον ᾗ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· καὶ τοῦτο γὰρ εὐκατανόητον ἐκ τῶν ἤδη δειχθέντων. νβ'.

252 (1n) Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνη διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ γραφόμενος, ἀπὸ δὲ τῆς ἐτέρας αὐτῶν τομῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν διὰ τοῦ κέντρου περιφέρειαν καὶ προσεκβληθῶσιν ἐπὶ τὴν τοῦ ἐτέρου κύκλου περιφέρειαν, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα μεταξὺ τῆς τοῦ ἐτέρου κύκλου κυρτῆς περιφερείας καὶ τῆς κοίλης τοῦ ἐτέρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς διαχθείσης εὐθείας καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου περιφερείας ἐπὶ τὴν ἐτέραν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων ἐπιζευγνυμένη. ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ κέντρου γεγράφθω τις κύκλος ὁ ΔΒΓ τέμνων τὸν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὰ Β, Γ σημεία, καὶ διήχθωσαν εὐθεῖαι διὰ μὲν τοῦ Δ ἡ ΒΔΕ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΖΓ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΖΓ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΓ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΗΖΓ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΖΗΓ ἴση διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβηκέναι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΓΖΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΕΖ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΗΖ τῇ ΖΓ. ὁμοίως δέ, κὰν ἄλλαι διαχθῶσι, δειχθήσεται τὰ τῆς προτάσεως. Πάλιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ὑποκείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ, τῇ δὲ ΓΖ ἡ ΖΗ τῆς ΒΔΓ περιφερείας κατὰ τὸ Δ δίχα τετμημένης.

254 λέγω, ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ ὁποτέρωθεν τῶν ΔΒ, ΔΓ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε καὶ Η σημείων. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΓ, καὶ ἐστὶν ἰσοσκελεῖ τὰ ΕΔΓ, ΗΖΓ τρίγωνα, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα κύκλῳ αἱ ὑπὸ ΒΕΓ, ΒΗΓ γωνίαί. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. νγ'. Ἐὰν ἐν τμήματι κύκλου κλασθῶσιν εὐθεῖαι, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ

πρὸς τὴν διχοτομίαν τὴν κλάσιν ἔχουσα, τῶν δὲ ἄλλων αἰὲ ἢ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων. ἐν γὰρ τῷ ABΓ τμήματι κεκλάσθωσαν εὐθεῖαι, ἡ μὲν ABΓ ὥστε τὴν ABΓ περιφέρειαν δίχα τετμηθῆσαι κατὰ τὸ B, τυχοῦσαι δὲ αἰ ΑΔΓ, ΑΗΓ. λέγω, ὅτι συναμφοτέρος ἡ ABΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ. ἐπεὶ ἡ AB περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ AB ἄρα εὐθεῖα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. κέντρῳ οὖν τῷ B, διαστήματι δὲ ὅποτερωοῦν τῶν BA, ΒΓ γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἰ ABE, ΑΔΖ, ΑΗΘ· ἴση ἄρα διὰ τὸ πρὸ τούτου θεωρημα ἡ μὲν EB τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΘΗ τῇ ΗΓ.

256 ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, μεγίστη μὲν ἄρα τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ μείζων τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΕ ἴση συναμφοτέρος ἡ ABΓ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΑΔΓ, τῇ δὲ ΑΘ ἡ ΑΗΓ· καὶ τούτων ἄρα μεγίστη μὲν ἡ ABΓ, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ. καὶ ὁμοίως αἰὲ ἢ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων· ὃ προέκειτο δεῖξαι. Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἔστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ ἐν τῷ ABΓ τμήματι κεκλάσθω ἡ ABΓ εὐθεῖα, ὥστε τὴν ABΓ περιφέρειαν δίχα τετμηθῆσαι κατὰ τὸ B. λέγω, ὅτι συναμφοτέρος ἡ ABΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν. κεκλάσθω γὰρ ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔΕ, καὶ κείσθω ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἰ ΒΔ, ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ AB περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς AB ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία βέβηκεν, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΔΕ· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐστὶν ἴση.

258 καὶ ἐστὶ συναμφοτέρος ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ συναμφοτέρος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ συναμφοτέρος ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστὶ. κοινῆς ἀρθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση μὲν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, καὶ βάσις ἄρα ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἰ AB, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονες εἰσι τῆς ΑΕ, ἀλλὰ ταῖς μὲν AB, ΒΕ συναμφοτέρος ἡ ABΓ ἴση ἐστὶ, τῇ δὲ ΑΕ συναμφοτέρος ἡ ΑΔΓ ἴση ἐστὶ, καὶ συναμφοτέρος ἄρα ἡ ABΓ τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείκνυται καὶ τῶν ἄλλων μείζων. συναμφοτέρος ἄρα ἡ ABΓ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων μεγίστη ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ διχοτομία πρὸς τῷ Z. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ Z ἔγγιον ἡ ABΓ εὐθεῖα τῆς ἀπώτερον τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ AZB περιφέρεια τῆς ΒΔΓ περιφερείας μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζων. κοινῆς προσθεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΔΕ αἰ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ μείζονες εἰσι τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ· αἰ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐλάττονες εἰσι δυοῖν ὀρθῶν.

260 εἰσὶ δὲ αἰ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἰ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ μείζονες εἰσι. καὶ κοινῆς ἀρθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΒ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων, καὶ ἡ ΓΒ ἄρα βάσις μείζων ἐστὶ τῆς ΒΕ. καὶ ἐπεὶ αἰ AB, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονες εἰσι τῆς ΑΕ, τῶν δὲ AB, ΒΕ συναμφοτέρος ἡ ABΓ εὐθεῖα μείζων ἐστὶ, συναμφοτέρος ἄρα ἡ ABΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ. νδ'. Ἐὰν τεσσάρων ἀνίσων εὐθειῶν τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τὸ συναμφοτέρον τετράγωνον ἴσον ᾗ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν, ἡ συγκεκριμένη εὐθεῖα ἐκ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης ἐλάττων ἔσται τῆς συγκεκριμένης ἐκ τῶν λοιπῶν. ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἰ AB, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ μεγίστη μὲν πασῶν ἔστω ἡ AB, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΖ μὴ ἐλάττων ἔστω, ἔστω δὲ τὰ ἀπὸ AB, ΒΓ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσα. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἐλάττων ἐστίν. ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἰ BH, ΕΘ, καὶ κείσθω ἴση ἡ μὲν BH τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἰ AH, ΔΘ, καὶ γεγράφθω περὶ τὸ ABH ὀρθογώνιον ἡμικύκλιον.

262 ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ AB, ΒΓ, τουτέστι τὰ ἀπὸ AB, BH, τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ AH ἄρα τῷ ἀπὸ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἡ AH τῇ ΔΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς BH μείζων ἐστίν, ἡ ἄρα τῇ ΕΘ ἴση

ἐναρμολομένη τῷ ἡμικυκλίῳ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΒΗΑ γωνίαν. ἐνηρμόσθω ἡ ΗΚ ἴση οὖσα τῇ ΘΕ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΚ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΚΛ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα, τὰ ἄρα ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστίν· ὧν τὸ ἀπὸ ΚΗ τῷ ἀπὸ ΕΘ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΚ τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ΑΚΗ τρίγωνον ἴσον καὶ ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΔΕΘ, καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῆς ΚΗ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων, οὐδ' ἡ ΑΚ ἄρα περιφέρεια τῆς ΚΗ περιφερείας ἐλάττων ἐστί. καὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα, ἐπεὶ ἐν τμήματι κύκλου κεκλασμένοι εἰσὶν αἱ ΑΚΗ, ΑΒΗ εὐθεῖαι, καὶ ἐστὶν ἡ ΑΚΗ ἥτοι πρὸς τῇ διχοτομίᾳ ἢ ἔγγιον τῆς διχοτομίας, μείζων ἄρα ἡ ΑΚΗ τῆς ΑΒΗ, τουτέστιν ἡ ΑΛ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ. ἐλάττων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. νε'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι διηρημέναι ὧσι, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τῆς ἐλάττονος τμημάτων τετράγωνα ἴσα ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆς μείζονος τμημάτων τετραγώνοις, τῶν τεσσάρων τμημάτων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ τῆς ἐλάττονος μείζον τμήμα, ἐλάχιστον δὲ τὸ ἔλαττον.

264 ἔστωσαν εὐθεῖαι δύο ἄνισοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ διηρημέναι κατὰ τὰ Β καὶ Ε σημεία, ὥστε τὴν μὲν ΔΕ τῆς ΕΖ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα, καὶ μείζων μὲν ἔστω ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ τετραγώνοις ἴσα. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΔΕ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΕΖ. ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΒΗ ἴση οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον γεγράφθω ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῆς ΒΗ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα περιφέρεια τῆς ΒΗ οὐκ ἐστὶν ἐλάττων· ἡ ἄρα τῆς ΑΒΗ περιφερείας διχοτομία ἥτοι κατὰ τὸ Β ἔσται ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ περιφερείας, οἷον κατὰ Θ. ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῇ διχοτομίᾳ, διαστήματι δὲ ὁποτέρωθεν τῶν Α, Η γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Γ, ὡς προεδείχθη· γεγράφθω οὖν καὶ ἔστω ὁ ΑΚΓΗ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΑΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· δυνατόν ἄρα μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΑΗ εὐθειῶν ἐναρμόσαι τῷ ΑΚΓΗ κύκλῳ εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΖ. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΛΜ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΗ· ἴση ἄρα διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΑΜ τῇ ΑΗ.

266 ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ οὐκ ἐλάσσων τῆς ΒΗ, ἡ ἄρα ΑΛ μείζων ἐστὶν ἐκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ. ἡ δὲ ΑΗ ἐλάττων ἐκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΑΗ μεγίστη μὲν ἡ ΑΛ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΑΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΜ, τῇ ΕΖ, ὡς δεῖξομεν· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ ΔΕ, ἐλάχιστη δὲ ἡ ΕΖ· ὁ προέκειτο δεῖξαι. νς'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἴσαι διηρημέναι ὧσιν οὕτως, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἐτέρας τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς λοιπῆς ἴσον εἶναι, καὶ τὰ τμήματα τοῖς τμήμασιν ἴσα ἔσται ἐκάτερον ἐκατέρῳ. ἔστωσαν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛΜ, ΔΕΖ διηρημέναι κατὰ τὰ Λ καὶ Ε σημεία, ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΑΜ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ. ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΜ τῇ ΔΖ, καὶ αἱ ἡμισεῖαι ἄρα ἴσαι εἰσίν. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ ἴσον ἐστίν. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΑΜ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ἡ ΔΖ ἄρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ, τουτέστι τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ. εἰ δὲ μή, τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ν, Ξ σημεία· ἴση ἄρα ἡ ΝΜ εὐθεῖα τῇ ΞΖ.

268 ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΑΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ, ὧν τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΑΜ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΕ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΝΛ τῇ ΞΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΞΖ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΜ τῇ ΕΖ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. νζ'. Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ, τῶν γενομένων τριγώνων τὸ μείζον μείζονα περίμετρον ἔχει, καὶ οὗ τριγώνου μείζων ἡ περίμετρος, καὶ αὐτὸ μείζον ἐστὶ. τετμήσθω κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος, καὶ γενέσθω ἐκ τῆς τομῆς τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα, μείζον δὲ τὸ ΑΓΔ, ὥστε τὴν μὲν ΕΑ τῆς ΑΖ μείζονα εἶναι, τὴν

δὲ ΓΑ τῆς ΑΔ μὴ ἐλάττονα. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓΔ περίμετρος τῆς ΑΕΖ περιμέτρου μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι μὲν αἱ ΓΔ, ΕΖ βάσεις, κοινὴ δὲ ἦκται ἡ ΒΑ ἐπὶ τὴν διχοτομίαν αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τοῦ ΑΓΔ ἔλαττον, ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ κα' θεωρήματι· ἡ μὲν ἄρα ΕΑ μεγίστη ἐστὶ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΖ ἐλαχίστη· καὶ ταῦτα γὰρ ἐδείχθη ιη' καὶ ιθ' θεωρήματι.

270 καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ, τοῖς ἀπὸ ΓΑ, ΑΔ ἴσα ἐστί, συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΕΑ, ΑΖ εὐθεῖα συναμφοτέρου τῆς ΓΑ, ΑΔ ἐλάττων ἐστὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα. προσκείσθωσαν αἱ ΕΖ, ΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕΖ περίμετρος ὅλης τῆς ΑΓΔ περιμέτρου ἐλάττων ἐστὶ. μείζων ἄρα ἡ τοῦ μείζονος περίμετρος. Καὶ γέγονε φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς σκαληνοῖς κώνοις τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μεγίστη μὲν ἡ τοῦ μεγίστου περιμέτρος, τουτέστι τοῦ ἰσοσκελοῦς, ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι τοῦ πρὸς ὀρθᾶς τῇ βάσει τοῦ κώνου, τῶν δ' ἄλλων αἰὲν τὸ μείζον μείζονα περιμέτρον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἔλαττον. Πάλιν ὑποκείσθω ἡ τοῦ ΓΑΔ τριγώνου περίμετρος μείζων εἶναι τῆς τοῦ ΕΑΖ. λέγω δὴ, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τοῦ ΕΑΖ μείζον ἐστίν. ἐπεὶ ἡ ΑΓΔ περίμετρος τῆς ΕΑΖ περιμέτρου μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΕΖ, λοιπὴ ἄρα συναμφοτέρος ἡ ΓΑ, ΑΔ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΖ μείζων ἐστὶ. καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΑ, ΑΔ τοῖς ἀπὸ ΕΑ, ΑΖ ἴσα· τῶν ἄρα ΓΑ, ΑΔ, ΕΑ, ΑΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΕΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΖ· ταῦτα γὰρ ἅπαντα προδέδεικται. ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΓΑΔ, ΕΑΖ βάσεις ἴσας ἔχει, ἔχει δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡγμένην τὴν αὐτήν, ἡ δὲ τοῦ ἐτέρου μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ τοῦ ἐτέρου μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, καὶ τὰ λοιπά, τὸ ἄρα ΕΑΖ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι· μείζον ἄρα τὸ ΓΑΔ τρίγωνον τοῦ ΕΑΖ [ὡς ἐδείχθη θεωρήματι ιθ' τοῦ πρώτου βιβλίου].

272 νη'. Τῶν ἴσων μὲν καὶ ὀρθῶν κώνων, ἀνομοίων δέ, ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν. ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοὶ καὶ ἴσοι, ἀνόμοιοι δέ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεία, ἄξονες δὲ οἱ ΑΗ, ΘΒ, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, βάσεις δὲ τῶν κώνων οἱ περὶ τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους κύκλοι. λέγω, ὅτι, ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ. ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὡς ἄρα ὁ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ὁ δὲ περὶ τὸ Η κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ.

274 ἔστω τῶν ΘΒ, ΑΗ μέση ἀνάλογον ἡ ΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ τε ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ καὶ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, τὸ ΒΕΖ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ, οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον, πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἀντιπέπονθεν ἄρα τὰ ἐκκείμενα τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν. νθ'. Ὡν κώνων ὀρθῶν ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν, οὗτοι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοί, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεία, ἄξονες δὲ αἱ ΑΗ, ΒΘ εὐθεῖαι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΕΒΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ. λέγω, ὅτι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις οἱ κῶνοι. γενέσθω, ὡς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ΒΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ΚΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ.

276 ὥστε ἐπεὶ τὰ ΑΓΔ, ΚΕΖ τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΓΔ

διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ, ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΕΚΖ. εἶχε δὲ καὶ τὸ ΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΚΖ διπλασίονα λόγον ἥπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΕΚΖ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτω τὸ ΕΒΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ, τουτέστιν ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΚΘ. καὶ ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ. καὶ εἰσὶν αἱ ΒΘ, ΑΗ ἄξονες τῶν κῶνων καὶ ἀντιπεπόνθασιν ταῖς βάσεσιν, τουτέστι τοῖς Η, Θ κύκλοις· οἱ ἄρα Α, Β κῶνοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν. ξ'.

278 (1n) Ἐὰν δύο κῶνων ὀρθῶν ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἥπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται. ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοί, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, βάσεις δὲ οἱ περὶ τὰ Η, Θ κέντρα κύκλοι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, ἐχέτω δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ. ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, ἀλλὰ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον. ὥστε ἐπεὶ οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσὶ διὰ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τοῦ ιβ' τῶν Στοιχείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἥπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ, ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστι πρὸς ΑΗ.

280 ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα· ὁ προέκειτο δεῖξαι. ξα'. Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον. καταγεγράφθωσαν πάλιν οἱ προκείμενοι κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. δεικτέον δὴ, ὅτι ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἔστω γάρ, ὡς ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ.

282 καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ· ὁ ἄρα ΚΗΓΔ κῶνος τῷ ΒΘΕΖ ἴσος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΔΓ, τουτέστι πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, τουτέστιν ἡ βάσις τοῦ ΑΗΓΔ κῶνου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΒΘΕΖ κῶνου, διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ξβ'. Οἱ ἰσοῦψεῖς κῶνοι ὀρθοὶ διπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους ἥπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα. καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὁ ΑΗ ἄξων τῷ ΒΘ ἴσος. λέγω, ὅτι ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ. ἐπεὶ γάρ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ἰσοῦψεῖς γάρ· καὶ ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

284 ξγ'. Ἐὰν ὀρθοὶ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχωσιν ἥπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα, ἰσοῦψεῖς ἔσονται οἱ κῶνοι. καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ

κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχειν ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΘ. κείσθω τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΚΓΔ τρίγωνον. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, ἴσον δὲ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, τουτέστιν ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον, οὕτως ὁ ΚΗΓΔ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ τῶν ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ κῶνων τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΚΓΔ, ΒΕΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἡ ἄρα Η βάσις τοῦ κῶνου πρὸς τὴν Θ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἐνὸς θεωρήματι.

286 ὡς δὲ ὁ ΚΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ καὶ ἡ ΑΗ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΚ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ. ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπειδὴ δὲ τὸ ΚΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, κατ' ἀντιπεπόνθησιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ. ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως καὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΚΗ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ζδ'. Τῶν ἀντιπεπονηθῶτων κῶνων ὀρθῶν τοῖς ἄξοσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ. λέγω, ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἔστω τῷ ΑΗΓΔ κῶνῳ ἰσοῦψῆς ὁ ΚΘΕΖ κῶνος. ἐπεὶ οὖν, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΘΚ, ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΚ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον.

288 ἀλλ' ὡς ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοῦψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον καὶ τοῦ ὄν ἔχει τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἐνὸς θεωρήματι· ὡς ἄρα τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν· ὃ προέκειτο δεῖξαι. ξε'. Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἀντιπεπόνθησιν οἱ κῶνοι τοῖς ἄξοσιν. ὑποκείσθω γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον εἶναι. λέγω, ὅτι, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐπεὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν, ὡς ἄρα τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ.

290 ἐπειδὴ δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοῦψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς ΚΕΖ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ. ἀλλ' ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ζς'. Τῶν ἀντιπεπονηθῶτων ὀρθῶν κῶνων ταῖς βάσεσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα πρὸς ἀλλήλα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ἀντιπεπονηθῶτως. καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. κείσθω τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΚΗ· οἱ ἄρα ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ ἰσοῦψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς αἱ βάσεις.

292 ἐπεὶ οὖν, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, ἀλλ' ὡς ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα

λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ἀλλ' ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ὁ δὲ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ ἰσοῦψῃ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς ΚΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

294 ξζ'. Καὶ ὧν κῶνων ὀρθῶν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τριπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα ἥπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν ἀντιπεπονητότως, οὗτοι ταῖς βάσεσιν ἀντιπεπόνθασιν. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς ἐχέτω τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΕΖ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΓΔ. λέγω δὴ, ὅτι, ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις τοῦ κῶνου πρὸς τὴν Η βάσιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ ἰσοῦψές τρίγωνον, τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ.

296 ἔχει δὲ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον ἰσοῦψῃ διπλασίονα λόγον ἥπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον. ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ὡς δὲ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ξη'. Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς πρὸς κῶνον ὀρθὸν διπλασίονα λόγον ἔχη ἥπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔξει ἥπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν. καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχειν ἥπερ ἡ Η βάσις τοῦ κῶνου πρὸς τὴν Θ βάσιν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΔΓ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῇ ΑΗ ἡ ΘΚ ἴση· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι ἰσοῦψεῖς ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

298 ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς δὲ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ, οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. [ἐπεὶ τοίνυν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς ἄρα ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΗ ἄξων πρὸς τὸν ΒΘ ἄξονα.] καὶ ἐπεὶ ἰσοῦψεῖς εἰσὶν οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη. ὡς δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, οὕτως ὁ τε ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον καὶ τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ· καὶ τὸ ΚΖΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, οὕτως ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖ· ἰσοῦψῃ γὰρ ἐστὶ τὰ τρίγωνα· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ξθ'.

300 (1n) Κἂν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχη ἥπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν, ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ βάσις τοῦ κῶνου πρὸς τὴν βάσιν. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ

τριπλασίονα λόγον ἔχέτω ἥ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ κείσθω πάλιν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΘΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὥς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἀλλ' ὥς τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ, οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ· καὶ ὁ ΚΘΕΖ κῶνος ἄρα πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον ἰσοῦψῃ διπλασίονα λόγον ἥπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὥς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον, οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ.

³⁰² ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἥπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.