

eul_wid: txs-ab

Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς · Pappus of Alexandria

Synagogue

Συναγωγή

Period: Ὀψιμαρχαία Late Antique
Dialect: Κοινή τεχνική Technical Koine
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

- 2.2 * γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι ἑκατοντάδος μετρεῖσθαι δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς. Ἐστῶσαν οὖν οἱ ἀριθμοὶ ν' ν' ν' μ' μ' λ'. ἔσσονται ἄρα οἱ πυθμένες ε' ε' ε' δ' γ'. ὁ ἄρα ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδων , ς. καὶ ἐπεὶ τὸ πλῆθος τῶν δεκάδων ἐστὶν ς' καὶ μετρούμενον ὑπὸ τετράδος λείπει δύο, ἔσται ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς [τῶν δεκάδων] μυριάδων ἀπλῶν ἑκατόν. καὶ ἐπεὶ ὁ ἐκ τῶν δεκάδων στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεὸν ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν ἐξ ἀρχῆς στερεόν, αἱ ἄρα μυριάδες ρ' ἐπὶ τὰς μονάδας , ς γενόμεναι ποιοῦσιν μυριάδας ξ' διπλᾶς, ὥστε ὁ ἐκ τῶν ν' ν' ν' μ' μ' λ' στερεὸς ἐστὶν μυριάδων ξ' διπλῶν. ιε'. Ἐστῶσαν δὴ πάλιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐφ' ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρεῖσθω δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα τοὺς ἀριθμούς. Γεγονέτω, καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους αὐτῶν μετρεῖσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος, καὶ ὑποκείσθω ὑπὸ ἑκάστον τῶν Β ἑκατοντάς ἢ α', καὶ καθὼ μετρεῖται ἕκαστος τῶν Β ὑπὸ τῆς ἑκατοντάδος ἔστωσαν οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ· πυθμένες ἄρα εἰσὶν οἱ ἐφ' ὧν τὰ Γ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β.
- 2.4 ὁ δὲ διὰ τῶν πυθμένων στερεὸς ἔστω ὁ Ε [τουτέστιν μονάδες ρκ']. δείκνυται οὖν διὰ τῶν γραμμῶν ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β στερεὸς μυριάδων διπλῶν ρκ', ἐπειδὴ καὶ ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β στερεὸς ἴσος ἐστὶν τῷ διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεῷ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν πυθμένων στερεόν, τουτέστιν διπλῇ μυριάς α' ἐπὶ τὰς ρκ' μονάδας. Ἄλλ' ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β μὴ μετρεῖσθω ὑπὸ τετράδος· μετρούμενος ἄρα λείπει δυάδα ἐξ ἀνάγκης (τοῦτο γὰρ προδεδεικται), ὥστε καὶ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενος ὑπὸ τετράδος· τὸ ἄρα πλῆθος τῶν ἑκατοντάδων μετρούμενον ὑπὸ δυάδος λείψει μίαν ἑκατοντάδα. ὁ τοίνυν διὰ τῶν ἑκατοντάδων στερεὸς ἔσται μυριάδων ρ' ὁμώνυμων τῷ Ζ, τουτέστι διπλῶν, ὥστε δῆλον ὅτι ὁ διὰ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β μυριάδες εἰσὶν ρ' ὁμώνυμοι τῷ Ζ γενόμεναι ἐπὶ τὸν Ε [τὰς ρκ' μονάδας]. γίνονται μυριάς μία δισχίλια διπλῶν μυριάδων. ις'. Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ μὲν Α ὑποκείσθω ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, οἷον μονάδες φ', ὁ δὲ Β ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, οἷον μονάδες μ', καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν ἀριθμὸν εἰπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς. Ἔστι δὲ φανερόν διὰ τῶν ἀριθμῶν· οἱ γὰρ ε' δ' πυθμένες αὐτῶν ὄντες [μο.
- 2.6 ε' καὶ μο. δ'] πολλαπλασιασθέντες ποιοῦσι μονάδας κ', χιλιάκις δὲ ὁ κ' ἀριθμὸς ποιεῖ μυριάδας δύο ποιοῦσας τὸν ὑπὸ τῶν Α Β γινόμενον. τὸ δὲ γραμμικὸν δῆλον ἐξ ὧν ἔδειξεν Ἀπολλώνιος.

ιζ'. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιη' θεωρήματος. Ἐστω πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ' ὧν τὰ Α, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλο πλῆθος ἀριθμῶν τὸ ἐφ' ὧν τὰ Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β στερεὸν εἶπεῖν μὴ πολλαπλασιάσαντα αὐτούς. Ἐστωσαν γὰρ πυθμένες τῶν μὲν ἐφ' ὧν τὰ Α οἱ ἐφ' ὧν τὰ Η, μονάδες α' καὶ β' καὶ γ' καὶ δ', τῶν δὲ ἐφ' ὧν τὰ Β οἱ ἐφ' ὧν τὰ Θ, μονάδες β' καὶ γ' καὶ δ' καὶ ε', καὶ ληφθέντος τοῦ ἐκ τῶν πυθμένων στερεοῦ [τῶν β' γ' δ' β' γ' δ' ε'], τουτέστιν τοῦ Ε, μονάδων ὄντος, βωπ', τὸ πλῆθος τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α προσλαβὼν τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β μετρεῖσθαι πρότερον ὑπὸ τετράδος, [κατὰ τὸν Ζ, μετρεῖ δὲ αὐτούς]. καὶ δείκνυσιν ὁ Ἀπολλώνιος τὸν ἐκ πάντων τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β στερεὸν μυριάδων τοσούτων, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμωνύμων τῷ Ζ ἀριθμῷ, τουτέστιν τριπλῶν μυριάδων, βωπ'. [μία γὰρ μυριάς ὁμώνυμος τῷ Ζ, τουτέστιν τριπλῇ, ἐπὶ τὸν Ε, τουτέστιν τὰ, βωπ', γενομένη ποιεῖ τὸν ἐκ τῶν στερεῶν ἀριθμὸν τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ὁμώνυμοι τῷ Ζ ἀριθμῷ.] Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α, προσλαβὼν τὸν διπλασίονα τοῦ πλήθους τῶν ἐφ' ὧν τὰ Β, μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλείπετω πρότερον ἕνα.

2.8 καὶ συνάγει ὁ Ἀπολλώνιος ὅτι ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ δεκαπλασίον τοῦ Ε, ἐὰν δὲ τὸ προειρημένον πλῆθος μετρούμενον ὑπὸ τετράδος καταλείπη δύο, ὁ ἐκ τῶν ἀριθμῶν στερεὸς τῶν ἐφ' ὧν τὰ Α Β μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ, ὅταν δὲ τρεῖς καταλειφθῶσιν, ἴσος ἐστὶν ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς μυριάδων τοσαύταις ὁμωνύμοις τῷ Ζ, ὅσος ἐστὶν ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Ε ἀριθμοῦ. ιη'. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιθ' θεωρήματος. Ἐστω τις ἀριθμὸς ὁ Α ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ ἄλλοι ὅσοιδηποῦν ἀριθμοὶ ἐλάσσονες δεκάδος οἷον οἱ Β Γ Δ Ε, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἶπεῖν. Ἐστω γὰρ καθ' ὃν μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῆς δεκάδος ὁ Ζ, τουτέστιν ὁ πυθμὴν τοῦ Α, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Ζ Β Γ Δ Ε στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις εἰσὶν οἱ Η. Καὶ ἔστι φανερόν διὰ τῶν ἀριθμῶν· τοῦ γὰρ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἶπεῖν, μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων γ' καὶ τοῦ Γ μονάδων δ' καὶ τοῦ Δ μονάδων ε' καὶ τοῦ Ε μονάδων ζ', ὁ ἐξ αὐτῶν στερεὸς γίνεται μονάδες, ζς'. ἀλλὰ καὶ τοῦ Ζ ὄντος μονάδων β', ὅς ἐστι πυθμὴν τοῦ Α, ὁ ἐκ τούτου καὶ τῶν Β Γ Δ Ε στερεὸς δεκάκις γεγόμενος ἔσται μονάδες, ζς', ἴσος τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ. τὸ δὲ γραμμικὸν ὑπὸ τοῦ Ἀπολλωνίου δέδεικται. ιθ'.

2.10 Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, ὧν ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Γ Δ Ε ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος ἔστω, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸν εἶπεῖν. Ἐστωσαν γὰρ τῶν Α Β πυθμένες οἱ Ζ Η· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς τοῦ ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεοῦ ἑκατονταπλάσιός ἐστιν. Φανερόν δὲ καὶ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων λ' καὶ τοῦ Γ μονάδων β' καὶ τοῦ Δ μονάδων γ' καὶ τοῦ Ε μονάδων δ' καὶ τοῦ Ζ μονάδων β' καὶ τοῦ Η μονάδων γ'· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεός ἐστιν μ α, δυ', ὁ δὲ ὑπὸ Ζ Η Γ Δ Ε μονάδες ρμδ', οὗτος δὲ γεγόμενος ἑκατοντάκις ποιεῖ μ α, δυ'. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τῶν Ἀπολλωνίου. κ'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ, καὶ ἔστω ἕκαστος αὐτῶν ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Δ Ε Ζ ἔστω ἐλάσσων δεκάδος, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ πυθμένες οἱ Η Θ Κ, καὶ εἰλήφθω ὁ ἐκ τῶν Η Θ Κ Δ Ε Ζ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεὸς ἴσος ἐστὶν χιλίοις τοῖς Ξ. Ἔστι φανερόν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος λόγου χάριν μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων λ' καὶ τοῦ Γ μονάδων μ' καὶ τοῦ Δ μονάδων β' καὶ τοῦ Ε μονάδων γ' καὶ τοῦ Ζ μονάδων δ', τοῦ δὲ Η μονάδων β' καὶ τοῦ Θ μονάδων γ' καὶ τοῦ Κ μονάδων δ'· ὁ γὰρ ὑπὸ Α Β Γ Δ Ε Ζ στερεός ἐστιν μυριάδων νζ' ἀπλῶν καὶ μονάδων, ζ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Η Θ Κ πυθμένων καὶ τῶν Δ Ε Ζ ἔσται

μονάδων φος', αὐται δὲ χιλιάκις γενόμεναι, τουτέστιν ὁ ἐκ πάντων στερεός, γίνεται μυριάδων ἀπλῶν νζ' καὶ μονάδων , ζ. κα'. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν πλείους τριῶν οἱ Α Β Γ Δ Ε, καὶ ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, τῶν δὲ Ζ Η Θ ἕκαστος ἔστω ἐλάσσων δεκάδος.

2.12 Τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε πρότερον μετρεῖσθω ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Ο, καὶ ἔστωσαν τῶν Α Β Γ Δ Ε πυθμένες οἱ Κ Λ Μ Ν Ξ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεὸς ἴσος ἐστὶν μυριάσιν ὁμωνύμοις τῷ Ο ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ στερεῷ τῷ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ. Ἔστι δὲ φανερόν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων ι' καὶ τοῦ Β μονάδων κ' καὶ τοῦ Γ μονάδων λ' καὶ τοῦ Δ μονάδων μ', καὶ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων ὄντων μονάδων α' καὶ β' καὶ γ' καὶ δ'· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεός ἐστὶν ἀπλῶν μυριάδων κδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ μυριάδων ἀπλῶν ρμδ', ὁ δὲ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν πυθμένων μονάδων κδ'· οὗτος δὲ γενόμενος ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ, ὄντα μονάδων ζ', ποιεῖ μονάδας ρμδ', ὅσαι μυριάδες ἀπλαῖ εἰσὶν τοῦ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ζ Η Θ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τετράδα ἅπαξ μετρεῖν τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ. Ἀλλὰ δὴ τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ Ε μὴ μετρεῖσθω ὑπὸ τετράδος μετρούμενον δὴ ἦτοι α' ἢ β' ἢ γ' λείψει. εἰ μὲν οὖν ἓνα λείψει, ἔσται ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Ο, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ στερεὸς ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ γενόμενος δεκάκις, εἰ δὲ δύο λείψει, ἑκατοντάκις [γενόμενος ὁ εἰρημένος στερεός]. εἰ δὲ τρεῖς λείψει, ὅσων ὁ ἐκ τῶν Κ Λ Μ Ν Ξ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Ζ Η Θ χιλιάκις γενόμενος ἔσται μονάδων, τοσούτων μυριάδων ὁμωνύμων τῷ Ο.

2.14 τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον. κβ'. Ἔστω ὁ μὲν Α ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Β Γ Δ ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸν εἰπεῖν. Κεῖσθω γὰρ τοῦ μὲν Α πυθμὴν ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Ε Β Γ Δ ὁ Ζ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ στερεὸς ἑκατοντάκις ἐστὶν ὁ Ζ. Φανερόν δὲ καὶ τοῦτο διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὑποκειμένου, φέρ' εἰπεῖν, μονάδων τ' καὶ τοῦ Β μονάδων γ' καὶ τοῦ Γ μονάδων δ' καὶ τοῦ Δ μονάδων ε'· ὁ μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν Α Β Γ Δ ἐστὶν μ α , η, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ε Β Γ Δ ἐστὶν μονάδων ρπ'. οὗτος δὲ γενόμενος ἑκατοντάκις ἔσται μ α , η. τὸ δὲ γραμμικὸν ἐκ τοῦ στοιχείου δῆλον. κγ'. Ἐπὶ δὲ τοῦ κδ' θεωρήματος. Τοῦ Α ὑποκειμένου λόγου χάριν μονάδων ζ' καὶ τοῦ Β μονάδων τ' καὶ τοῦ Γ μονάδων β' τοῦ δὲ Δ μονάδων γ' καὶ τοῦ Ε μονάδων δ', ὁ στερεὸς ἐξ αὐτῶν ἔσται μυριάδων ἀπλῶν ρμδ', ἐπεὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἅπαξ [κατὰ τὸν Κ], ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ Η πυθμένων καὶ τῶν Γ Δ Ε ἐστὶν μονάδων ρμδ' [ὁ Θ στερεός· ἀπλῶν οὖν μυριάδων ρμδ' ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεός]. Ἐὰν δὲ τὸ διπλάσιον τοῦ πλήθους τῶν Α Β μὴ μετρηται ὑπὸ τετράδος, δῆλον ὅτι μετρούμενον κατὰ τὸν Κ λείψει δύο· τοῦτο γὰρ ἀνώτερον ἐδείχθη. διὰ δὴ τοῦτο [ἐκ τοῦ λείπεσθαι δύο] μυριάδες εἰσὶν ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς ὁ Θ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Ζ Η Γ Δ Ε στερεῷ ἐπὶ τὰς ἑκατὸν μυριάδας ὁμωνύμους τῷ Κ.

2.16 τὸ γραμμικὸν ὡς Ἀπολλώνιος. κδ'. Ἐπὶ δὲ τοῦ κε' θεωρήματος. Ἔστω τῶν μὲν Α Β ἑκάτερος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, ἕκαστος δὲ τῶν Γ Δ Ε [ἔστω] ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐξ αὐτῶν στερεὸν εἰπεῖν. Ἔστωσαν γὰρ τῶν Α Β πυθμένες οἱ Θ Κ, καὶ τῷ ἐκ τῶν Θ Κ Γ Δ Ε στερεῷ ἴσος ἔστω ὁ Λ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεὸς ἴσος ἐστὶν ἑκατὸν τοῖς Λ. Ἔστι δὲ φανερόν διὰ τῶν ἀριθμῶν, τοῦ Α ὄντος μονάδων κ' καὶ τοῦ Β μονάδων κ', καὶ τοῦ Γ μονάδων ε' καὶ τοῦ Δ μονάδων ζ' καὶ τοῦ Ε μονάδων ζ', καὶ τῶν Θ Κ πυθμένων ὄντων μονάδων β'· ὁ γὰρ ὑπὸ τῶν Θ Κ Γ Δ Ε γίνεται στερεὸς μονάδων ωμ', οὗτος δὲ ἑκατοντάκις γενόμενος ἔσται μυριάδων η' μονάδων , δ, ἴσος τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ ἀριθμῷ. κε'. Τὸ δ' ἐπὶ πᾶσι θεωρήμα κς' πρότασιν ἔχει καὶ ἀπόδειξιν τοιαύτην. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ἢ πλείους οἱ Α Β, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν χιλιάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ ὅσοιδήποτε οἱ Γ Δ Ε, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἑκατοντάδος μετρούμενος δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ

ἄλλοι πάλιν ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Ζ Η Θ, ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, καὶ δέον ἔστω τὸν ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸν εἰπεῖν. Ἐστῶσαν γὰρ τῶν Α Β Γ Δ Ε πυθμένες οἱ Λ Μ Ν Ξ Ο. ὁ δὲ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετὰ τοῦ τῶν Γ Δ Ε ἀπλοῦ ἀριθμοῦ ἦτοι μετρεῖται ὑπὸ τετράδος ἢ οὐ. Μετρεῖσθω πρότερον ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ, καὶ ὑποτετάχθωσαν τοῖς μὲν Α Β ἑκατοντάδες αἱ Π Ρ, τοῖς δὲ Γ Δ Ε δεκάδες αἱ Σ Τ Υ [καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα τοῦ πλήθους τῶν Π Ρ μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Σ Τ Υ μετρεῖται ὑπὸ τετράδος κατὰ τὸν Κ].

2.18 καὶ φανερόν ὅτι ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε στερεῷ. εἰλήφθω δὴ ὁ ἐκ τῶν Λ Μ Ν Ξ Ο Ζ Η Θ στερεὸς καὶ ἔστω ὁ Φ· ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται ὁμώνυμοι τῷ Κ ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ Φ. τοῦτο δὲ γραμμικῶς Ἀπολλώνιος ἀπέδειξεν. Ἐὰν δὲ ὁ διπλάσιος τοῦ πλήθους τῶν Α Β μετὰ τοῦ πλήθους τῶν Γ Δ Ε μὴ μετρήται ὑπὸ τετράδος, μετρούμενος ἄρα κατὰ τὸν Κ λείψει ἢ ἓνα ἢ δύο ἢ τρεῖς. εἰ μὲν οὖν ἓνα λείψει, ὁ ἐκ τῶν Π Ρ Σ Τ Υ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν δέκα ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ δύο, μυριάδες ἑκατὸν ὁμώνυμοι τῷ Κ, εἰ δὲ τρεῖς, μυριάδες χίλια ὁμώνυμοι τῷ Κ. καὶ δηλὸν ἐκ τῶν γεγραμμένων ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ στερεὸς μυριάδες εἰσὶν τοσαῦται, ὅσος ὁ δεκαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ ἀριθμῷ, ἢ ὅσος ὁ ἑκατονταπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ, ἢ ὅσος ὁ χιλιαπλάσιος τοῦ Φ, ὁμώνυμοι τῷ Κ. Τούτου δὲ [τοῦ θεωρήματος] προτεθεωρημένου πρόδηλον, πῶς ἔστιν τὸν δοθέντα στίχον πολλαπλασιάσαι καὶ εἰπεῖν τὸν γενόμενον ἀριθμὸν ἐκ τοῦ τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ πρῶτον τῶν γραμμάτων ἐπὶ τὸν δεύτερον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ δεύτερον τῶν γραμμάτων πολλαπλασιασθῆναι καὶ τὸν γενόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀριθμὸν ὃν εἴληφε τὸ τρίτον γράμμα καὶ κατὰ τὸ ἐξῆς περαίνεισθαι μέχρι τοῦ διεξοδεύεσθαι τὸν στίχον, ὃν εἶπεν Ἀπολλώνιος ἐν ἀρχῇ [κατὰ τὸν στίχον] οὕτως. Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι (τὸ δὲ κλεῖτέ φησιν ἀντὶ τοῦ ὑπομνήσατε).

2.20 Ἐπεὶ οὖν γράμματά ἐστιν λη' τοῦ στίχου, ταῦτα δὲ περιέχει ἀριθμοὺς δέκα τοὺς ρ' τ' ζ' τ' ρ' τ' ζ' χ' υ' ρ', ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἐστὶν χιλιάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ ἑκατοντάδος, καὶ ἀριθμοὺς ἰζ' τοὺς μ' ι' ο' κ' λ' ι' κ' ο' ξ' ο' ο' ν' ν' ν' κ' ο' ι', ὧν ἕκαστος ἐλάσσων μὲν ἐστὶν ἑκατοντάδος μετρεῖται δὲ ὑπὸ δεκάδος, καὶ τοὺς λοιποὺς [σὺν ταῖς μονάσιν] ια' τοὺς α' ε' δ' ε' ε' α' ε' ε' ε' α' α', ὧν ἕκαστος ἐλάσσων δεκάδος, ἐὰν ἄρα [τοὺς δέκα ἀριθμοὺς διπλασιάσωμεν καὶ τοὺς γενομένους κ' προσθῶμεν τοῖς εἰρημένοις ἀπλῶς ἀριθμοῖς ἑπτακαίδεκα, τὰ γενόμενα ὁμοῦ λζ' ἔξομεν τῶν ὑπ' αὐτοῦ γενομένων ἀναλόγων, κᾶν] τοῖς μὲν δέκα ἀριθμοῖς ὑποτάξωμεν ἰσαρίθμους δέκα κατὰ τάξιν ἑκατοντάδος, τοῖς δὲ ἰζ' ὁμοίως ὑποτάξωμεν δεκάδας ἰζ', φανερόν ἐκ τοῦ ἀνώτερον λογιστικοῦ θεωρήματος ἰβ' ὅτι δέκα ἑκατοντάδες μετὰ τῶν ἰζ' δεκάδων ποιοῦσι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα. [αἱ γὰρ δέκα ἑκατοντάδες δις γενόμεναι, τουτέστιν κ', καὶ προσλαβοῦσαι τὰς ἰζ' δεκάδας γίνονται λζ'. ἀναλόγων ὄντα· μερισθέντα δὲ τὰ λζ' εἰς τὸν δ' ποιεῖ τὸν ἐκ τοῦ μερισμοῦ θ' καὶ καταλείπεται α', ὡς εἶναι μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα τὰ ἐκ τῶν ἑκατοντάδων δέκα καὶ δεκάδων ἰζ'.] Ἐπεὶ δὲ καὶ πυθμένες ὁμοῦ τῶν μετρούμενων ἀριθμῶν ὑπὸ ἑκατοντάδος καὶ τῶν μετρούμενων ὑπὸ δεκάδος εἰσὶν οἱ ὑποκείμενοι κζ' α' γ' β' γ' α' γ' β' γ' δ' α' δ' α' ζ' β' γ' α' β' ζ' ζ' ζ' ε' ε' β' ζ' α', ἀλλὰ καὶ τῶν ἐλασσόνων δεκάδος εἰσὶν ια', τουτέστιν ἀριθμοὶ οἱ α' ε' δ' ε' ε' α' ε' ε' α' α', ἐὰν τὸν ἐκ τούτων τῶν ια' καὶ τὸν ἐκ τῶν κζ' πυθμένων στερεὸν δι' ἀλλήλων πολλαπλασιάσωμεν, ἔσται ὁ στερεὸς μυριάδων τετραπλῶν ιθ' καὶ τριπλῶν, ζλζ' καὶ διπλῶν, ηυπ'.

2.22 [Ἴσος δὲ τούτῳ συνάγεται καὶ ὁ διὰ τῶν τοῦ στίχου πυθμένων ἅμα ταῖς μονάσιν Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι, οἳ εἰσὶν α' α' γ' ε' δ' α' δ' ζ' β' β' γ' ε' α' γ' ε' β' α' α' γ' ζ' β' ε' ζ' ζ' ζ' ε' ε' ε' ε' α' β' ζ' δ' α' α' α'. Αὗται δὲ συμπολλαπλασιαζόμεναι ἐπὶ τὸν ἐκ τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων στερεόν, τουτέστι τὰς προκειμένας μυριάδας ἐνναπλᾶς δέκα, ποιοῦσιν μυριάδας τρισκαίδεκαπλᾶς ρρζ', δωδεκαπλᾶς τξη', ἐνδεκαπλᾶς, δω'.

- 2.24. (17) [ἐνναπλαῖ γὰρ μυριάδες ἐπὶ μὲν τετραπλαῖς ποιοῦσι τρισκαίδεκαπλαῖς, ἐπὶ δὲ τριπλαῖς γενόμεναι ποιοῦσιν δωδεκαπλαῖς, καὶ ὁμοίως ἐπὶ διπλαῖς πολλαπλασιασθεῖσαι γίνονται ἐνδεκαπλαῖ ***] ταῦτα γὰρ πάντα προδεδείκται. Φατέον οὖν τὸν ἐξ ἀρχῆς στίχον Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι πολλαπλασιασθέντα δι' ἀλλήλων δύνασθαι μυριάδων πλήθος τρισκαίδεκαπλαῖων ρρς', δωδεκαπλαῖων τζη', ἐνδεκαπλαῖων , δω', συμφώνως τοῖς ὑπὸ Ἀπολλωνίου κατὰ τὴν μέθοδον ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου προγεγραμμένοις. Πάλιν δεδόσθω στίχος ὁ ὑποκείμενος Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου, καὶ εἰλήφθω τά τε ἀνάλογα καὶ οἱ πυθμένες ἅμα ταῖς μονάσιν ὥσπερ ὑπόκεινται δ' ἡ' ε' α' ε' α' ε' α' δ' ε' θ' ε' α' δ' ἡ' δ' ἡ' γ' ε' α' ζ' β' α' γ' γ' α' ζ' β' α' α' ἡ' ζ' δ', καὶ πεπολλαπλασιάσθωσαν δι' ἀλλήλων οἱ ἀριθμοί· γίνονται τετραπλαῖ μυριάδες δύο, τριπλαῖ , αωμθ', διπλαῖ , δυβ', ἀπλαῖ , εχ'.
- 2.26 Τῶν δὴ ἀναλόγων κβ' καὶ μετρουμένων ὑπὸ τετράδος [καὶ δυάδος ὑπολειπομένης] ὅσαι μονάδες γεγόνασιν [μέτρῳ εἰς ε'], τοσαυτάκις αὐξήσομεν τὸν ἐκβάντα διὰ τε τῶν μονάδων καὶ [διὰ τῶν πεπολλαπλασιασμένων] πυθμένων ἀριθμόν (λέγω δὲ τοσαυτάκις κατὰ μυριάδων αὕξησιν), ὥστε γίνεσθαι τὸν πρότερον ὑπάρχοντα μυριάδων τετραπλαῖων δύο, τριπλαῖων , αωμθ', διπλαῖων , δυβ' καὶ ἀπλαῖων , εχ', νῦν ἐνναπλαῖων β', ὀκταπλαῖων , αωμθ', ἐπταπλαῖων , δυβ', ἑξαπλαῖων , εχ'.
- 2.28. (13) Ὅτι δὲ περιλέλειπται τῶν ἀναλόγων δύο, ἅπερ ἐστὶ τῆς ἑκατοντάδος, τοσαυτάκις αὐξήσομεν τὸν εἰρημένον ἀριθμόν, ὥστε εἶναι μυριάδων ἐνναπλαῖων σιη', ὀκταπλαῖων , δζμδ', ἐπταπλαῖων σνς'. Ῥητέον οὖν τὸν ἐξ ἀρχῆς στίχον Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου πολλαπλασιασθέντα δύνασθαι μυριάδων πλήθος ἐνναπλαῖων σιη', ὀκταπλαῖων , δζμδ', ἐπταπλαῖων σνς'. ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Γ.
- 3.30. (1τ) Περιέχει δὲ προβλήματα γεωμετρικὰ ἐπίπεδά τε καὶ στερεά. Οἱ τὰ ἐν γεωμετρίᾳ ζητούμενα βουλόμενοι τεχνικώτερον διακρίνειν, ὧ κράτιστε Πανδροσίον, πρόβλημα μὲν ἀξιοῦσι καλεῖν ἐφ' οὗ προβάλλεται τι ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, θεώρημα δὲ ἐν ᾧ τινῶν ὑποκειμένων τὸ ἐπόμενον αὐτοῖς καὶ πάντως ἐπισυμβαῖνον θεωρεῖται, τῶν παλαιῶν τῶν μὲν προβλήματα πάντα, τῶν δὲ θεωρήματα εἶναι φασκόντων. ὁ μὲν οὖν τὸ θεώρημα προτείνων συνιδὼν ὄντιν οὖν τρόπον τὸ ἀκόλουθον τούτῳ ἀξιοῖ ζητεῖν καὶ οὐκ ἂν ἄλλως ὑγιῶς προτεῖνοι, ὁ δὲ τὸ πρόβλημα προτείνων [ἂν μὲν ἀμαθὴς ἦ καὶ παντάπασιν ἰδιώτης], κἂν ἀδύνατόν πως κατασκευασθῆναι προστάξῃ, σύγγνωστός ἐστιν καὶ ἀνυπεύθυνος. τοῦ γὰρ ζητοῦντος ἔργον καὶ τοῦτο διορίσαι, τό τε δυνατόν καὶ τὸ ἀδύνατον, κἂν ἦ δυνατόν, πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατόν. ἐὰν δὲ προσποιούμενος ἦ τὰ μαθήματά πως ἀπείρως προβάλλων, οὐκ ἔστιν αἰτίας ἔξω. πρῶν γοῦν τινες τῶν τὰ μαθήματα προσποιουμένων εἰδέναι διὰ σοῦ τὰς τῶν προβλημάτων προτάσεις ἀμαθῶς ἡμῖν ὥρισαν. περὶ ὧν ἔδει καὶ τῶν παραπλησίων αὐτοῖς ἀποδείξεις τινὰς ἡμᾶς εἰπεῖν εἰς ὠφέλειαν σὴν τε καὶ τῶν φιλομαθούντων ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ. τὸ μὲν οὖν πρῶτον τῶν προβλημάτων μέγας τις γεωμέτρης εἶναι δοκῶν ὥρισεν ἀμαθῶς· τὸ γὰρ δύο δοθειῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον ἐν συνεχεῖ ἀναλογία λαβεῖν ἔφασκεν εἰδέναι δι' ἐπιπέδου θεωρίας, ἡξίου δὲ καὶ ἡμᾶς ὁ ἀνὴρ ἐπισκεψαμένους ἀποκρίνασθαι περὶ τῆς ὑπ' αὐτοῦ γενηθείσης κατασκευῆς, ἥτις ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον.
- 3.32 α'. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AB AG πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ B τῇ AG παράλληλος ἡ BD, καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ BA, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ, καὶ συμπίπττω τῇ BA κατὰ τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E τῇ AG παράλληλος ἡ ΕΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ BD, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ BE παράλληλος ἡ ΔΗ, καὶ κείσθωσαν τῇ BA ἴσαι αἱ ΔN ΝΛ ΛΞ ΞΚ, καὶ διὰ τῶν N Λ Ξ Κ σημείων τῇ BE παράλληλοι αἱ NO ΛΜ ΞΠ ΚΘ, καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ KP, καὶ τετμήσθω δῖχα ἡ KP κατὰ τὸ Σ, καὶ ὥς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, ὥς δὲ ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, οὕτως ἡ ΘΤ πρὸς ΘΦ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΞΠ τῇ AB ἴση ἡ ΧΞ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΚ καὶ ἡ ΧΦ, καὶ ἀπὸ τοῦ Σ τῇ ΧΦ

παράλληλος ἡ ΣΨ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ψ τῇ ΚΞ παράλληλος ἡ ΨΩ, καὶ ἔστω ὡς ΛΜ πρὸς ΜΩ, οὕτως ἡ ΩΜ πρὸς ΜΑ, ὡς δὲ ἡ ΩΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως ἡ Α, Μ πρὸς ΜΒ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΟΝ τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΝΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ, Λ καὶ ἡ Γ, Β, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ω τῇ Β, Γ, παράλληλος ἡ ΩΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ, τῇ ΛΝ παράλληλος ἡ Δ, Ε, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ΗΕ, πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ Ε, Η πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ Ζ, Η πρὸς ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θ, Γ, καὶ ἤχθωσαν τῇ Θ, Γ παράλληλοι αἱ Ζ, Κ, Ε, Λ, ἀπὸ τῶν Κ, Λ, ταῖς ΑΓ ΒΔ παράλληλοι αἱ Κ, Μ, Λ, Ν, δεῖξαι ὅτι τῶν ΑΓ ΒΔ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ Μ, Κ, Ν, Λ. Ταῦτα μὲν οὖν ἐκεῖνος γράψας ἐξέδωκεν ἡμῖν μὴ περιέχοντα καὶ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου προβλήματος.

3.34 ἐπειδὴ δὲ καὶ Ἰέριος ὁ φιλόσοφος καὶ ἄλλοι πολλοὶ τῶν αὐτοῦ μὲν ἐταίρων ἐμοὶ δὲ γνωρίμων ἠξίωσαν ἀποκρίνασθαι με τέως περὶ τῆς προκειμένης κατασκευῆς, ἐκείνου τὴν ἀπόδειξιν ἐπαγγειλαμένου ποιήσασθαι, τοσοῦτον ἔχω τὸ νῦν εἰπεῖν, ὡς οὐ δεόντως, ἀλλ' ἀπείρως ἐχρήσατο τῇ κατασκευῇ. διχοτομήσας γὰρ τὴν ΡΚ εὐθείαν τῷ Σ καὶ ποιήσας ὡς μὲν τὴν ΚΘ εὐθείαν πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως τὴν ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, ἐποίησεν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ τὴν ΤΘ πρὸς τὴν ΘΦ. πᾶσα δὲ ἀνάγκη μήτ' ἐκεῖνον εὐρίσκειν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ τρίτου λόγου, ὡς τὸ Φ, μήθ' ἡμᾶς. τῆς δὲ τοιαύτης ἀπορίας παρὰ τὴν αὐτοῦ αἰτίαν ἐπακολουθούσης ἐνεφάνισεν ἑαυτὸν μηδὲ τοῦτο συνιδόντα τὸ ἀκόλουθον. ἀδυνάτου γὰρ ὄντος ὀρισθῆναι τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ τοῦ τρίτου λόγου, μὴ πρότερον ὑποτεθέντος τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ, τουτέστιν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὐ μόνον αὐτὸς πειρᾶται ζητεῖν τὸ ἀδύνατον, ἀλλὰ καὶ ἡμᾶς ἀξιοῖ. ὑποτεθέντος μὲντοι τοῦ λόγου τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ, τουτέστιν ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ δοθείσης τῆς ΚΘ, δέδοται ἡ ἐλάσσων εὐθεῖα τοῦ τρίτου λόγου. καὶ δοθέν ἐστὶν τὸ Θ σημεῖον· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ἕτερον πέρας τῆς ἐλαχίστης. καὶ ὅτι ἦτοι μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ ἢ μεταξὺ τῶν Ρ Τ δῆλόν ἐστιν. [ὅτι γὰρ καὶ τὸ Τ μεταξὺ πίπτει τῶν Ρ Σ δεῖξομεν, καὶ πρότερον ὅτι τὸ Φ σημεῖον ποτὲ μὲν μεταξὺ τῶν Θ Ρ ποτὲ δὲ μεταξὺ τῶν Ρ Τ παρὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΚΘ δοθεῖσα πρὸς τὴν ΘΡ.

3.36] Ὑποκείσθω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος πρότερον διπλάσιος [τῆς ΚΘ πρὸς τὸν ΘΡ, τουτέστιν τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἢ τῆς ΒΔ πρὸς ΑΓ]· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ ὃν ἔχει τὰ β' πρὸς τὸ α', τουτέστιν ὃν δ' πρὸς β' καὶ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς ΘΣ λόγος ἐστὶν ὃν δ' πρὸς γ' καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, τουτέστιν ὡς δ' πρὸς γ', οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς ΘΤ, τουτέστιν ὡς γ' πρὸς β' καὶ δ'. ὡς δὲ καὶ τὰ γ' πρὸς τὰ β' καὶ δ', οὕτως αὐτὰ τὰ β' δ' πρὸς ἄλλην [ἐὰν γένηται, ἔσται πρὸς] ἐλάσσονα τῶν δύο μονάδων τῆς ΘΡ, ὥστε τὴν ἐλάσσονα εὐθεῖαν τοῦ τρίτου λόγου [καὶ πασῶν ἐλαχίστην] ἐλάσσονα εἶναι τῆς ΘΡ, καὶ τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ, μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ. Ἀλλὰ δὴ ὁ δοθεὶς λόγος ἔστω τετραπλάσιος· λόγος ἄρα τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ ὃν ἔχει τὰ η' πρὸς β' καὶ τῆς ΘΚ ἄρα πρὸς ΘΣ λόγος ὃν ἔχει τὰ η' πρὸς τὰ ε'. καὶ ἔστιν ὡς τὰ η' πρὸς τὰ ε', οὕτως τὰ ε' πρὸς τὰ γ' καὶ η'' ὡς δὲ τὰ ε' πρὸς τὰ γ' καὶ τὸ η'', οὕτως τὰ γ' καὶ τὸ η'' πρὸς ἐλάσσονα τῶν δύο, ὥστε πάλιν ἡ τομὴ τοῦ τρίτου λόγου μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ. Πάλιν ὑποκείσθω λόγος τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΡ πενταπλάσιος· λόγος ἄρα τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ ὃν δέκα πρὸς δύο· καὶ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς τὴν ΘΣ λόγος ἐστὶν ὃν τὰ ι' πρὸς τὰ ζ'. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὰ ι' πρὸς τὰ ζ', οὕτως αὐτὰ τὰ ζ' πρὸς τὰ γ' [?] ι'' ὡς δὲ τὰ ζ' πρὸς τὰ γ' [?] ι'', οὕτως αὐτὰ τὰ γ' [?] ι'' πρὸς μείζονά τινα τῶν δύο.

3.38 καὶ ἔστιν ἡ ΘΡ αὐτῶν τῶν δύο· μεταξὺ ἄρα τῶν Ρ Τ τὸ σημεῖον πίπτει τῆς τομῆς τοῦ τρίτου λόγου. Καὶ δῆλον ὡς πάντες μὲν οἱ ἐλάσσονες τοῦ τετραπλάσιου λόγου ποιοῦσιν τὴν τοιαύτην τομὴν μεταξὺ τῶν Ρ Θ, πάντες δὲ οἱ μείζους τοῦ πενταπλάσιου ποιοῦσι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μεταξὺ τῶν Ρ Τ, ὡς καὶ λῆμμα περὶ τῆς τοιαύτης ἀναλογίας χρήσιμον ὑπέταξα. Ἐπεὶ οὖν ἐδείξαμεν τὸ τῆς τομῆς σημεῖον, ὡς τὸ Φ, ποτὲ μὲν μεταξὺ πίπτει τῶν Θ Ρ ποτὲ δὲ μεταξὺ τῶν Ρ Τ, τοῦ τοιούτου μηδαμῶς ὑπ' αὐτοῦ θεωρηθέντος δι' ἣν εἵπομεν αἰτίαν [αὐτὸς δὲ λέγει δεικνύναι τὸ προκείμενον, ἐὰν τε μεταξὺ τῶν Θ Ρ ἢ τὸ Φ σημεῖον ἐὰν τε μεταξὺ τῶν Ρ Τ],

ἐκεῖνο χρή πρὸ πάντων σκοπεῖν ὅτι, ὅπου ἂν λάβῃ τὸ Φ, ἥτοι κάτω τοῦ Ρ ἢ ἄνω, οὐκ ἔσται ὡς ἡ ΣΘ πρὸς ΘΤ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως καὶ ἡ ΤΘ πρὸς ΘΡ. ἐὰν οὖν λέγῃ “γεγενήσθω ὡς μὲν ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ ἡ ΤΘ πρὸς τὴν ΘΡ,” αὐτόθεν ἐλέγχεται τὸ ζητούμενον ὁμολογούμενον λαβών. ἐκβληθείσης γὰρ τῆς ΞΚ καὶ ἴσης τεθείσης τῇ ΞΚ τῆς ΚΜ α, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς Μ α Θ καὶ παραλλήλων ἀχθεισῶν τῇ ΚΜ α διὰ τῶν Σ καὶ Τ καὶ Ρ σημείων, γεγονός ἔσται τὸ ζητούμενον καὶ δῆλόν πως. ἔσται γὰρ καὶ ὡς ἡ ΚΜ α πρὸς ΣΜ β, οὕτως ἡ ΣΜ β πρὸς ΤΜ Γ καὶ ἡ ΤΜ Γ πρὸς τὴν ΡΜ δ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΚΜ α τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΚΡ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΚΘ, ὥστε καὶ τὴν ΑΓ ἴσην εἶναι τῇ ΡΜ δ καὶ ἠυρῆσθαι δύο τῶν ΑΓ ΒΔ, τουτέστιν δύο τῶν ΚΜ α ΡΜ δ, δύο μέσας ἀνάλογον τὰς ΣΜ β ΤΜ Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

3.40 εὐθείας γὰρ οὔσης τῆς ΘΚ καὶ σημείου ἐπ’ αὐτῆς τοῦ Ρ, ἀδύνατόν ἐστι δι’ ἐπιπέδου θεωρίας λαβεῖν μεταξὺ τῶν Ρ Κ δύο σημεία ὡς τὰ Τ Σ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, οὕτως τὴν ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ τὴν ΤΘ πρὸς τὴν ΘΡ. ὥστε, κἂν τὸ Ζ λάβῃ ἀντὶ τοῦ Σ, καὶ οὕτως ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα· στερεὸν γὰρ ἐστὶν τῇ φύσει. διὰ τοῦτο δέ, οἶμαι, καὶ αὐτὸς εἰδὼς ὅτι τὸ ζητούμενον ὁμολογούμενον λαμβάνεται, οὐκ ἐτόλμησεν εἰπεῖν “τὸ ἕτερον πέρας τῆς ἐλαχίστης εὐθείας ἔστω τὸ Ρ,” ἀνωτέρω δέ, τουτέστι μεταξὺ τῶν Ρ Θ, λαβὼν αὐτὸ κατὰ τὸ Φ, ἀποπληροῖ τὰ λοιπὰ τῆς κατασκευῆς ὡς βούλεται καὶ οὐδὲν ἥττον εἰς τὸ ἐξ ἀρχῆς ἄπορον ἐμπίπτει λανθανόμενος. οὐ γὰρ ἐκὼν ψευδογραφεῖ διὰ πλειόνων εἰς ἀπάτην τῶν ἐντυγχανόντων, ἀλλ’ ἐαυτὸν παραλογιζόμενος, ὡς δειξῶ πρότερον κατὰ τὸν ὑγιῆ τρόπον ἐφοδεύσας τὸ προκείμενον [καὶ ὕστερον ἐλέγχων αὐτοῦ τὴν ὑπόθεσιν μὴ ὑγιῶς εἰλημμένην]. Ἐπεὶ τοίνυν δοθεῖς ἐστὶν ὁ τῆς ΚΘ πρὸς ΘΡ λόγος καὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΘΚ (τοῦτο γὰρ ὑποκεῖσθαι δεῖ), δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΡ καὶ λοιπὴ ἡ ΡΚ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΣΡ ἡμίσεια οὔσα τῆς ΡΚ· ἦν δὲ καὶ ἡ ΡΘ δοθεῖσα· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΣ δοθεῖσά ἐστὶν, ὥστε καὶ ὁ λόγος τῆς ΚΘ πρὸς ΘΣ δοθεῖς ἐστὶν.

3.42 καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΣ, ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΘΤ, καὶ δοθεῖσα δέδεικται ἡ ΘΣ, δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΤΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΦ δοθεῖσα ἔσται, ὥστε καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ΘΡ ΘΦ εὐθειῶν δοθεῖσά ἐστὶν. εὐρήσθω οὖν τὸ Φ μεταξὺ τῶν Θ Ρ, ὡς καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ δέδοται ἡ ΦΡ διαφορὰ καὶ ἡ τὰ Ρ Χ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἴση οὔσα τῇ ΞΚ, δοθὲν ἄρα τὸ ΦΧΡ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει. δοθεῖσα ἄρα ἡ ὑπὸ ΡΦΧ γωνία, καὶ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΚΣΨ ἐκτὸς γωνίᾳ· ἐκβληθείσης ἄρα καὶ τῆς ΩΨ ἐπὶ τὸ Ζ, δοθὲν ἔσται τὸ ΣΖΨ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἶδει. ἀλλὰ καὶ τῷ μεγέθει [οὕτως· ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΡΚ ΡΧ, δοθεῖσα ἔσται καὶ ἡ ΧΚ. καὶ λόγος ἐστὶν δοθεῖς τῆς ΧΚ πρὸς τὴν ΚΨ (ὁ αὐτὸς γὰρ ἐστὶν τῷ τῆς ΦΚ πρὸς τὴν ΚΣ λόγῳ δοθέντι)· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΨΚ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΨΣ δοθεῖσά ἐστὶν, ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ ΦΚ πρὸς τὴν ΚΣ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΨΣ· καὶ δοθεῖσα δέδεικται ἡ ΦΧ· δοθεῖσα οὖν. ἐστὶν καὶ ἡ ΨΣ. ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΨΣΚ γωνία δοθεῖσα, ὥστε καὶ τὸ ΨΣΖ τρίγωνον ὀρθογώνιον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ἔσται]. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΨΖ, παράλληλος οὔσα τῇ ΞΚ καὶ ἐπ’ εὐθείας τῇ ΨΩ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΩΛ ἴση οὔσα τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΜΛ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΩΛ τῆς ΣΚ (ἴση γὰρ ἡ ΩΛ τῇ ΚΖ), καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΚΘ πρὸς ΘΣ, οὕτως ἡ ΣΘ πρὸς τὴν ΘΤ καὶ ἡ ΤΘ πρὸς τὴν ΘΦ, ὡς δὲ ἡ ΛΜ πρὸς ΜΩ, ἡ ΜΩ πρὸς τὴν ΜΑ, καὶ ἡ Α, Μ πρὸς τὴν ΜΒ, ἔσται ἄρα μείζων ἡ ΜΒ, τῆς ΘΦ (καὶ τοῦτο γὰρ ἐξῆς δειχθήσεται)· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Β, Λ τῆς ΦΚ ἐλάσσων.

3.44 ἐπεὶ οὖν πάλιν δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΩΛ [ἐδείχθη ἴση γὰρ τῇ ΖΚ δοθείση], δοθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΛΜ (ὅτι καὶ ἡ ΚΘ), καὶ λόγος ἄρα τῆς ΛΜ πρὸς ΜΩ δοθεῖς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΜΩ, καὶ ἡ ΩΜ πρὸς τὴν ΜΑ, καὶ δοθεῖσα ἡ ΩΜ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΜΑ, . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΒ, δοθεῖσά ἐστὶν, ὥστε καὶ τὸ Β, σημεῖον δοθέν ἐστὶν, ὅπερ ἔστω ὑποκείμενον, ὅπου βούλεται, ἥτοι μεταξὺ τῶν ζ Μ, ὡς νῦν ἐστὶν, ἢ μεταξὺ τῶν ζ Α, , τῆς ζΛ ἴσης ὑποκειμένης ἑκατέρω τῶν ΚΡ ΑΒ *** . εἰ γὰρ λέγει τὸ Β, πίπτειν κατὰ τὸ ζ, τὸ ζητούμενον οὐδὲν ἥττον ὡς ὁμολογούμενον λαμβάνει. φαίνεται γὰρ πάλιν ἐπὶ θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς ΜΛ, καὶ σημείου τινὸς ἐν αὐτῇ δοθέντος

τοῦ ζ, λαβὼν μεταξὺ δύο σημεία τὰ Ω Α, καὶ ποιήσας ὡς τὴν ΛΜ πρὸς ΜΩ, τὴν ΩΜ πρὸς τὴν ΜΑ, καὶ τὴν ΜΑ, πρὸς τὴν Μζ, ὅπερ οὐδεὶς αὐτῷ συγχωρεῖ. τοῦτο γὰρ καὶ οἱ παλαιοὶ ζητοῦντες ἠπόρησαν διὰ τῶν ἐπιπέδων εὐρεῖν, ὡς καὶ αὐτὸς δείξω παραθέμενος τὰς ἐκείνων φωνάς. καὶ αὐτὸς δὲ οὐδὲν ἔχει λέγειν ἀνασκευαστικόν, ἐὰν λέγωμεν αὐτῷ “εἰ τὸ ζ ἐξ ἀνάγκης τὸ τῆς τομῆς σημεῖον τοῦ τρίτου λόγου, δείξον ὅτι οὔτε μεταξὺ τῶν ζ Α, δύναται πίπτειν οὔτε μεταξὺ τῶν Μ ζ.

3.46 ” ἡμεῖς γὰρ ἀπεδείξαμεν ἐν ἀρχῇ καὶ ἄνω τοῦ Ρ καὶ κάτω τὸ σημεῖον [πίπτει γὰρ παρὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ λόγου]. ὁμοίως οὖν τῆς ἀναλύσεως προχωρούσης ἐκ τοῦ δεδοσθαι τὸ ζΒ, Γ, τρίγωνον τῷ εἶδει καὶ τῷ μεγέθει, κἂν τὸ Β, τῆς τομῆς σημεῖον μεταξὺ ἧ τῶν ζ Α, , δεδομένου δὲ καὶ τοῦ Δ, ΩΛ τριγώνου, ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον καὶ τῆς ΔΕ, δεδομένης, ἔσται δοθεὶς καὶ ὁ τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς Ε, Η πρὸς τὴν ΗΖ, , τουτέστιν ὁ τῆς Ζ, Η πρὸς τὴν ΗΘ, . καὶ οὐδαμῶς πάλιν ὁ τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἴσης ὑποκειμένης καὶ νῦν τῇ ΚΡ, τουτέστιν τῇ ΑΒ, τῆς ΔΖ, κἂν τὸ Θ, μεταξὺ βούληται πίπτειν τῶν Ζ, Ζ. οὐδὲν γὰρ ἔξει καὶ ὧδε λέγειν ἀνασκευαστικόν, ἀκούων παρ’ ἡμῶν “δείξον ὅτι μήτε μεταξὺ τῶν Ζ Η μήτε μεταξὺ τῶν Ζ Ζ, πίπτει.” εἰ δὲ κατὰ συγχώρησιν ἀπλῶς τὸ τῆς τοιαύτης τομῆς σημεῖον εἶναι κατὰ τὸ Ζ βούλεται, τὸ ζητούμενον καὶ νῦν ὡς ὁμολογούμενον ἔλαβεν. μὴ διδομένου δ’ αὐτῷ τὴν τομὴν εἶναι κατὰ τὸ Ζ σημεῖον (ἐπεὶ μὴδὲ κατὰ τὸ Ρ συνεχωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΚΘ ποιοῦμενοι τὴν δείξιν), εἰ καὶ ἄλλο τι μεταξὺ τῶν Ε, Η λαβεῖν ἐβούλετο, ὡς τὸ Ζ, , αὐτὸς οὐκ οἶδ᾽ ὅπως ἀπατηθεὶς τὸ Θ, ἔλαβεν. ὡς βούλεται δέ, κείσθω χωρὶς τοῦ εἶναι κατὰ τὸ Ζ.

3.48 καὶ ἐπιζεύξας τὴν Θ, Γ, καὶ παραλλήλους ἀγαγὼν τῇ μὲν ΓΘ, τὰς Ζ, Κ, Ε, Λ, , διὰ δὲ τῶν Κ, Γ, παραλλήλους τῇ ΑΓ τὰς Κ, Μ, Λ, Ν, , δηλὸν ποιεῖ μὴ νενοηκέναι τὸ πρόβλημα. παραλλήλου γὰρ μὴ γενομένης τῇ ΕΗ τῆς Θ, Γ ἢ ὑπὸ ΓΘ, Η γωνία ἀμβλεῖα μὲν ἐστὶ τοῦ Θ, μεταξὺ τῶν Η Ζ πίπτοντος, ὅξεϊα δὲ τοῦ Θ, μεταξὺ τῶν Ζ Ζ, ὄντος· ἢ γὰρ πρὸς τῷ Ζ γωνία ὀρθή ἐστι, καθ’ ἣν μόνως γίνεται τὸ πρόβλημα, ἐὰν τις συγχωρήσῃ, καθὰ πολλάκις εἵπομεν, ἐπὶ θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς ΔΗ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Ζ, λαβεῖν δύο σημεία ὡς Ε, Ζ, , ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὴν ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, , οὕτως τὴν ΗΕ, πρὸς ΗΖ, , καὶ τὴν ΗΖ, πρὸς τὴν ΗΖ. μὴ διδομένου δὲ τούτου ἀδύνατον ἔσται τὸ προταθὲν ὑπ’ αὐτοῦ διὰ τῶν ἐπιπέδων εὐρεθῆναι, ὡς καὶ διὰ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν ἀκολουθῶς τῇ ἀναλύσει τοῖς βουλομένοις ἐξέσται πεισθῆναι, χρωμένοις τῷ Πτολεμαίου κανόνι περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν. ἀλλὰ τοῦτον μὲν ἀπορεῖν ὁμοίως τοῖς ἄλλοις βέλτιον ἦν ἢ περ οὕτως εὐρίσκειν, ἡμεῖς δὲ τὰ ὑπερτεθέντα νῦν δείξομεν. β’. Ἐστω τις εὐθεῖα ἢ ΑΗ τετμημένη εἰς ἴσα κατὰ τὰ Β Γ Δ Ε Ζ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἢ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἢ ΒΓ πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἢ ΑΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ καὶ τὸ τρίτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἢ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἢ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ καὶ τὸ τέταρτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἢ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἢ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΓ καὶ τὸ πέμπτον τῆς ΓΒ, ὡς δὲ ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἢ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ καὶ τὸ ἕκτον τῆς ΓΒ. Ἐστὶ δὲ φανερόν τῶν ἀριθμῶν παραληφθέντων *** καὶ αἰεὶ οὕτως, ὅτι ὡς ὁ δοθεὶς τῶν ἴσων εὐθειῶν ἀριθμὸς ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸν μονάδι ἐλάσσονα, οὕτως ὁ μονάδι ἐλάσσων πρὸς τὸν μονάδι αὐτοῦ ἐλάσσονα καὶ τῆς ΓΒ μόνιον ὁμώνυμον τῷ δοθέντι πλήθει τῶν ἴσων εὐθειῶν. γ’.

3.50 Ἐστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ Α Β, μείζων δὲ ἢ ΓΔ τῆς Ν [ἐλάσσων οὖσα ἐκατέρας τῶν Α Β], καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἢ Α πρὸς τὴν ΓΔ, ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἢ Β πρὸς τὴν Ν, ἢ Ν πρὸς τὴν Π καὶ ἢ Π πρὸς τὴν Ρ· λέγω ὅτι ἢ Ρ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἢ ΓΔ τῆς Ν, κείσθω τῇ Ν ἴση ἢ ΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΓΚ, ἢ Β πρὸς τὴν Ν. καὶ ἐπεὶ ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΓΔ, ἢ ΓΔ πρὸς ΕΖ, γεγενήσθω ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἢ ΓΚ πρὸς ΕΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἢ Β πρὸς Ν, ἢ Ν πρὸς Π, καὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν Α τῇ Β, ἢ δὲ ΓΚ τῇ Ν· δι’ ἴσου ἄρα καὶ ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΕΛ, ἢ Β πρὸς τὴν Π· ἴση ἄρα ἢ ΕΛ τῇ Π. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς ΗΘ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἢ Α πρὸς τὴν ΓΚ, ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἢ ΕΛ πρὸς

ἐλάσσονα τῆς ΗΘ. ἔστω πρὸς τὴν ΗΜ· ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΕΛ, ἡ ΕΛ πρὸς τὴν ΗΜ, ὡς δὲ ἡ Ν πρὸς τὴν Π, οὕτως ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ Ν, ἡ δὲ ΕΛ τῇ Π, ἴση ἄρα καὶ ἡ Ρ τῇ ΗΜ· ἐλάσσων ἄρα ἡ Ρ τῆς ΗΘ. Ἄλλως τὸ αὐτό. δ'. Ἔστω ἴση ἡ Α τῇ Ε, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ζ, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Β πρὸς Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ, ὡς δὲ ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἡ Ζ πρὸς τὴν Η, καὶ ἡ Η πρὸς τὴν Θ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ Δ τῆς Θ. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Β τῆς Ζ, ἴση δὲ ἡ Α τῇ Ε, ἡ Β ἄρα πρὸς τὴν Α μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ζ πρὸς τὴν Ε. ἀνάπαλιν ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ε πρὸς Ζ. ὡς δὲ ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Β πρὸς Γ· καὶ ἡ Β ἄρα πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ε πρὸς Ζ. ὡς δὲ ἡ Ε πρὸς Ζ, οὕτως ἡ Ζ πρὸς Η· καὶ ἡ Β ἄρα πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ζ πρὸς Η.

3.52 ὡς δὲ ἡ Β πρὸς Γ, οὕτως ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ζ πρὸς Η. ὡς δὲ ἡ Ζ πρὸς Η, οὕτως ἡ Η πρὸς Θ· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Η πρὸς Θ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ε πρὸς Ζ, ἡ δὲ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ζ πρὸς Η, ἡ δὲ Γ πρὸς Δ ἐλάσσονα ἥπερ ἡ Η πρὸς Θ, δι' ἴσου ἄρα ἡ Α πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Ε πρὸς Θ διὰ τὸ ἐξῆς. καὶ ἔστιν ἴση ἡ Α τῇ Ε· μείζων ἄρα ἡ Δ τῆς Θ, ὅπερ ~ ε'. Ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἥπερ ἡ Γ πρὸς Δ· ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Πεποιήσθω ὡς ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς Ε· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῆς Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς Ε, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς Γ, οὕτως ἡ Β πρὸς Ε. ἡ δὲ Β πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Β πρὸς Δ· καὶ ἡ Α ἄρα πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Β πρὸς Δ. ζ'. Τούτου δειχθέντος ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἥπερ ἡ Δ πρὸς Ε, ἐχέτω δὲ καὶ ἡ Β πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἥπερ ἡ Ε πρὸς Ζ· ὅτι καὶ δι' ἴσου ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Δ πρὸς Ζ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α πρὸς Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Δ πρὸς Ε, ἐναλλάξ ἡ Α πρὸς Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Β πρὸς Ε. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ Β πρὸς Ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Γ πρὸς Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α πρὸς Δ πολλῶν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Γ πρὸς Ζ, ἐναλλάξ ἡ Α πρὸς Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Δ πρὸς Ζ, ὅπερ ~ ζ'. Ἡ μὲν οὖν ἔδει με προειπεῖν ἐστὶν ταῦτα, παρεῖς δὲ κρίνειν σοὶ τε καὶ τοῖς ἐν γεωμετρίας γεγυμνασμένοις τὰ ὑπ' ἐκείνου προγραφέντα περὶ τῆς κατασκευῆς καὶ τὰ ὑφ' ἡμῶν ἐπενεχθέντα, καλῶς ἔχουν ἡγοῦμαι καὶ τὰ δόξαντα τοῖς ἀρχαίοις περὶ τοῦ προειρημένου προβλήματος ἐκθέσθαι καὶ πρῶτον εἰπεῖν ὀλίγα περὶ τῶν ἐν γεωμετρίας προβλημάτων, ἀρχὴν λαβὼν ἐντεῦθεν.

3.54 Τῶν ἐν γεωμετρίας προβλημάτων οἱ παλαιοὶ τρία γένη φασὶν εἶναι, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτο ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι' ὧν λύεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ προβλήματα λύεται παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὐρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ πλειόνων, ταῦτα στερεὰ κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν ἀναγκαῖόν ἐστι χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς. τρίτον δ' ἔτι καταλείπεται γένος ὃ καλεῖται γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἕτεραι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν καὶ βεβιασμένην ἔχουσαι τὴν γένεσιν, ὅποιαι τυγχάνουσιν αἱ ἕλικες καὶ τετραγωνίζουσαι καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσοειδεῖς, πολλὰ καὶ παράδοξα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι συμπτώματα. τοιαύτης δὲ τῆς διαφορᾶς τῶν προβλημάτων οὐσης οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι τὸ προειρημένον ἐπὶ τῶν δύο εὐθειῶν πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον οὐχ οἷοί τ' ἦσαν κατασκευάζειν τῷ γεωμετρικῷ λόγῳ κατακολουθοῦντες, ἐπεὶ μὴδὲ τὰς τοῦ κώνου τομὰς ῥάδιον ἐν ἐπιπέδῳ γράφειν ἦν [ὡς δεῖ δύο δοθειῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ], τοῖς δὲ ὀργάνοις μεταλαβόντες αὐτὸ θαυμασίως εἰς χειρουργίαν καὶ κατασκευὴν ἐπιτήδειον ἤγαγον, ὡς ἔστιν ἰδεῖν [ἀπὸ τῶν φερομένων αὐτοῖς συνταγμάτων, λέγω δ'] ἐν τῷ Ἑρατοσθένους μεσολάβῳ καὶ τοῖς Φίλωνος καὶ Ἡρωνος μηχανικοῖς [ἢ καταπαλτικοῖς].

- 3.56 οὔτοι γὰρ ὁμολογοῦντες στερεὸν εἶναι τὸ πρόβλημα τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ μόνον ὀργανικῶς πεποιήνται [συμφώνως Ἀπολλωνίῳ τῷ Περγαίῳ, ὃς καὶ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ πεποιήται διὰ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ ἄλλοι διὰ τῶν Ἀρισταίου τόπων στερεῶν, οὐδεὶς δὲ διὰ τῶν ἰδίως ἐπιπέδων καλουμένων], Νικομήδης δὲ λέλυκε διὰ κοχλοειδοῦς γραμμῆς, δι' ἧς καὶ τὴν γωνίαν ἐτριχοτόμησεν. ἐκθησόμεθα οὖν τέσσαρας αὐτοῦ κατασκευὰς μετὰ τινος ἐμῆς ἐπεξεργασίας, ὧν πρώτην μὲν τὴν Ἐρατοσθένειον, δευτέραν δὲ τὴν τῶν περὶ Νικομήδη, τρίτην δὲ τὴν τῶν περὶ Ἡρώνα μάλιστα πρὸς τὰς χειρουργίας ἀρμόζουσαν τοῖς ἀρχιτεκτονεῖν βουλομένοις, καὶ τελευταίαν τὴν ὑφ' ἡμῶν ἀνευρημένην. [στερεοῦ γὰρ παντὸς ἕτερον στερεόν, ὅμοιον τῷ δοθέντι, κατασκευάζεται πρὸς τὸν δοθέντα λόγον, ἐὰν δύο τῶν δοθειῶν εὐθειῶν δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς Ἡρῶν ἐν μηχανικοῖς καὶ καταπαλτικοῖς.] Ἔστω οὖν πλινθίον πεπηγὸς τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τρίγωνα ὀρθογώνια ἴσα τὰ ΑΕΘ ΜΖΚ ΝΗΛ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Ε Ζ Η γωνίας, καὶ τὸ μὲν ΑΕΘ προσπεπηγὸς μενέντω, τὸ δὲ ΜΖΚ τὴν κίνησιν ἔχέτω ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ κανόνων οὕτως ὥστε τὴν μὲν ΜΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒ κανόνος φέρεσθαι ἔχοντος σωλῆνα δι' ὅλου, τὴν δὲ κορυφὴν τὴν Κ διὰ τοῦ ΓΔ κανόνος καὶ αὐτοῦ δι' ὅλου τοῦ μήκους σεσωληνισμένου, παραπλησίως δὲ καὶ τὸ ΝΗΛ τρίγωνον ἔχέτω τὴν κίνησιν ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ κανόνων κατὰ τοὺς προειρημένους ὁχετούς.
- 3.58 τούτων δὴ οὕτως ὑποκειμένων, ὅτε βούλοιτό τις κύβον κύβου διπλασίονα ποιῆσαι, διπλασίαν ἀπολαμβάνων τὴν ΑΓ τῆς ΑΞ καὶ διυστὰς τὰ ΜΖΚ ΝΗΛ τρίγωνα, μέχρις ἂν κατ' εὐθειᾶν γένηται τὰ Α Ξ σημεῖα ταῖς τῶν τριγώνων τομαῖς ταῖς Π Ο, ἐπιζεύξει τὴν ΑΠΟΞ συμπίπτουσαν τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ρ (τοῦτο γὰρ κατ' ἀνάγκην ὀφείλει ἐπακολουθεῖν), καὶ οὕτως τὸ προκείμενον αὐτῷ συμβαίνει. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΠΘ, οὕτως ἡ ΑΡ πρὸς ΠΡ, καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΠΚ, καὶ ἡ ΘΡ πρὸς ΡΚ, καὶ ἡ ΠΘ πρὸς ΟΚ, καὶ ἡ ΠΡ πρὸς ΡΟ, καὶ ἡ ΠΚ πρὸς ΟΛ, καὶ ἡ ΚΡ πρὸς ΡΛ, καὶ ἡ ΟΚ πρὸς ΑΞ, τῶν ΑΓ ΑΞ ἄρα δύο μέσαι εἰσὶν αἱ ΠΘ ΟΚ κατὰ συνεχῇ ἀναλογίαν. καὶ ἔστι διπλασία ἡ ΑΓ τῆς ΑΞ· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΓ κύβος τοῦ ἀπὸ τῆς ΠΘ κύβου. εἰ δ' ἄλλον τινὰ λόγον ἔχει ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον, ἐκεῖνον τὸν λόγον ἔδει ἔχειν καὶ τὴν ΑΓ πρὸς ΑΞ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως κατασκευάζειν. [καὶ ἐκ τούτου φανερόν ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τὸ προκείμενον διὰ τῶν ἐπιπέδων λύεσθαι.] ἡ'. Κατὰ δὲ Νικομήδη δύο δοθειῶν εὐθειῶν τῶν ΓΔ ΔΑ δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς λαμβάνονται τρόπῳ τοιῷδε. Συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρω τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς Α Ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ ἴση οὔσα τῇ ΑΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ, καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν ΚΓΘ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ζ διήχθω ἡ ΖΘΚ ποιοῦσα ἴσην τὴν ΘΚ τῇ ΑΛ ἢ τῇ ΓΖ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς), καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΒΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ καὶ ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΔ.
- 3.60 Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ τέτμηται δίχα τῷ Ε καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΓΚ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΚ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΕΖ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς ΔΚ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ. καὶ ἔστιν τῆς μὲν ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΛ, τῆς δὲ ΒΓ διπλὴ ἡ ΓΗ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΗΖ ΓΘ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΛΑ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ.
- 3.62 ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΘΚ [ἐπεὶ καὶ τῇ ΓΖ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ]· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΑ τῇ ΖΚ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΜΑ τῷ ἀπὸ ΖΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ ΜΑ ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΜΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΖ (ἴση γὰρ

ὑπόκειται ἡ ΑΛ τῇ ΓΖ)· ἴσον ἄρα καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΒΜΑ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΒΚΓ· ὡς ἄρα ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΚΓ πρὸς ΑΜ καὶ ἡ ΜΑ πρὸς ΑΔ. Θ'. Κατὰ δὲ τοὺς περὶ τὸν Ἥρωνα, πῶς ἐστὶν δυνατόν δύο δοθεῖσων εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ὁργανικῶς, δείξομεν, ἐπειδήπερ ἐστὶν τὸ πρόβλημα τοῦτο, καθά φησιν καὶ ὁ Ἥρων, στερεόν. “ἐκθησόμεθα δέ” φησιν “τῶν δείξεων τὴν μάλιστα πρὸς τὴν χειρουργίαν εὐθετον.” Ἔστωσαν γὰρ αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κείμεναι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. Συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΔΓ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΓΑ, καὶ παρακείσθω κανόνιον πρὸς τῷ Β σημείῳ καὶ κινείσθω τέμνον τὰς ΓΕ ΑΖ, ἄχρις οὗ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἀχθεῖσα ἐπὶ τὴν τῆς ΓΕ τομὴν ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν τῆς ΑΖ τομὴν.

3.64 γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ μὲν τοῦ κανονίου θέσις ἡ ΕΒΖ, ἴσαι δὲ αἱ ΕΗ ΗΖ· λέγω οὖν ὅτι αἱ ΑΖ ΓΕ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἐπεὶ γὰρ ὀρθογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΔΗ ΗΑ ΗΒ ΗΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΗ τῇ ΑΗ, καὶ διῆκται ἡ ΗΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΕ. καὶ εἰσίν ἴσαι αἱ ΗΕ ΗΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΗ τῷ ὑπὸ ΔΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ. ὧν τὸ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΖΑ· ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΖΑ πρὸς ΓΕ. ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ τε ΒΑ πρὸς ΑΖ καὶ ἡ ΕΓ πρὸς ΓΒ, ὥστε ἔσται καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ, ἡ τε ΖΑ πρὸς ΓΕ καὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΓΒ· τῶν ἄρα ΑΒ ΒΓ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΖ ΓΕ. ι'. Κύβος δὲ κύβου διπλάσιος οὐ μόνον εὑρίσκεται διὰ τοῦ ὑποκειμένου ὁργάνου καὶ καθ' ἡμᾶς, ἀλλὰ καὶ καθόλου λόγον ἔχων τὸν ἐπιταχθέντα. Κατεσκευάσθω γὰρ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω ἡ ΔΒ, καὶ κινείσθω κανόνιον τι περὶ τὸ Α σημεῖον οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἐν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ Α σημεῖον ἐστῶτι, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινεῖσθαι μεταξὺ τῶν Β Γ.

3.66 τούτων δὴ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὑρεῖν λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους δοθέντα. καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν Β Γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν ΖΕ ΕΒ εὐθειῶν ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς ΒΕ εὐθείας καὶ τῆς ΒΚΓ περιφερείας· τοῦτο γὰρ πειράζοντες αἰεὶ καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον ῥαδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ, καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ΑΗΘΚ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΗΘ ΘΚ. λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστιν τὸν τῆς ΔΒ πρὸς ΔΕ. Νοεῖσθω γὰρ ὁ κύκλος προσαναπεπληρωμένος καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΚΘ τῇ ΘΗ, τὴν δὲ ΚΔ τῇ ΔΛ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ ἡ τε ΑΛ καὶ ἡ ΛΓ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΑΛ ἐν ἡμικυκλίῳ καὶ κάθετος ἡ ΑΜ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ (καὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΑ, οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΜΗ, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ, καὶ ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ). κοινὸς προσκείσθω λόγος ὁ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ. ὁ ἄρα συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΜ πρὸς ΜΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ὁ τῆς ΓΜ πρὸς ΜΗ, λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΗ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ.

3.68 ὁ δὲ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ κύβον· καὶ ὁ τῆς ΓΜ ἄρα πρὸς τὴν ΜΗ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ κύβον. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΜ πρὸς ΜΗ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ, οὕτως ἡ

ΑΔ πρὸς ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον. ἔαν οὖν ποιήσωμεν καὶ ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως τὴν ΔΘ πρὸς ἄλλην τινά, οἷον τὴν ΔΝ, ἔσονται τῶν ΒΔ ΔΕ δύο μέσαι ἀνάλογον αἱ ΔΘ ΔΝ. ια'. Τὸ δὲ δεύτερον τῶν προβλημάτων ἦν τόδε. Ἐν ἡμικυκλίῳ τὰς τρεῖς μεσότητας λαβεῖν ἄλλος τις ἔφασκεν, καὶ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐκθέμενος, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ λαβὼν τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγὼν τῇ ΕΓ τὴν ΔΒ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΕΒ, καὶ αὐτῇ κάθετον ἀγαγὼν ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΖ, τὰς τρεῖς μεσότητας ἔλεγεν ἀπλῶς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐκτεθεῖσθαι, τὴν μὲν ΕΓ μέσην ἀριθμητικὴν, τὴν δὲ ΔΒ μέσην γεωμετρικὴν, τὴν δὲ ΒΖ ἀρμονικὴν. Ὅτι μὲν οὖν ἡ ΒΔ μέση ἐστὶ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ἡ δὲ ΕΓ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι, φανερόν. ἔστι γὰρ ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΔΒ πρὸς ΔΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς ἐαυτήν, οὕτως ἡ τῶν ΑΔ ΑΕ ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ τῶν ΑΔ ΕΓ, πρὸς τὴν τῶν ΕΓ ΓΔ. πῶς δὲ καὶ ἡ ΖΒ μέση ἐστὶν τῆς ἀρμονικῆς μεσότητος, ἢ ποίων εὐθειῶν, οὐκ εἶπεν, μόνον δὲ ὅτι τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν τῶν ΕΒ ΒΔ, ἀγνοῶν ὅτι ἀπὸ τῶν ΕΒ ΒΔ ΒΖ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ οὐσῶν πλάσσεται ἡ ἀρμονικὴ μεσότης.

3.70 δειχθήσεται γὰρ ὑφ' ἡμῶν ὕστερον ὅτι δύο αἱ ΕΒ καὶ τρεῖς αἱ ΔΒ καὶ μία ἡ ΒΖ ὡς μία συντεθεῖσαι ποιοῦσι τὴν μείζονα ἄκραν τῆς ἀρμονικῆς μεσότητος, δύο δὲ αἱ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν μέσην, μία δὲ ἡ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν ἐλαχίστην. Πρότερον δὲ διαληπτέον περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων [καὶ μετὰ ταῦτα περὶ τῶν ἐν ἡμικυκλίῳ], εἴτα περὶ τῶν ἀντικειμένων αὐταῖς ἄλλων τριῶν κατὰ τοὺς παλαιούς, καὶ ὕστερον περὶ τῶν παρὰ τοῖς νεωτέροις τεσσάρων ἀκολουθῶν ταῖς γνώμας αὐτῶν, καὶ ὡς δυνατόν ἐστιν ἐκάστην τῶν δέκα μεσοτήτων διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας εὐρίσκειν, ἵνα καὶ τὸν προκείμενον ἔλεγχον διὰ πλειόνων συστησώμεθα. Περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων. ιβ'. Διαφέρει τοίνυν μεσότης ἀναλογίας τῷδε ὅτι εἰ μὲν τί ἐστὶν ἀναλογία, τοῦτο καὶ μεσότης, οὐ μὴν καὶ ἀνάπαλιν. μεσότητες γὰρ εἰσι τρεῖς, ὧν ἡ μὲν ἀριθμητικὴ, ἡ δὲ γεωμετρικὴ, ἡ δὲ ἀρμονικὴ. Ἀριθμητικὴ μὲν οὖν λέγεται μεσότης, ὅταν τριῶν ὄντων ὁρων ὁ μέσος τῷ ἴσῳ ἐνὸς μὲν τῶν ἄκρων ὑπερέχη, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ ζ' πρὸς τὸν θ' καὶ τὸν γ' ἀριθμόν), ἢ ὅταν ᾗ ὡς ὁ πρῶτος ὁρος πρὸς αὐτὸν, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν. [πρῶτα δὲ ἀκούειν δεῖ τὰ ὑπερέχοντα.] Γεωμετρικὴ δὲ λέγεται μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως, ὅταν ᾗ ὡς ὁ μέσος ὁρος πρὸς ἓνα τῶν ἄκρων, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν μέσον (ὡς ἔχει ὁ ζ' ἀριθμὸς πρὸς τε τὸν ιβ' καὶ τὸν γ'), καὶ ἄλλως· ὅταν ᾗ ὡς ὁ πρῶτος ὁρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν. Ἀρμονικὴ δὲ ἐστὶ μεσότης, ὅταν ὁ μέσος ὁρος τῷ αὐτῷ μέρει ὑπερέχη μὲν ἐνὸς τῶν ἄκρων, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ γ' ἀριθμὸς πρὸς τε τὸν β' καὶ τὸν ζ'), ἢ ὅταν ᾗ ὡς ὁ πρῶτος ὁρος πρὸς τὸν τρίτον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν.

3.72 Τούτων ὑποκειμένων εὐρήσομεν ὁμοῦ τὰς τρεῖς μεσότητας ἐν ἐλαχίσταις εὐθείαις πέντε τὸν ἀριθμὸν προγραφέντων τῶνδε. Ἐστω δὴ πρῶτον δοθεῖσιν τῶν ΑΒ ΒΓ μέσην εὐρεῖν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν. Ἦχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΑΒ τῷ Ε, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ε διὰ τοῦ Β περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ Δ, καὶ τῇ τὰ Β Δ ἐπιζευγνυούσῃ ἴση ἀφηρήσθω ἡ ΒΖ, καὶ γίνεται ἡ ζητούμενη μέση ἡ ΒΖ. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΔΑ ὀρθὴν περιέχει γωνίαν μετὰ τῆς ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι ἐκατέραν τῶν ΒΕ ΕΑ τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὰ Δ Ε. ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ὀρθή. καὶ ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ περὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Β πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΒ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΓ, καὶ μέση τῶν ΑΒ ΒΓ ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΒΖ. ιγ'. Ἐστω δὲ δοθεῖσιν τῶν ΑΒ ΒΖ τὴν ἐλάσσονα ἄκραν λαβεῖν. Τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ τῷ Ε, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ε διὰ τοῦ Β περιφέρεια γεγράφθω, καὶ αὕτη τετμήσθω ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ Ζ περὶ κέντρον τὸ Β γραφομένης περιφερείας κατὰ τὸ Δ, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΔΓ, καὶ γίνεται τῶν ΑΒ ΒΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΓ.

- 3.74 δέικνυται γὰρ ὁμοίως [κατὰ τὰ αὐτὰ] τοῖς προειρημένοις ἐπὶ τῆς μέσης. [Καὶ φανερόν ὅτι, ἐὰν μὲν ὁ δοθεὶς τῆς ἀναλογίας λόγος ᾗ διπλάσιος, ὥστε τὴν AB τῆς BG τετραπλασίαν εἶναι, ἡ ἴση τῇ ΔB τιθεμένη διχοτομία ἐστὶν τῆς AB, τουτέστιν ἡ EB ἐστὶν, ἐὰν δὲ μείζων ᾗ διπλάσιος ὁ λόγος ᾗ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἡμισείας, ἐὰν δὲ ἐλάσσων ᾗ τοῦ διπλασίου, μείζων ἐστὶν τῆς EB ἡμισείας.] Ἐστω δὲ νῦν δοθεισῶν τῶν ZB BG τὴν μείζονα ἄκραν εὐρεῖν. Ἦχθω δὲ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΘ, καὶ περὶ κέντρον τὸ B διὰ τοῦ Z γραφομένη περιφέρεια τεμνέτω αὐτὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἐπιζευχθεῖση πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΑΘ· γίνεται δὲ ἡ AB τρίτη ἀνάλογον τῶν ΓΒ BZ. καὶ γὰρ τοῦτο φανερόν ἐκ τῶν προδεδειγμένων. ιδ'. Πάλιν ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ AB BG, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ AB ἡ ΔAE, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν AD τῇ AE, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BD EZ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΒ ἡ ΖΗ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς BH, οὕτως ἡ τῶν AB BG ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ BH ὑπεροχὴν. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς BH, ἡ ΔA πρὸς ZH, τουτέστιν ἡ AE πρὸς ZH (ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AE τῇ AD), καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς BH, οὕτως ἡ AE πρὸς ZH. ἀλλ' ὡς ἡ AE πρὸς ZH, οὕτως ἡ AG πρὸς ΓH διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ τρίγωνα AGE ΓZH· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς AB πρὸς BH, οὕτως ἡ AG πρὸς ΓH.
- 3.76 καὶ ἔστιν ἡ μὲν AG ὑπεροχὴ τῶν AB BG, ἡ δὲ ΓH ὑπεροχὴ τῶν ΓΒ BH· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς BH, οὕτως ἡ τῶν AB BG ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ BH ὑπεροχὴν. [τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα χρήσιμόν ἐστιν εἰς τὴν ἀρμονικὴν μεσότητα· πρώτη γὰρ ἐστὶν ἡ AB, δευτέρα ἡ BG, τρίτη ἡ BH.] Ἐὰν δὲ αἱ AB BH δοθῶσιν ἄκραι, ζητῶμεν δὲ τὴν μέσην, ἐπιζεύξαντες τὴν BD, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄξαντες ἀπὸ τοῦ H τὴν ZH, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ E ἐπιζεύξαντες τὴν ZGE, ἔξομεν τὴν ΓΒ μέσην τῶν AB BH. καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά. ιε'. Δοθεισῶν δὲ τῶν EB BG τὴν μείζονα ἄκραν εὐρήσομεν ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἄξαντες τὴν ΔEZ καὶ ἴσας θέντες τὰς ΔE EZ, καὶ τὰς BZ ΔΓ ἐπιζεύξαντες καὶ ἐκβαλόντες ἐπὶ τὸ H. ἡ γὰρ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὴν BG ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἀγομένη ΗΘ ἴσην ἀποτεμένει τῇ ζητούμενῃ τὴν ΘB. [συμπεσοῦνται γὰρ αἱ ΓΔ BZ ὡς ἐπὶ τὸ H ἡγμέναι· δεῖ γὰρ ὑποτίθεσθαι τὴν BE μείζονα τῆς EG.] ις'. Δύο πάλιν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB Γ, ὧν μείζων ἡ AB, μέσην ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ εὐρήσομεν οὕτως. κείσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΔB, καὶ ἡ ΔA δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ E, καὶ τῇ EB ἴση κείσθω ἡ Z. καὶ φανερόν ὅτι ἡ Z ἐστὶν ἡ ζητούμενη εὐθεῖα. Ὁμοίως δὲ κἂν αἱ Z Γ δοθῶσιν, τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν προσθέντες τῇ Z τὴν γενομένην ἔξομεν ἴσην τῇ AB.
- 3.78 Ἦ πάλιν ἐὰν αἱ AB Z δοθῶσιν, ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν ἀπὸ τῆς Z ἀφαιρεθεῖσα ποιεῖ τὴν Γ τρίτην. Ἐστω οὖν ἡ Z μέση τῶν AB Γ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· καὶ ἔσται ἀριθμητικὴ μεσότης τῶν AB Z Γ εὐθειῶν. γεγενήσθω δὲ καὶ ὡς ἡ Z πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς Η· καὶ ἔσται τῶν Z Γ Η εὐθειῶν γεωμετρικὴ μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως. κἂν διὰ τὸ προδειχθὲν δύο εὐθειῶν τῶν Γ Η, ὧν μείζων ἡ Γ, τὴν Θ ποιησώμεθα, ὥστ' εἶναι ὡς τὴν Γ πρὸς τὴν Θ, οὕτως τὴν τῶν Γ Η ὑπεροχὴν πρὸς τὴν τῶν Η Θ ὑπεροχὴν, ἔσται ἄρα καὶ τῶν Γ Η Θ εὐθειῶν ἀρμονικὴ μεσότης. ὁ αὐτὸς δὲ λόγος τῆς AB πρὸς τὴν Γ, καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Θ, τῶν ἄκρων ὄρων ἐπὶ τε τῆς ἀριθμητικῆς μεσότητος καὶ τῆς ἀρμονικῆς· ἔσονται οὖν πέντε τὸν ἀριθμὸν ἐλάχιστοι εὐθεῖαι περιέχουσιν τὰς τρεῖς μεσότητας [δυνάμεναι καὶ ἀσύμμετροι εἶναι πρὸς ἀλλήλας]. Ἄμα καὶ δι' ἀριθμῶν ἐλαχίστων πέντε συνίστασθαι κατὰ τε τοὺς πολλαπλασίους λεγομένους λόγους καὶ ἐπιμορίους καὶ τοὺς λοιπούς, ἀδιαιρέτου γοῦν τῆς μονάδος ὑποκειμένης. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ διπλασίου λόγου τῆς AB πρὸς τὴν Γ [ἐν διπλασίῳ λόγῳ δοθείσης] ὑποδείγματος ἕνεκεν ἔσονται τὸ προκείμενον ποιοῦντες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὅ τε ιβ' καὶ ὁ θ' καὶ ὁ ς' καὶ ὁ δ' καὶ ὁ γ', ἐπὶ δὲ τῆς τριπλασίου ἀναλογίας ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι γίνονται ὅ τε ιη' καὶ ὁ ιβ' καὶ ὁ ς' καὶ ὁ γ' καὶ ὁ β'.
- 3.80 καὶ δῆλον ὡς δεῖ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων λόγων τοὺς ἐλαχίστους ἀριθμοὺς ἀνευρίσκειν τῶν τριῶν μεσοτήτων. κἂν χωρὶς ἐκάστην τις ἐθέλῃ ἐκτίθεσθαι, διὰ τῶν προγεγραμμένων εὐδηλον, τῶν τριῶν ὄρων ἐπὶ μὲν τῆς ἀριθμητικῆς μεσότητος ὄντων ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς γ' β' α', ἐπὶ δὲ τῆς γεωμετρικῆς δ' β' α', καὶ τῶν κατὰ τὸν διδόμενον λόγον πυθμένων εἰς τοὺς ἰσάκεις

πολλαπλασίους καὶ τοὺς ἐπιμορίους μεταλαμβανομένων καὶ τοὺς λοιπούς, οἷον ἐπὶ τοῦ διπλασίου λόγου, τῆς AB πρὸς τὴν Γ λόγον ἐχούσης ὃν ἔχει τὰ β' πρὸς τὸ α', τάξομεν ἀντὶ μὲν τῶν β' τὰ δ', ἀντὶ δὲ τοῦ α' τὰ β' [ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ τῷ β']. καὶ ἐπεὶ δεῖ τὸν μέσον αὐτῶν τῷ ἴσῳ ὑπερέχειν καὶ ὑπερέχεσθαι, γίνεται ἡ Z εὐθεῖα μονάδων τριῶν [μέσον]. καὶ ὁ τῆς Z πρὸς τὴν Γ λόγος ἡμιόλιος, ὡς γ' πρὸς β'. ὁ αὐτὸς δὲ τούτῳ καὶ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Η γενόμενος οὐ ποιεῖ τὸ πρόβλημα τῆς μονάδος ἀδιαιρέτου μενούσης. πάντα ἄρα τρίς· καὶ γίνεται ἀντὶ μὲν τοῦ δ' ὁ β', ἀντὶ δὲ τοῦ γ' ὁ θ' ἀριθμός, καὶ ἀντὶ τοῦ β' ὁ ζ'. καὶ γίνεται ἡ Η εὐθεῖα μονάδων δ' καὶ ἡ Θ δηλονότι μονάδων τριῶν καὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων ἀριθμοὶ β' θ' ζ' δ' γ'. ιζ'. Ταῦτα μὲν οὖν περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων κατὰ τοὺς παλαιούς, ὅτι δὲ καὶ ἐν ἡμικυκλίῳ δυνατόν ἐστιν αὐτὰς συστήσασθαι ἐν ἐλαχίσταις ζ' εὐθείαις τὸν ἀριθμόν, δηλὸν ἐντεῦθεν.

3.82 Ἐκκείσθω γὰρ τὸ ἡμικύκλιον ἔχον τὴν ΒΔ κάθετον καὶ τὴν ΕΒ ἐκ κέντρου, καὶ τὴν ΔΖ κάθετον, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΘΗ καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΕΓΗ κείσθω τῇ ΒΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΚΘ· λέγω ὅτι ἐν τῇ ἀρμονικῇ μεσότητι ἡ ΕΚ μέση ἐστὶν τῶν ΒΕ ΕΖ, μεγίστης οὗσης τῆς ΒΕ καὶ ἐλαχίστης τῆς ΕΖ. Ἐπεὶ γὰρ ὀρθαὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Β Ζ γωνίαι [παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΘΗ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΒΗ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΘΚ τρίγωνον τῷ ΖΚΔ τριγώνῳ], ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΗΒ πρὸς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ ΒΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΒΘ πρὸς ΔΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΖ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΖ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΚ ὑπεροχὴ τῶν ΒΕ ΕΚ εὐθειῶν, ἡ δὲ ΚΖ ὑπεροχὴ τῶν ΚΕ ΕΖ εὐθειῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ τῶν ΒΕ ΕΚ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ΚΕ ΕΖ ὑπεροχὴν· ἀρμονικὴν ἄρα μεσότητα περιέχουσιν αἱ ΒΕ ΕΚ ΕΖ εὐθεῖαι, μέσης οὗσης τῆς ΕΚ καὶ μεγίστης τῆς ΒΕ καὶ ἐλαχίστης τῆς ΕΖ. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ μὲν ΑΔ ΕΓ ΓΔ τὴν ἀριθμητικὴν, αἱ δὲ ΑΔ ΒΔ ΔΓ τὴν γεωμετρικὴν· αἱ τρεῖς ἄρα μεσότητες ἐντεταγμέναι εἰσὶν καὶ ἐν ἡμικυκλίῳ. ιη'.

3.84 Ἐπεὶ δὲ καὶ Νικόμαχος ὁ Πυθαγορικὸς καὶ ἄλλοι τινὲς οὐ μόνον περὶ τῶν πρώτων τριῶν μεσοτήτων εἰρήκασιν, αἱ χρήσιμοι τυγχάνουσιν μάλιστα πρὸς τὰς τῶν παλαιῶν ἀναγνώσεις, ἀλλὰ καὶ περὶ ἄλλων τριῶν κατὰ τοὺς παλαιούς, καὶ ἔτι ταῖς ἐξ ταύταις ἄλλαι ὑπὸ τῶν νεωτέρων προσεύρηνται τέσσαρες, πειρασόμεθα καὶ περὶ τούτων εἰπεῖν ἐπιτονώτερον, ἀκολουθήσαντες μέντοι γε τοῖς πρότερον, οἵτινες ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος ὅρου ποιούμενοι τὴν μετάβασιν τρεῖς ἐξέθεντο τὰς προειρημένας *** [ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος μείζονα μετροῦντες ἄλλας τρεῖς διαφερούσας τῶν πρώτων]. Ὅταν μὲν γὰρ ᾗ ὡς ὁ τρίτος ὅρος πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ πρώτου ὅρου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, τὴν μεσότητα ὑπεναντίαν τῇ ἀρμονικῇ καλοῦσιν. Ὅταν δ' ᾗ ὡς ὁ τρίτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, ἡ μεσότης καλεῖται πέμπτη καὶ ὑπεναντία τῇ γεωμετρικῇ (τινὲς γὰρ αὐτὴν οὕτως ὀνομάζουσιν). Ὅταν δὲ ὡς ὁ δεύτερος ὅρος ᾗ πρὸς τὸν πρῶτον, ἡ τοῦ πρώτου ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, καλεῖται ἡ μεσότης ἕκτη, λέγεται δὲ καὶ αὕτη ὑπεναντία τῇ γεωμετρικῇ διὰ τὴν αὐτὴν τῶν λόγων ἀντακολουθίαν· ὡς εἶναι κατ' αὐτοὺς μεσότητας ἕξ. Ὑπὸ δὲ τῶν νεωτέρων, ὡς εἵπομεν, ἄλλαι τέσσαρες τὸν ἀριθμὸν εὐρέθησαν πῇ μὲν συμφερόμεναι, κέχρηται δὲ καὶ ὅροις ἰδίους οἱ ταύτας εὐρόντες [νεώτεροι]· καλοῦσι γὰρ τὴν μὲν τοῦ πρώτου ὅρου παρὰ τὸν δεύτερον ὑπεροχὴν πρώτην, τὴν δὲ τοῦ δευτέρου παρὰ τὸν τρίτον ὑπεροχὴν δευτέραν, τὴν δὲ τοῦ πρώτου παρὰ τὸν τρίτον ὑπεροχὴν τρίτην, νοουμένου καὶ λεγομένου δηλονότι, καθὰ καὶ ἐν ἀρχῇ διεστειλάμεθα, τοῦ μὲν μεγίστου ὅρου πρώτου, τοῦ δὲ μέσου δευτέρου, τοῦ δὲ ἐλαχίστου τρίτου.

3.86 Καὶ ὅταν ᾗ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν πρώτην, ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητα ἐβδόμην ἐκάλεσαν. Μένοντος δὲ τοῦ αὐτοῦ λόγου τῶν ὑπεροχῶν, ὅταν γίνηται οὕτως ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, τὴν μεσότητα ὀγδόην ὀνομάζουσιν. Ὅταν δὲ ᾗ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν πρώτην, ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητα ἐνάτην, Ὅταν

δὲ ἢ ὡς ἡ τρίτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν, ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, τὴν μεσότητά δεκάτην ὠνόμασαν. Τούτων δὴ τῶν ὅρων ὑποκειμένων τὰς γενέσεις τῶν δέκα μεσοτήτων ἐκθυσόμεθα καὶ διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ὡς εἵπομεν. [ἀναλογία δὲ συνέστηκεν ἐκ λόγων. λόγου δὲ παντὸς ἰσότης ἀρχή.] Ἡ τοίνυν γεωμετρικὴ μεσότης ἐκ τῆς ἰσότητος τὴν πρώτην λαβοῦσα γένεσιν αὐτὴ τε αὐτὴν καὶ τὰς ἄλλας συστήσει μεσότητας, ἐνδεικνυμένη, καθὰ φησιν ὁ θεϊότατος Πλάτων, τὴν τῆς ἀναλογίας φύσιν αἰτίαν τῆς ἁρμονίας πᾶσι καὶ τῆς εὐλόγου καὶ τεταγμένης γενέσεως· λέγει γὰρ ἓνα δεσμὸν εἶναι τῶν μαθημάτων ἀπάντων, αἰτία δὲ γενέσεως καὶ δεσμὸς πᾶσι τοῖς γενομένοις ἢ τῆς ἀναλογίας θεία φύσις.

3.88 δειχθήσεται δὲ ἡ σύστασις τῶν δέκα μεσοτήτων διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας προθεωρηθέντος τοῦδε. Τρεῖς ἀνάλογον ἔστωσαν ὅροι οἱ Α Β Γ καὶ συναμφοτέρῳ μὲν τῷ Α Γ μετὰ β' τῶν Β ἴσος ἐκκείσθω ὁ Δ, συναμφοτέρῳ δὲ τῷ Β Γ ὁ Ε, τῷ δὲ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Δ Ε Ζ ὅροι ἀνάλογόν εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἔσται καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρος ὁ ΑΒ πρὸς τὸν Β, οὕτως συναμφοτέρος ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Γ· καὶ πάντες ἄρα οἱ ἡγούμενοι πρὸς πάντας τοὺς ἐπομένους εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὡς συναμφοτέρος ὁ Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν Β Γ, οὕτως συναμφοτέρος ὁ Β Γ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἔστιν συναμφοτέρῳ μὲν τῷ Α Β μετὰ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ ἴσος ὁ Δ, συναμφοτέρῳ δὲ τῷ Β Γ ἴσος ὁ Ε, καὶ τῷ Γ ὁ Ζ· καὶ οἱ Δ Ε Ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν [ἐν τῷ συναμφοτέρου τοῦ Α Β πρὸς τὸν Β λόγῳ]. Διόπερ ἴσων μὲν ὑποκειμένων τῶν Α Β Γ οἱ Δ Ε Ζ ἐν τῇ διπλασίᾳ γένοιντ' ἂν ἀναλογία· συναμφοτέρος γὰρ ὁ Α Γ μετὰ δύο τῶν Β διπλασίως συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, συναμφοτέρος δὲ ὁ Β Γ τοῦ Γ διπλασίως· τῶν δὲ Α Β Γ ἐν τῇ διπλασίᾳ ἀναλογία ὑποκειμένων, μεγίστου μὲν ὄντος ἐν αὐτοῖς τοῦ Α οἱ Δ Ε Ζ ἔσσονται ἐν τῇ τριπλασίᾳ, ἐλαχίστου δὲ ἐν τῇ ἡμιολίᾳ· καὶ γὰρ συναμφοτέρος ὁ Α Β τοῦ Β τριπλασίως μὲν ἐστίν, εἰ διπλασίως εἴη ὁ Α τοῦ Β, ἡμιόλιος δέ, εἰ ὁ Α τοῦ Β ἡμισυς εἴη.

3.90 καὶ οὕτως ἀπὸ τῶν ἐξῆς λόγων οἱ ἀκόλουθοι πολλαπλάσιοί τε καὶ ἐπιμόριοι εὐρίσκονται. καὶ πάλιν, εἰ μονάδες εἶεν οἱ Α Β Γ, ἢ κατὰ τοὺς Δ Ε Ζ γεωμετρικὴ μεσότης ἐν ἐλαχίστοις λέγοιτ' ἂν ἀριθμοῖς τοῖς δ' β' α'. ἰθ'. Ἡ ἁρμονικὴ μεσότης διὰ ἀναλογίας οὕτως συνίσταται [καὶ τῆς ἰσότητος ἐν τῇ τάξει τῆς ἀναλογίας διαφόρως κἀνταῦθα κἀν τοῖς ἐξῆς παραλαμβανομένης]. ὑποκείσθωσαν ὅροι τρεῖς ἀνάλογον οἱ Α Β Γ, καὶ δύο μὲν τοῖς Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, δύο δὲ τοῖς Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ἐνὶ δὲ τῷ Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν ἁρμονικὴν ποιοῦσι μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α Β Γ, ἔσσονται καὶ ὡς δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β, οὕτως δύο οἱ Β μετὰ τοῦ Γ πρὸς τὸν Γ, καὶ πάντες πρὸς πάντας δύο οἱ Α μετὰ τριῶν τῶν Β καὶ ἐνὸς τοῦ Γ πρὸς τοὺς Β Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β. καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α μετὰ τοῦ Β ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχουσι δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν Β καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ, εἷς δὲ ὁ Β ὑπεροχὴ ἐστίν ἢ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Ε Ζ ὑπεροχὴ.

3.92 ὅταν δὲ ἢ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἢ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχὴν, ἢ μεσότης ἐστὶν ἁρμονικὴ. καὶ δηλὸν ὅτι λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, μονάδων ὑποτεθεισῶν ὁμοίως τῶν Α Β Γ, τοῖς ζ' γ' β'. κ'. Ἡ τῇ ἁρμονικῇ ὑπεναντία μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ὅρων ἀνάλογον ὑποκειμένων τῶν Α Β Γ δύο μὲν τοῖς Α καὶ τρισὶ τοῖς Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, δύο δὲ τοῖς Α καὶ δύο τοῖς Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Ε, ἐνὶ δὲ τῷ Β καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ τὴν εἰρημένην ποιοῦσι μεσότητα. Πάλιν γὰρ ὁμοίως τοῖς προδεδειγμένοις ἔσται ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως δύο οἱ Α μετὰ τοῦ Β πρὸς τὸν Β. καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ Α μετὰ τοῦ Β ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχουσιν δύο οἱ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ ἐνὸς τοῦ Β καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Ε Ζ ὑπεροχὴ, εἷς δὲ ὁ Β ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχουσι δύο οἱ Α καὶ τρεῖς οἱ Β καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν Α καὶ δύο τῶν Β καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ· ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἢ τῶν Δ Ε

ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν E Z ὑπεροχὴν, ὅπερ ἐστὶ κατὰ τὴν μεσότητά τὴν τῇ ἀρμονικῇ ὑπεναντίαν. δηλὸν δ' ὅτι καί, μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν A B Γ, εἴη ἂν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἡ μεσότης τοῖς ζ' ε' β'. [ἡ αὕτη καταγραφὴ.] Ἡ πέμπτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθωσαν ἀνάλογον ὅροι τρεῖς οἱ A B Γ, καὶ ἐνὶ μὲν τῷ A καὶ τρισὶ τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, ἐνὶ δὲ τῷ A καὶ δύο τοῖς B.

3.94 καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ E, ἐνὶ δὲ τῷ B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Z· λέγω ὅτι οἱ Δ E Z κατὰ τὴν πέμπτην εἰσὶ μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐστὶν ὡς ὁ A μετὰ τοῦ B πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ B μετὰ τοῦ Γ πρὸς τὸν Γ, ἔσται καὶ συναμφοτέρος ὁ ἡγούμενος ὁ A B μετὰ συναμφοτέρου τοῦ B Γ πρὸς τὸν ἐπόμενον συναμφοτέρον τὸν B Γ, τουτέστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z, οὕτως συναμφοτέρος ὁ A B πρὸς τὸν B. καὶ ἔστι συναμφοτέρος μὲν ὁ A B ἢ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει εἷς ὁ A καὶ δύο οἱ B καὶ εἷς ὁ Γ ἐνὸς τοῦ B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν E Z ὑπεροχὴ, ὁ δὲ B ἢ ὑπερέχει εἷς ὁ A καὶ τρεῖς οἱ B καὶ εἷς ὁ Γ ἐνὸς τοῦ A καὶ δύο τῶν B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ E ὑπεροχὴ· ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν E, οὕτως ἡ τῶν Δ E ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν E Z ὑπεροχὴν, ὅπερ τῇ πέμπτῃ συμβέβηκεν μεσότητι. καὶ λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς ε' δ' β', μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν A B Γ. [ἡ αὕτη δὲ καταγραφὴ.] Ἡ ἕκτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθω ἡ αὕτη τῶν A B Γ ὁρων ἀναλογία, καὶ ἐνὶ μὲν τῷ A καὶ τρισὶ τοῖς B καὶ δύο τοῖς Γ ἴσος ὁ Δ, ἐνὶ δὲ τῷ A καὶ δύο τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ E, ὁ δὲ Z ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ὁ AB τοῦ Γ· λέγω ὅτι οἱ Δ E Z τὴν προκειμένην ποιοῦσι μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ἐστὶν ὡς ὁ A μετὰ δύο τῶν B πρὸς συναμφοτέρον τὸν A B, οὕτως ὁ B μετὰ δύο τῶν Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν B Γ, καὶ πάντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς πάντας τοὺς ἐπομένους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὡς ὁ A καὶ τρεῖς οἱ B καὶ δύο οἱ Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν A B μετὰ συναμφοτέρου τοῦ B Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ B μετὰ δύο τῶν Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν B Γ, καὶ ἔστιν ὁ μὲν B μετὰ δύο τῶν Γ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει ὁ A μετὰ δύο τῶν B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ὁ A B τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν E Z ὑπεροχὴ, συναμφοτέρος δὲ ὁ B Γ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει ὁ A μετὰ τριῶν τῶν B καὶ δύο τῶν Γ ἐνὸς τοῦ A καὶ δύο τῶν B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ E ὑπεροχὴ, ὡς ἄρα E πρὸς Δ, οὕτως ἡ τῶν Δ E ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν E Z ὑπεροχὴν, ὥστε οἱ Δ E Z τὴν ἕκτην ποιοῦσι μεσότητα.

3.96 καὶ συνίσταται ὁμοίως ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς ζ' δ' α', μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν A B Γ. [ἡ αὕτη καταγραφὴ.] κα'. Ἡ δὲ ὀγδόη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀνάλογον ὅροι οἱ A B Γ, καὶ δύο μὲν τοῖς A καὶ τρισὶ τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ἴσος ὁ Δ, ἐνὶ δὲ τῷ A καὶ δύο τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ E, δύο δὲ τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Z· λέγω ὅτι οἱ Δ E Z κατὰ τὴν ὀγδόην εἰσὶ μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ἀναλογίαν ὡς δύο οἱ A μετὰ τοῦ B πρὸς συναμφοτέρον τὸν A B, οὕτως δύο οἱ B μετὰ τοῦ Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν B Γ, καὶ πάντες πρὸς πάντας, ὡς δύο οἱ A καὶ τρεῖς οἱ B καὶ εἷς ὁ Γ πρὸς ἓνα τὸν A καὶ δύο τοὺς B καὶ ἓνα τὸν Γ, τουτέστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, οὕτως δύο οἱ A μετὰ τοῦ B πρὸς συναμφοτέρον τὸν A B, καὶ εἰσὶν δύο μὲν οἱ A μετὰ τοῦ B ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχουσιν δύο οἱ A καὶ τρεῖς οἱ B καὶ εἷς ὁ Γ δύο τῶν B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ Z ὑπεροχὴ, συναμφοτέρος δὲ ὁ A B ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχουσιν δύο οἱ A καὶ τρεῖς οἱ B καὶ εἷς ὁ Γ ἐνὸς τοῦ A καὶ δύο τῶν B καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἡ τῶν Δ E ὑπεροχὴ, καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν E, ἡ τῶν Δ Z ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Δ E ὑπεροχὴν, ὅπερ τὴν ὀγδόην συνίστησι μεσότητα.

3.98 καὶ λέγοιτ' ἂν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς τοῖς ζ' δ' γ', μονάδων νοουμένων τῶν A B Γ. κβ'. Ἡ ἐνάτη μεσότης δι' ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. τῶν A B Γ ἀνάλογον ὑποκειμένων ἐνὶ μὲν τῷ A καὶ δύο τοῖς B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, ἐνὶ δὲ τῷ A καὶ ἐνὶ τῷ B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ E, ἐνὶ δὲ τῷ B καὶ ἐνὶ τῷ Γ ὁ Z· λέγω ὅτι οἱ Δ E Z τὴν ἐνάτην περιέχουσιν μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ὁ A B πρὸς τὸν B, οὕτως συναμφοτέρος ὁ B Γ πρὸς τὸν Γ, καὶ πάντες πρὸς

πάντας, ὥς ὁ Α μετὰ δύο τῶν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς συναμφοτέρον τὸν Β Γ, τουτέστιν ὥς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως συναμφοτέρος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ συναμφοτέρος μὲν ὁ Α Β ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει εἰς ὁ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἰς ὁ Γ συναμφοτέρου τοῦ Β Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ, ὁ δὲ Β ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει εἰς ὁ Α καὶ δύο οἱ Β καὶ εἰς ὁ Γ ἐνὸς τοῦ Α καὶ ἐνὸς τοῦ Β καὶ ἐνὸς τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Δ Ε ὑπεροχὴ, καὶ ὥς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, ἢ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Δ Ε ὑπεροχὴν, ὅπερ τῆς ἐνάτης μεσότητος ἴδιόν ἐστιν.

3.100 καὶ περιέχουσιν αὐτὴν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ δ' γ' β', μονάδων ὑποκειμένων ὁμοίως τῶν Α Β Γ. [ἢ αὐτὴ καταγραφὴ.] κγ'. Ἡ δεκάτη μεσότης ἐκ τῆς ἀναλογίας οὕτως συνίσταται. πάλιν τριῶν ἀνάλογον ὄντων τῶν Α Β Γ τοῖς μὲν Α Β Γ ἴσος ἔστω ὁ Δ, τοῖς δὲ Β Γ ὁ Ε, τῷ δὲ Γ ὁ Ζ· λέγω ὅτι οἱ Δ Ε Ζ κατὰ τὴν δεκάτην εἰσὶ μεσότητα. Ἐπεὶ γὰρ ὥς συναμφοτέρος ὁ Β Γ πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως συναμφοτέρος ὁ Α Β πρὸς τὸν Β, καὶ ἔστιν συναμφοτέρος ὁ Α Β ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχουσιν οἱ Α Β Γ τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ, ὁ δὲ Β, ἢ ὑπερέχουσιν οἱ Β Γ τοῦ Γ, τουτέστιν ἢ τῶν Ε Ζ ὑπεροχὴ, ἔστιν ἄρα ὥς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ἢ τῶν Δ Ζ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν Ε Ζ ὑπεροχὴν, ὃ τῇ δεκάτῃ συμβέβηκεν μεσότητι. καὶ ποιοῦσιν αὐτὴν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ οἱ γ' β' α', μονάδων ὑποτεθεισῶν τῶν Α Β Γ. Ἐκκείναι δὲ τοῦ προχείρου χάριν καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἐξῆς, καθ' οὓς ἕκαστος ὅρος τῆς ἀναλογίας πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ μεσότητα ἐκάστην, καὶ παράκεινται οἱ ἐλάχιστοι περιέχοντες αὐτάς. οἷον ἐπὶ τοῦ τῆς ἑκτῆς μεσότητος πλινθίου ὁ μὲν πρῶτος στίχος ὁ α' γ' β' σημαίνει τοῦθ' ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀναλογίας ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος τρίς καὶ ὁ τρίτος δις συντεθέντες τὸν πρῶτον τῆς μεσότητος ὅρον ἀποπληροῦσιν. ὁ δὲ δεύτερος τοῦ πλινθίου στίχος ὁ α' β' α' σημαίνει ὅτι ὁ πρῶτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος δις καὶ ὁ τρίτος ἅπαξ τὸν δεύτερον ὅρον ἀποπληροῦσι τῆς μεσότητος. ὁ δὲ τρίτος τοῦ πλινθίου στίχος ἐπὶ μὲν τῶν ἄλλων μεσοτήτων ἀπλῶς, ὥς γέγραπται, συντίθεται, ἰδίως δ' ἐπὶ ταύτης ὁ α' α' α', καθὼ προεῖρηται, σημαίνει γίνεσθαι τὸν τρίτον τῆς μεσότητος ὅρον ἐκ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὁ πρῶτος τῆς ἀναλογίας ὅρος ἅπαξ καὶ ὁ δεύτερος ἅπαξ συντεθέντες ὑπερέχουσιν ἅπαξ ληφθέντος τοῦ τρίτου.

3.104 οἱ δ' ἐκ τῆς τρίτης τοῦ πλινθίου ἀριθμοὶ οἱ ζ' δ' α' τὴν μεσότητα περιέχουσιν αὐτὴν. [ὥς γὰρ ὁ δεύτερος ὅρος πρὸς τὸν πρῶτον, τουτέστιν ὥς αἱ τέσσαρες μονάδες πρὸς τὰς ἑξ, οὕτως ἢ ὑπεροχὴ τοῦ πρῶτου παρὰ τὸν δεύτερον, τουτέστιν ἢ τῶν ἑξ μονάδων παρὰ τὰς τέσσαρας ὑπεροχὴ, αἵπερ εἰσὶ μονάδες δύο, πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τοῦ δευτέρου ὅρου παρὰ τὸν τρίτον, τουτέστι τῶν τεσσάρων μονάδων παρὰ τὴν μίαν, αἵπερ εἰσὶ μονάδες τρεῖς. ἐκάτερος γὰρ λόγος (ἐκατέρου) ὑφημιόλιος· αἱ τε γὰρ τέσσαρες μονάδες τῶν ἑξ καὶ δύο τῶν τριῶν τὸν αὐτὸν ὑφημιόλιον περιέχουσι λόγον.] τὰ δ' ὅμοια καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων πλινθίων νοείσθω. κδ'. Τὸ δὲ τρίτον τῶν προβλημάτων ἦν τόδε. Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Β γωνίαν, καὶ διήχθω τις ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ δίχα τμηθείσης τῆς ΕΑ κατὰ τὸ Ζ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΖΓ δεῖξαι συναμφοτέρας τὰς ΔΖΓ δύο πλευρὰς ἐντὸς τοῦ τριγώνου μείζονας τῶν ἐκτὸς συναμφοτέρων τῶν ΒΑΓ πλευρῶν. Καὶ ἔστι δῆλον. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΓΖΑ, τουτέστιν αἱ ΓΖΕ, τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ, αἱ ΓΖΑ ἄρα δύο τῶν ΓΑΒ μείζονές εἰσιν. Ἦν δὲ τὸ προκείμενον ὑγιέστερον προτεῖναι καὶ οὕτως. ὀρθογωνίου τυχόντος ὑποκειμένου τοῦ ΑΒΓ λαβεῖν τι σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθείας ἀγαγεῖν, μίαν μὲν τέμνουσαν τὴν ΒΓ, τὴν δὲ λοιπὴν ἐπὶ τὸ Γ ἐρχομένην, ὥστε συναμφοτέρας μείζονας εἶναι τῶν ἐκτὸς, ἵνα δηλονότι [ὁ προταθείς] διάξας τυχοῦσαν τὴν ΑΔ καὶ θεῖς τῇ ΑΒ ἴσην τὴν ΔΕ καὶ τεμὼν δίχα τὴν ΕΑ κατὰ τὸ Ζ ἀποδείξῃ τὸ Ζ σημεῖον ποιοῦν τὸ πρόβλημα.

3.106 ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΓΖ δύο αἱ ΓΖΑ δύο τῶν ἐκτὸς ΓΑΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' ὅτι τοῦτο μὲν, ὅπως ἂν τις ἐθέλοι προτείνειν, ἀπειραχῶς δείκνυται δῆλον, οὐκ ἄκαιρον δὲ καθολικώτερον περὶ τῶν τοιούτων προβλημάτων διαλαβεῖν ἀπὸ τῶν φερομένων παραδόξων Ἐρυκίνου

προτείνοντας οὕτως. κε'. Ἐν παντὶ τριγώνῳ, πλὴν τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσοσκελοῦς τοῦ τὴν βάσιν ἐλάσσονα τῆς πλευρᾶς ἔχοντος, δυνατόν ἐστι συσταθῆναί τινας ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς δύο εὐθείας ἴσας ταῖς ἐκτὸς ὁμοῦ λαμβανομέναις. Ἔστω πρότερον ἀνισοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ, καὶ τετμήσθω συναμφοτέρως ἡ ΑΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν Δ Β τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Η, καὶ τῇ ΕΑ παράλληλος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΓ ἐκβεβλήσθω. ἐπεὶ μείζονες αἱ μὲν ΕΒΖ τῆς ΕΖ αἱ δὲ ΓΖΗ τῆς ΓΗ, συναμφοτέροι ἄρα ἡ ΕΒΓ μετὰ τῆς ΗΖ μείζονες εἰσι συναμφοτέρων τῶν ΕΖ ΗΓ. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ συναμφοτέρος ἡ ΕΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΗΓ, καὶ μᾶλλον τῆς ΗΓ. ἔστω συναμφοτέρῳ τῇ ΕΒΓ ἴση ἡ ΗΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ τοῦ Α γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΚΟ· τέμνει δὴ ἑκατέραν τῶν ΓΘ ΘΗ, ἐπεὶ ἡ ΑΕ, τουτέστιν ἡ ΘΗ, μείζων ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ, τουτέστιν τῆς ΗΛ.

3.108 ἐπεξεύχθω ἡ ΚΗ· λέγω δὴ ὅτι συναμφοτέρος ἡ ΘΗΚ ἴση ἐστὶν συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΓ. Ἔστιν δὲ φανερόν· ἡ μὲν γὰρ ΗΘ τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΗΛ, τουτέστιν συναμφοτέρῳ τῇ ΕΒΓ ἴση, καὶ γίνεται ἀπειραχῶς. κς'. Ἔστω δὴ νῦν ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὴν μὲν ΑΒ ἴσην ἔχον τῇ ΒΓ, τὴν δὲ ΑΓ μείζονα ἑκατέρας αὐτῶν, καὶ περὶ κέντρον τὸ Α διὰ τοῦ Β γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΕΔ, καὶ διήχθω τις ἡ ΑΕΖ τέμνουσα τὴν ΒΓ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ τῇ ΑΖ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ τῇ ΕΗ ἴση ἀφηρήσθω ἡ ΒΝ· ἔσται οὖν ἡ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΚΛ, ἴση συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΝ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΓ ἐλάσσων τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν ΘΖΗ τῆς ΘΗ μείζονες εἰσιν, αἱ δὲ ΓΘΚ τῆς ΓΚ, συναμφοτέροι ἄρα αἱ ΓΖΗ μετὰ τῆς ΘΚ μείζονες εἰσιν συναμφοτέρων τῶν ΓΚ ΗΘ. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΘΚ· λοιπὴ ἄρα συναμφοτέρος ἡ ΓΖΗ μείζων συναμφοτέρων τῶν ΓΚ ΗΘ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΗ· συναμφοτέροι ἄρα αἱ ΑΖΓ συναμφοτέρων τῶν ΑΗ ΗΚ ΚΓ μείζονες εἰσιν.

3.110 τῶν δὲ ΑΖΓ μείζονες εἰσιν αἱ ΑΒΓ· καὶ αἱ ΑΒ ΒΓ ἄρα τῶν ΑΗ ΗΚ ΚΓ μείζονες. ὧν συναμφοτέρος ἡ ΑΒΝ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΝΓ μείζων τῶν ΗΚΓ συναμφοτέρων καὶ μᾶλλον τῆς ΚΓ. κείσθω οὖν τῇ ΝΓ ἴση ἡ ΚΜ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Κ διὰ τοῦ Μ γραφεῖσα κύκλου περιφέρεια τεμνέτω τὴν ΓΛ κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΞ· λέγω δὴ ὅτι συναμφοτέρος ἡ ΑΚΞ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΓ. Ἔστι δὲ φανερόν· ἡ μὲν γὰρ ΚΛ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΝ, ἡ δὲ ΚΞ τῇ ΚΜ, τουτέστιν τῇ ΝΓ, καὶ γίνεται ἀπειραχῶς. κζ'. λέγω δ' ὅτι, ἐὰν ᾗ ἰσόπλευρον τὸ τρίγωνον ἢ ἰσοσκελὲς τὴν βάσιν ἐλάσσονα τῆς πλευρᾶς ἔχον, ἀδύνατον ἔσται συσταθῆναι τὰς ἐντὸς ἴσας ταῖς ἐκτὸς, ἀλλ' αἱ ἐντὸς ἐλάσσονες ἔσονται. Ἔστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσόπλευρον ἢ ἰσοσκελὲς ἔχον τὴν ΑΓ βάσιν ἐλάσσονα ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ συνεστάτωσαν τινες ἐντὸς αἱ ΔΕ ΕΗ· λέγω ὅτι ἐλάσσονες εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, μείζων ἡ ὑπὸ ΒΓΑ τῆς ὑπὸ ΖΑΓ. τῆς δ' ὑπὸ ΒΓΑ μείζων ἡ ὑπὸ ΖΔΑ· πολλῶ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ ΖΔΑ τῆς ὑπὸ ΖΑΔ, ὥστε καὶ ἡ ΑΖ μείζων τῆς ΖΔ. ἐπεὶ μείζων μὲν ἡ ὑπὸ ΑΖΒ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ, ἡ δ' ὑπὸ ΒΓΑ διὰ τὴν ὑπόθεσιν οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, ἔσται μείζων ἡ ὑπὸ ΑΖΒ τῆς ὑπὸ ΑΒΖ, ὥστε καὶ ἡ ΑΒ μείζων τῆς ΑΖ.

3.112 ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΖΔ ἐδείχθη μείζων· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΔΖ καὶ πολλῶ μᾶλλον τῆς ΔΕ μείζων. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ΒΓ μείζων τῆς ΕΗ· ἐλάσσονες ἄρα εἰσὶν αἱ ΗΕΔ τῶν ΑΒΓ. κη'. Ἐφ' ὧν μέντοι τριγώνων αἱ ἐντὸς ἴσαι συνίστανται ταῖς ἐκτὸς, ἐπ' ἐκείνων καὶ μείζους τῶν ἐκτὸς ἐντὸς τινες εἶναι δύνανται συναμφοτέροι λαμβανόμεναι. Ἔστωσαν γὰρ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ αἱ ΔΕΖ ἴσαι ταῖς ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω μία τῶν ἐντὸς ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Η, καὶ μεταξὺ τῶν Ε Η εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΖ· ἔσονται δὴ αἱ ΔΚΖ μείζονες τῶν ΔΕΖ, ὥστε καὶ τῶν ΑΒΓ. δῆλον δ' ὅτι, κἂν ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ Κ σημεῖον οὕτως ληφθῇ ὥστε τὰς ΔΕΖ περιέχεσθαι ὑπὸ τῶν ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Δ Ζ ἐπιζευγνυμένων, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας

καταγραφῆς, καὶ οὕτως ἔσται τὸ αὐτό, καὶ ἐκατέρως ἀπειραχῶς ἔσται τὸ προκείμενον. καθ'. Καὶ τούτου παραδόξου δοκοῦντος εἶναι τοῖς ἀγεωμετρήτοις ἔτι παραδοξότερον φανεῖται τὸ μὴ μόνον συναμφοτέρων συναμφοτέρω, ἀλλὰ καὶ ἐκατέραν τῶν συνισταμένων ἐντὸς ἐκατέρᾳ τῶν ἐκτὸς καὶ ἴσην εἶναι δύνασθαι καὶ μείζονα κατὰ μίαν. δείκνυται δ' οὕτως. Ὑποκείσθω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ ἐλάσσονα ἔχον, τὴν δὲ ΑΓ ἐκατέρας αὐτῶν μείζονα, καὶ περὶ κέντρον τὸ Α διὰ τοῦ Β κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΖ, καὶ εἰλήφθω μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΓ.

- 3.114 ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΔ μείζων τῆς ΑΒ καὶ διὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς ΒΓ, ἡ δὲ ΔΓ ἐλάσσων τῆς ΒΓ, ἐὰν ἐκβαλόντες τὴν ΔΓ τῇ ΒΓ ἴσην θῶμεν ἐκατέραν τῶν ΔΘ ΔΚ, ὁ περὶ κέντρον τὸ Δ διὰ τῶν Θ Κ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΖ. τεμνέτω κατὰ τὸ Η, καὶ μεταξὺ τῶν Α Η εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Λ· δῆλον δὴ ὅτι ἐπιζευχθείσης τῆς ΔΛ ἐκατέρα τῶν ΑΔ ΔΛ ἐκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ ἔσται μείζων. λ'. Ἄν δὲ θέλωμεν ἐκατέραν ἐκατέρᾳ ἴσην εἶναι, δεήσει τὴν μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ μείζονα ὑποθέσθαι, τὴν δὲ ΒΓ τῆς ΒΑ ἐλάσσονα. Ἐχέτω γὰρ οὕτως, καὶ ὁμοίως ἡ ΒΕΖ περιφέρεια γεγράφθω, καὶ τὸ Δ σημεῖον εἰλήφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΔΓ, καὶ τῆς ΔΓ ἐκβληθείσης τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΔΚ, καὶ ἡ ΚΗΘ περιφέρεια κατὰ τὸ αὐτὸ γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ΑΔ κατὰ τὸ Θ, τὴν δὲ ΑΖ κατὰ τὸ Η.
- 3.116 ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ἔσται καὶ τῆς ΔΘ μείζων. κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΔΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Δ διὰ τοῦ Λ περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ΑΗ κατὰ τὸ Μ. φανερόν δὴ ὅτι ἐπιζευχθεῖσα ἐκατέρα τῶν ΔΜ ΔΗ ἴση ἔσται ἐκατέρᾳ τῶν ΑΒ ΒΓ. λα'. Μᾶλλον δ' ἂν ἐπιταθείη τὸ παράδοξον, εἰ μὴ μόνον ἴσαι ἢ μείζους ἀπλῶς εἶεν αἱ ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς τοῦ τριγώνου συνιστάμεναι τῶν περιεχουσῶν δύο πλευρῶν, ἀλλὰ καὶ λόγον ἔχοιεν πρὸς αὐτὰς τὸν ἐπιταχθέντα. Κατεσκευάσθωσαν γὰρ αἱ ΕΖΚ ἴσαι ταῖς ΑΒΓ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ἐστι γενέσθαι [διὰ τῶν πρώτων] εἴρηται ἐν ἀρχῇ), καὶ τὸ μὲν Π δίχα τεμνέτω συναμφοτέρων τὴν ΑΒΓ, ἡ δὲ ΘΖΗ παράλληλος ἦχθω τῇ ΑΓ [καὶ ἡ ΖΕ δὲ παράλληλος ἔστω τῇ ΒΑ], καὶ τῷ δοθέντι λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΑΒ πρὸς ΑΛ, καὶ τῇ ΑΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΛΜΝ, καὶ ἐπὶ τῆς ΛΜΝ σημεῖον εἰλήφθω τὸ Μ, ὥστε τὰς δι' αὐτοῦ ταῖς ΒΑ ΒΓ παραλλήλους ἀγομένας τὰς ΜΟ ΜΔ περιλαμβάνειν τὸ Ζ. ἔσται δὴ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΕΖΚ, πρὸς συναμφοτέρων τὴν ΑΛ ΝΓ, τουτέστι πρὸς συναμφοτέρων τὴν ΟΜΔ, δοθεὶς λόγος ἐν ᾧ τῷ ΟΜΔ τριγώνῳ ἐντὸς οὔσαι αἱ ΕΖΚ πρὸς τὰς ΟΜΔ περιεχούσας λόγον ἔχουσι τὸν ἐπιταχθέντα. Ἐπεὶ δὲ δεῖ τὴν ΛΜΝ ἀνώτερον πίπτειν τῆς ΗΘ, δεῖ τὴν ΒΑ τῆς ΑΛ ἐλάσσονα εἶναι ἢ διπλασίαν (ἐπεὶ καὶ τῆς ΑΠ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία), ὥστε καὶ τὸν δοθέντα λόγον δεήσει ἐλάσσονα εἶναι τοῦ διπλασίου.
- 3.118 δῆλον δ' ὅτι, ὅσῳ ἂν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ πολλαπλασία γίνηται, ἡ δὲ Β γωνία ἀμβλύνηται, μᾶλλον αἱ ΕΖΚ τῷ διπλασίῳ συνεγγιούσιν λόγῳ, καὶ μᾶλλον, εἰ μὴ ἴσαι εἶεν αἱ ΕΖΚ ταῖς ΑΒΓ ἀλλὰ μείζους αὐτῶν, καὶ φανερόν, εἰ καθέτου ἀχθείσης τῆς ΜΞ πρὸς τὰς ΟΜΞ συγκρίνονται. δυνατόν δὲ καὶ καθ' ἑτέρας ἐφόδους τὸ αὐτό, ἀλλὰ πρὸς ἔνδειξιν ἱκανὸς ὁ τρόπος οὗτος. λβ'. Οὐ μόνον δ' ἐπὶ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως αἱ εὐθεῖαι συνίστανται συναμφοτέραι μείζους τῶν ἐκτὸς αἱ ἐντὸς, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τετραπλεύρου δύο τῶν τριῶν καὶ τρεῖς τῶν τριῶν, καὶ ἐπὶ τῶν ἔτι πολυπλευροτέρων ὁμοίως ὅσαιδὲ αἱ ἐντὸς ὅσωνοῦν τῶν ἐκτὸς μείζους εἶναι δύνανται. Ἄν γὰρ ἡ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἐν ᾧ συνίστανται αἱ ΔΕΖ μείζονες τῶν ΑΒΓ καὶ διαχθῇ ἡ ΠΘ τυχούσα ὑπὲρ τὸ Ε, μείζονες ἔσονται αἱ ΔΕΖ τῶν ΑΠ ΠΘ ΘΓ ἐν τῷ ΑΠΘΓ τετραπλεύρῳ.
- 3.120 κἂν τυχούσα κλασθῇ ἡ ΔΚΕ, αἱ τρεῖς ὁμοῦ αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΖ τῶν τριῶν τῶν ΑΠ ΠΘ ΘΓ μείζους ἔσονται. κἂν πάλιν κλασθῇ ἡ ΠΗΘ, μείζους ἔσονται αἱ ΔΕΖ καὶ ἔτι αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΖ τῶν τεττάρων τῶν ΑΠ ΠΗ ΗΘ ΘΓ ἐν πενταπλεύρῳ. κἂν ἔτι κλασθῇ ἡ ΕΛΖ, μείζους ἔσονται τέτταρες αἱ ΔΚ ΚΕ ΕΛ ΛΖ τῶν τεττάρων τῶν ΑΠ ΠΗ ΗΘ ΘΓ. κἂν ἡ ΠΗΨΘ κλασθῇ, κἂν ἔτι πρὸς πλείω σημεία τῶν Η Ψ καὶ τῶν Κ Λ ἢ κλάσις γίνηται, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. καὶ ἐπὶ τὸ ἄπειρον, ὅσας ἂν τις ἐπιτάξῃ

τὰς ἐντὸς ὁσωνδὴ τῶν ἐκτὸς εἶναι μείζους, τῷ αὐτῷ τρόπῳ κατασκευασθήσεται. λγ'. Δυνατὸν δὲ καὶ τὰς ἐντὸς ὁσαισδὴ ταῖς ἐκτὸς περιλαμβανούσαις πάσαις ὁμοῦ πάσας ἴσας εἶναι. Κατασκευασθείσων γάρ, ὡς προδεδείκται, τῶν ΗΘ ΘΚ ΚΛ ΛΜ μειζόνων ὁσωνδὴ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ, ἂν κλασθῇ ἡ ΒΝΞΕ τῷ ἴσῳ μείζων τῆς ΒΓΔΕ, γεγονὸς ἔσται τὸ προκείμενον.

3.122 λδ'. Ῥάδιον δὲ ἀπὸ δύο σημείων τῶν Β Ε κλάσαι τὴν ΒΝΞΕ καθόλου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην τῶν κλασμάτων τὸ πλῆθος δοθὲν ἔχουσιν. Ἐστω γάρ τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α Β, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει εὐθεῖα ΑΓ μείζων τῆς ΑΒ, καὶ διηρήσθω ἡ ΒΓ εἰς τυχούσας εὐθείας τὰς ΒΔ ΔΕ ΕΓ μιᾷ ἐλάσσονας τοῦ τῶν κλασμάτων πλῆθους, καὶ ἡ μὲν ΑΘΒ κεκλάσθω τῆς ΑΒ ὑπερέχουσα τῇ ΒΔ (Ῥάδιον γὰρ ποιῆσαι), ἡ δὲ ΑΗΘ κεκλάσθω τῆς ΑΘ ὑπερέχουσα τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΖΗ κεκλάσθω τῆς ΑΗ ὑπερέχουσα τῇ ΕΓ· ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΑΖ ΖΗ ΗΘ ΘΒ ἴσον τῷ δοθέντι, καὶ ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη εὐθεῖα ἴση τῇ ΑΓ. εὐκολον γὰρ ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦτο συνιδεῖν καὶ ὅτι ἀπειραχῶς γίνεται. λε'. Δυνατὸν δὲ καὶ παραλληλόγραμμον εὑρεῖν, οὗ ἐπὶ τῆς βάσεως ἐντὸς εὐθεΐαι δύο συνίστανται ταῖς περιεχούσαις τρισὶν ἴσαι καὶ μείζους αὐτῶν προδιδαχθέντος τοῦδε. Ἐστω ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ δοθείσῃ μείζων ἢ ἐν λόγῳ· ἀγαγεῖν παράλληλον τῇ ΑΓ τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν ἐν τῷ λόγῳ τὴν ΑΔ πρὸς συναμφοτέρων τὴν ΔΕ ΒΓ.

3.124 Γεγονέτω. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ δοθείσῃ μείζων ἐστὶν ἢ ἐν λόγῳ, ἔστω λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ μετὰ δοθείσης· ἔστω τῆς Ζ. ὁ δ' αὐτός ἐστιν καὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὰς ΔΕ ΒΓ· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ΒΔ λόγος πρὸς τὴν τῶν Ζ ΔΕ ὑπεροχὴν ὁ αὐτός ἐστίν. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ Ζ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΕ *** θέσει ἄρα *** ὥστε καί, ἂν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων ᾖ ἢ διπλῇ, δυνατὸν ἔσται ἀγαγεῖν παράλληλον τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν τὴν ΑΔ διπλὴν συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ. λς'. Ἐκκεῖσθω δὴ τοιοῦτον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὥστε τὴν μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζονα εἶναι ἢ διπλασίαν, τὴν δὲ ΑΓ τῆς ΓΒ διπλασίαν, καὶ ἦχθω παράλληλος ἡ ΔΕ ποιοῦσα τὴν ΑΔ διπλασίαν συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ, καὶ τῆς ΔΕ διπλασία κείσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΑΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον *** Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν ΖΑ διπλασία ἐστὶν τῆς ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΓΒ, ἔσται ὅλη ἡ ΖΓ, τουτέστιν ἡ ΗΒ, διπλασία συναμφοτέρου τῆς ΔΕ ΒΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν τῇ ΑΔ.

3.126 ἐπειδὴ ἡ ΑΔ τῆς ΒΓ μείζων ἢ διπλασία, κατήχθω ἡ ΔΘ διπλασία τῆς ΒΓ· ἴση ἄρα ἡ ΔΘ ταῖς ΗΖ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΗΒ ἴση· αἱ ΑΔΘ ἄρα ἴσαι ταῖς ΖΗ ΗΒ ΒΓ, καὶ ἔστιν παραλληλόγραμμον τὸ ΖΗΒΓ. Δῆλον δ' ὅτι καὶ μείζους αἱ ΑΔΘ τῶν ΖΗ ΗΒ ΒΓ δύνανται εἶναι. Καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς τοῦ Κ μᾶλλον αἱ ΑΚ ΚΔ ΔΘ μείζους τῶν ἐκτός. Καὶ εἰ, ὅσῳ μείζους εἰσὶν, κλασθεῖν ἡ ΗΛΒ τῷ αὐτῷ μείζων τῆς ΗΒ, ἔσσονται καὶ αἱ ΑΚ ΚΔ ΔΘ ἴσαι ταῖς ΖΗ ΗΛ ΑΒ ΒΓ ἐν πενταπλεύρῳ. καὶ ἐπὶ τῶν πολυπλευροτέρων ὁ αὐτὸς τρόπος, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τυχόντος τετραπλεύρου συνισταμένων προδεδείκται. λζ'. Ἐπεται τοῖς προειρημένοις καὶ τὰ τοιαῦτα. δοθέντος παραλληλογράμμου χωρίου δυνατὸν ἐστὶν εὑρεῖν ἕτερον παραλληλόγραμμον, ὥστε αὐτὸ μὲν τὸ ἐπιταχθὲν μέρος εἶναι τοῦ δοθέντος, ἐκάστην δὲ πλευρὰν ἐκάστης πολλαπλασίαν κατὰ τὸν δοθέντα ἀριθμόν. Ἐστω γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐκατέρα τῶν ΕΔ ΔΖ πολλαπλασία ἐκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμούς, καὶ ἦχθω τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ, καὶ ἀπειλήφθω τὸ ὑπὸ ΔΕΚ τὸ ἐπιταχθὲν μέρος τοῦ ΑΓ παραλληλογράμμου, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΘΚΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Δ περιφέρεια γραφεῖσα ἡ ΖΗΘ τεμνέτω τὴν ΘΚΛ κατὰ τὸ Θ καὶ ἐπιζευχθείσῃ τῇ ΔΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΛ.

3.128 δῆλον δ' ἐκ τῆς κατασκευῆς ὅτι αὐτὸ μὲν τὸ ΔΛ παραλληλόγραμμον τὸ δοθὲν μέρος ἐστὶν τοῦ ΑΓ ὀρθογωνίου, ἐκάστη δὲ αὐτοῦ πλευρὰ ἐκάστης πολλαπλασία κατὰ τοὺς προτεθέντας ἀριθμούς. λη'. Πάλιν τριγώνου δοθέντος ἔλασσον εὐρίσκεται τρίγωνον ἐκάστην ἔχον πλευρὰν ἐκάστης μείζονα. Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ βάσις ἐφ' ἐκάτερα μέρη, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, τῇ δὲ ΑΓ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ περὶ τὴν ΔΕ εὐθεΐαν τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν τὸ Θ.

ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΘΖ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΘ τῆς ΒΑ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΑΓ μείζων. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΒΓ μείζων· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΘΖ ΖΗ ΗΘ κατὰ μίαν μείζονές εἰσιν τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ. ἐπεὶ δὲ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗΘ τριγώνου, ἀλλὰ τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ τὰς ἐλάσσονας ἔχον πλευρὰς τοῦ ΖΗΘ.

3.130 λθ'. Τοῦτο μὲν ἐν τοῖς παραδόξοις φέρεται, γένοιτο δ' ἂν παραδοξότερον, εἰ τὸ μὲν τρίγωνον αὐτὸ εὐρεθείη μέρος τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἐκάστη δὲ πλευρὰ ἐκάστης πολλαπλασία κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς [ὡς ἐπὶ τοῦ παραλληλογράμμου προεῖρηται] ἢ καὶ μείζων ἢ πολλαπλασία. Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ συνεστάτω τρίγωνον τὸ ΕΖΗ ἐκάστην πλευρὰν ἔχον ἐκάστης τῶν τοῦ ΑΒΓ πλευρῶν πολλαπλασίαν κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς [ἢ καὶ μείζονας ἢ πολλαπλασίας], καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ μὲν τοῦ Ε περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΕΘΚ, διὰ δὲ τοῦ Ζ περιφέρεια ἡ ΖΑΜ, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΗΜ, καὶ κάθετος ἦχθω ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΗΝ, καὶ ἔστω τὸ ἐπιταχθὲν μέρος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ ὑπὸ ΚΜ ΗΠ [τοῦτο γὰρ προδεδεικται], καὶ τῇ ΚΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΘΠΛ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΗΘ ΗΛ. φανερόν οὖν ἐκ τῆς κατασκευῆς ὅτι τὸ ΘΗΛ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ληφθέντος μέρους τοῦ ΑΒΓ (ἐλάσσων γὰρ ἡ ΘΛ τῆς ΚΜ), ἐκάστη δὲ αὐτοῦ πλευρὰ ἐκάστης τῶν τοῦ ΑΒΓ ἢ πολλαπλασία ἢ καὶ μείζων ἢ πολλαπλασία κατὰ τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς (μείζων γὰρ ἡ ΘΛ τῆς ΕΖ). μ'.

3.132 Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐγγράψαι τὰ πέντε πολύεδρα, προγράφεται δὲ τάδε. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ προκείσθω εἰς τὸν κύκλον ἐμβαλεῖν εὐθεῖαν παράλληλον μὲν τῇ ΑΓ διαμέτρῳ, ἴσην δὲ τῇ δοθείσῃ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΓ διαμέτρου. Κείσθω τῇ ἡμισείᾳ τῆς δοθείσης ἴση ἡ ΕΔ, καὶ τῇ ΑΓ διαμέτρῳ ἦχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΒ, τῇ δὲ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΖ, ἥτις ἴση ἔσται τῇ δοθείσῃ· διπλῇ γάρ ἐστιν τῆς ΕΔ (ἐπεὶ καὶ ἴση τῇ ΕΗ, παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΖΗ τῇ ΒΕ). μα'. Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΚΔ ΒΕΖΓ, ἡ δὲ διὰ τῶν Β Γ ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔστω τοῦ κύκλου, καὶ προκείσθω ἀγαγεῖν διάμετρον τοῦ ΑΚΔ κύκλου παράλληλον τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ διαμέτρῳ. Ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Β Γ σημείων ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸν κύκλον, καὶ ποιήσει τομὴν ΑΒΓΔ μέγιστον κύκλον· ὁ ΑΒΓΔ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν καὶ δίχα τεμεῖ καὶ τὸν ΑΚΔ. ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Α Δ ἐπιζευγνυμένη διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ. ἔστι δὲ φανερόν· τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ περιφέρεια δίχα τῷ Θ σημείῳ· ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΑ τῇ ΘΔ ἴση ἐστὶν (ἐκ πόλου γάρ), ὧν ἡ ΘΒ τῇ ΘΓ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ λοιπὴ τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ἐπὶ τὰ Α Δ διάμετρος τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ διαμέτρῳ.

3.134 Ἔστω δὲ ἡ ἐπὶ τὰ Ε Ζ μὴ διάμετρος καὶ προκείσθω διάμετρον ἀγαγεῖν τοῦ ΑΚΔ κύκλου παράλληλον τῇ ἐπὶ τὰ Ε Ζ. Κείσθω τῇ ἡμισείᾳ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ἡμικύκλιον τῆς ΕΖ περιφερείας ἐκατέρω τῶν ΕΒ ΖΓ ἴση, καὶ διὰ τῶν Β Γ γεγράφθω ὁμοίως μέγιστος ὁ ΑΒΓΔ· ἔσται ἄρα ἡ ἐπὶ τὰ Α Δ διάμετρος τοῦ ΑΚΔ κύκλου παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ε Ζ, ὅτι καὶ αὐτὴ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Β Γ. μβ'. Ἔστωσαν ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΕ ΓΖ, καὶ ἐν τοῖς αὐτοῖς ἐπιπέδοις διήχθωσαν αἱ ΑΒ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ διὰ τῶν ΑΕ ΓΖ ἐκβαλλομένου ἐπιπέδου ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ ΒΑΕ ΔΓΖ· ὅτι καὶ αἱ ΑΒ ΓΔ παράλληλοί εἰσι, τουτέστιν ὅτι ἐκβληθὲν τὸ διὰ τῶν Β Α Γ σημείων ἐπίπεδον ποιεῖ ἐν τῷ διὰ τῶν Δ Γ Ζ ἐπιπέδῳ τὴν ΓΔ. Εἰ γὰρ ἑτέραν ποιήσει ἐκεῖ, περιέξει μετὰ τῆς ΓΖ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. μγ'. Ἐκ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις κύκλοι ὦσιν [ὡς ὑπογεγραμμένοι], καὶ ἐν αὐτοῖς παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Ε Ζ κέντρων ὅμοια τμήματα κύκλων ἀπολαμβάνουσαι, παράλληλος

ἔσται ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. ἴσαι γὰρ γίνονται διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τμημάτων αἱ τε Α Γ καὶ αἱ Β Δ γωνίαι [ἴσαι ἀλλήλαις], καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐν παραλλήλοις ἐπιπέδοις.

3.136

μδ'. Ἄν δὲ αἱ τὰ ὅμοια τῶν τμημάτων κύκλων ἀπολαμβάνουσαι παράλληλοι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων ὦσιν, αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπὶ τὰ μὴ ὁμοίως κείμενα πέρατα τῶν παραλλήλων ἐπιζευγνύμεναι παράλληλοι ἔσονται. Δείκνυται γὰρ καὶ ὁμοίως ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς. με'. Ἐστῶσαν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων ἴσαι καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ· ὅτι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα αὐτῶν τὰ Α Γ, Β Δ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι καὶ ὀρθαὶ πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα. Ἔστι δὲ φανερόν ἐκ τῶν προδεδειγμένων· ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΕ ΓΖ παράλληλοι ἔσονται. καὶ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις· ὥστε καὶ αἱ ΑΓ ΕΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὁμοίως καὶ αἱ ΕΖ ΒΔ. καὶ ἔστιν ἡ ΕΖ ὀρθὴ πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα (περὶ γὰρ τοὺς αὐτοὺς πόλους εἰσὶν, καὶ ἡ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν ἀγομένη ὀρθὴ ἔστιν πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν τε καὶ τῆς σφαίρας ἐλεύσεται, ὡς ἔστιν ἐν σφαιρικοῖς)· καὶ αἱ ΑΓ ΒΔ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι καὶ ὀρθαὶ εἰς πρὸς τοὺς κύκλους. μς'. Μὴ ἔστῶσαν δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ· ὅτι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ πέρατα αὐτῶν τὰ Α Δ, Β Γ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας.

3.138

Τεμνέτωσαν γὰρ ἀλλήλας κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα αἱ τε ΑΕ ΕΗ καὶ αἱ ΔΖ ΖΗ. ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΔ ΒΓ, αἱ δ' ἄρα αἱ ΑΗ ΗΔ ΒΗ ΗΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· τοῦτο γὰρ φανερόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση [ἐκ κέντρου τῶν ἴσων κύκλων]. ἔστι δὲ καὶ [αὐτῇ παράλληλος] ἴση μὲν ἡ ὑπὸ ΕΑΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἐναλλάξ, ἡ δὲ ΑΗ βάσις τῇ ΗΔ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΔΗΖ. κοινῆς προστεθείσης τῆς ὑπὸ ΕΗΔ γίνονται αἱ ὑπὸ ΑΗΕ ΕΗΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι οὔσαι, ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΖ ἴσαι [ὥστε καὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι]· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ. καὶ ἴση ἐδείχθη ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τῆς σφαίρας διὰ τὸ ἴσους ὑποκεῖσθαι τοὺς κύκλους· διάμετροι ἄρα τῆς σφαίρας αἱ ΑΔ ΒΓ, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις. Ἄν δ' ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΑΓ ΒΔ, ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις τε καὶ ὀρθὰς μετὰ τῶν ΑΒ ΓΔ περιέξουσιν γωνίας. Τῇ γὰρ ΓΔ ἴσης καὶ παραλλήλου ἐφαρμοσθείσης τῆς ΘΗ, ἔσται ἡ ΘΗ ὀρθὴ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΘΓ ΑΘ, καὶ πρὸς τὸ αὐτῶν ἐπίπεδον, ὥστε καὶ ἡ ΓΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί. μζ'.

3.140

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ τὰ ὁμοταγῇ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις· ἂν δὲ καὶ ἴσαι ὦσιν αἱ παράλληλοι, καὶ αὐταὶ παράλληλοι ἔσονται καὶ ὀρθαὶ πρὸς τὰς ὑποκειμένας παραλλήλους. Ἔστιν δὲ φανερόν· ἐκβληθέντος γὰρ τοῦ διὰ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδου γίνεται κύκλος ἐν ᾧ εἰσὶν αἱ παράλληλοι, καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλους ἀνιούσας τραπέζιον ποιήσουσιν· ἂν δὲ καὶ ἴσαι ὦσιν αἱ παράλληλοι, αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς οὐκέτι τραπέζιον ἀλλὰ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες περιέξουσιν. Ἐστῶσαν ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ ΒΓ εὐθεῖαι ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῆς ΔΒΕ ἐν τῷ αὐτῷ κειμένης ἐπιπέδῳ, καὶ ἐφεστάτω ἡ ΒΖ μεθ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσας περιέχουσα γωνίας· ὅτι ὀρθὴ ἐστὶν τῇ ΔΕ. Ἦχθω ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ αἱ ΗΓ ΗΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΓ ΗΒ· αἱ ΑΖ ΖΓ ἄρα ὀρθαὶ ἔσονται ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ. καὶ διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ τῶν ΑΒΖ ΓΒΖ γωνίας ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ ΖΑ ΖΓ, καὶ ΗΑ ΗΓ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ὅλη· κάθετος ἄρα ἡ ΗΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΖΒ ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. μη'.

3.142

Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐγγεγράφῳ καὶ ἔστω σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰ Α Β Γ Δ. ἦχθω δὲ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ· ἴσας δὲ περιέξει μετὰ τῶν ΑΓ ΑΔ γωνίας [ἑκατέραν διμοίρου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ αὐταῖς οὔσα]. καὶ

ἐφέστηκεν ἡ AB ἴσας ποιοῦσα μετὰ τῶν AG AD γωνίας· διὰ τὰ προδειχθέντα ἄρα ὀρθή ἐστὶν ἡ EZ τῇ AB, καὶ ἐφάπεται τῆς σφαίρας. ἐὰν γὰρ ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΔΑ ΑΓ ἐπίπεδον, ποιήσῃ κύκλον, ἐν ᾧ ἰσόπλευρον ἐγγεγράφεται τρίγωνον τὸ ΑΔΓ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ· ἐφάπεται ἄρα ἡ ΕΖ τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ τῆς σφαίρας. ἐκβληθὲν οὖν τὸ διὰ τῶν ΕΖ ΑΒ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσῃ τῆς σφαίρας κύκλον, οὗ διάμετρος ἔσται ἡ ΑΒ διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τῇ ΕΖ ἐφαπτομένη ὁμοίως. κἂν διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΗΘ, ἐφάπεται τῆς σφαίρας, καὶ ὀρθὴ αὐτῇ ἔσται ἡ ΓΔ. κἂν ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΗΘ ΓΔ ἐπίπεδον, κύκλον ποιήσῃ διάμετρον ἔχοντα τὴν ΓΔ ἴσον καὶ παράλληλον τῷ διάμετρον ἔχοντι τὴν ΑΒ· παράλληλοι γὰρ αἱ ΕΖ ΓΔ καὶ αἱ ΑΒ ΗΘ. ἦχθω διὰ τοῦ Κ κέντρου τῇ ΓΔ ὀρθὴ ἡ ΛΜ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΑΒ. κἂν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΒΛ ΒΜ, ἡ μὲν ΒΜ ὀρθὴ ἔσται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ ΛΜ καὶ τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις, ἡ δὲ ΒΛ διάμετρος τῆς σφαίρας (προδεδείκται γάρ).

3.144 καὶ ἐπεὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΜΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΓ, ἔσται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΓΜ. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΜΓ· ἴση ἄρα ἡ ΒΜ τῇ ΜΓ, ὥστε διπλάσιον τὸ ἀπὸ ΛΜ τοῦ ἀπὸ ΜΒ· ἡμιόλιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΛ τοῦ ἀπὸ ΛΜ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΒΛ διάμετρος τῆς σφαίρας· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τοῦ κύκλου διάμετρος. καὶ οἱ κύκλοι θέσει, καὶ δοθέντα τὰ Α Β Γ Δ σημεία. Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεήσει γὰρ ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους, ὥστε τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας ἡμιολίαν εἶναι δυνάμει τῆς ἑκατέρου διαμέτρου, καὶ ἀγαγεῖν δύο διαμέτρους παραλλήλους τὰς ΑΒ ΛΜ, ὡς προεμάθομεν, καὶ τῇ ΛΜ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθὴν τὴν ΓΔ, καὶ ἔχειν τὰ σημεία τῶν γωνιῶν τῆς πυραμίδος τὰ Α Β Γ Δ. καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει καὶ συναποδεδείκται ὅτι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. μθ'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν κύβον ἐγγράψαι. Ἐγγεγράφθω καὶ ἔστω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰ σημεία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὰ Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ, καὶ ἐκβεβλήσθω δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ποιήσῃ δὴ τομὰς κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους· καὶ γὰρ τὰ ἐν αὐτοῖς τετράγωνα [τοῦ κύβου] ἴσα τε καὶ παράλληλά ἐστιν.

3.146 καὶ ἔσται ἐπεζευγμένη ἡ ΓΕ διάμετρος τῆς σφαίρας. ἐπεζεύχθω καὶ ἡ ΕΗ. ἐπεὶ διπλάσιον τὸ ἀπὸ ΕΗ τοῦ ἀπὸ ΕΘ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΗΕ γωνία, ἔσται τὸ ἀπὸ ΓΕ τοῦ ἀπὸ ΕΗ ἡμιόλιον. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ ΓΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ. καὶ ἔστιν διάμετρος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· δοθεὶς ἄρα ὁ κύκλος, ὥστε καὶ ὁ ΑΒΓΔ καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς τετράγωνα καὶ τὰ τῶν γωνιῶν σημεία τοῦ κύβου. Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεῖ γὰρ κύκλους ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο παραλλήλους, καὶ ἴσων οὐσῶν τῶν διαμέτρων ἡμιολία ἔστω δυνάμει ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐγγράψαι εἰς τὸν ἕτερον αὐτῶν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΒΓ ἀγαγεῖν ἐν τῷ ἑτέρῳ κύκλῳ παράλληλον τὴν ΖΗ ἴσην τῇ ΒΓ, ὡς προεδείξαμεν [καθόλου ἴσην τῇ δοθείσῃ], καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον συμπληρῶσαι τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἔχειν τὸν κύβον ἐγγεγραμμένον. δειχθήσεται γὰρ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει τετράγωνον τὸ ΒΖΗΓ καὶ τὰ λοιπά, καὶ συναποδεδείκται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίῳ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ κύκλοι τὰς τῆς πυραμίδος καὶ τὰς τοῦ κύβου περιέχουσι γωνίας· καὶ γὰρ ἐπ' ἐκείνης ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἡμιολία ἦν δυνάμει τῆς διαμέτρου τῶν κύκλων ἑκατέρου.

3.148 ν'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. Ἐγγεγράφθω καὶ ἔστω σημεία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας τὰ Α Β Γ Δ Ε Ζ, καὶ ἐκβληθέντα τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιεῖτω κύκλους τοὺς ΑΒΓ ΔΕΖ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἴσαι πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπεπτώκασιν αἱ ΔΑ ΔΒ ΔΕ ΔΖ, ἔσται τὰ Α Ε Ζ Β ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ [καὶ γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσὶν]. καὶ εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΒ ΒΖ ΖΕ, καὶ εἰσὶν ἐν κύκλῳ· τετράγωνον ἄρα τὸ ΑΕΖΒ, καὶ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ. ὁμοίως καὶ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΑΓ· παράλληλοι ἄρα καὶ οἱ κύκλοι· καὶ ἴσοι ἀλλήλοις, ἐπεὶ καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ ἴσοι καὶ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσοι εὐθεῖαι καὶ

παράλληλοι αὐτοὶ AB EZ, καὶ εἰσὶν οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων, ἔσται ἐπιζευγνυμένη ἡ AZ διάμετρος τῆς σφαίρας [καὶ αὐτοὶ AE ZB ὀρθὰς μετὰ τῶν AB EZ περιέξουσιν γωνίας, ὡς προδεδείκται]. καὶ εἰσὶν ἴσαι αὐτοὶ AE EZ· διπλασίον ἄρα τὸ ἀπὸ AZ τοῦ ἀπὸ ZE. τὸ δ' ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΔEZ κύκλου ἐπίτριτον τοῦ ἀπὸ τῆς EZ· ἡμιόλιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ τοῦ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΔEZ κύκλου· δοθεῖσα ἄρα ἡ διάμετρος, καὶ ὁ κύκλος, ὥστε καὶ ὁ ABΓ καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν σημεία. Καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολουθῶς· δεῖ γὰρ ὁμοίως ἐγγράψαι τῇ σφαίρᾳ δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους, ὧν ἑκατέρου τῆς διαμέτρου ἡμιολία δυνάμει ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐγγράψαι εἰς τὸν ἕτερον αὐτῶν ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ κύκλῳ παραλλήλον ἀγαγεῖν τὴν EZ ἴσην τῇ AB, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐγγράψαι τὸ ΔEZ τρίγωνον, καὶ ἔχειν συνεσταμένον τὸ ὀκτάεδρον.

3.150 καὶ συναποδεδείκται ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας διπλασίον δυνάμει τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. συνεώραται δ' ὅτι εἴς γε τὴν τῆς πυραμίδος ἐγγραφὴν καὶ εἰς τὴν τοῦ κύβου καὶ τοῦ ὀκταέδρου οἱ αὐτοὶ παραλαμβάνονται κύκλοι [ὧν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐναρμόζεται τὰ πολυέδρα], καὶ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τετράγωνον τοῦ κύβου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου. να'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰκοσάεδρον ἐγγράψαι. Ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὰ A B Γ, Δ E Z, H Θ K, Λ M N. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ B σημείου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν προσπεπτώκασιν αὐτοὶ AB BΓ BZ BH BE ἴσαι ἀλλήλαις, ἐν ἐνὶ ἔσται ἐπιπέδῳ τὰ A Γ Z H E σημεία [καὶ γὰρ αὐτοὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνύμεναι ἴσαι εἰσὶν]. καὶ ἴσαι ἀλλήλαις αὐτοὶ AΓ ΓZ ZH HE EA, καὶ εἰσὶν ἐν κύκλῳ ἰσογώνιον ἄρα τὸ AEHZΓ πεντάγωνον· ὁμοίως καὶ ἑκάτερον τῶν KEBΓΔ ΔΘZBA καὶ τὰ AKΛHB AKNΘΓ ΓΘMHB ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια [καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ].

3.152 καὶ ἔσται παράλληλος ἡ μὲν AΓ τῇ EZ ἐπιζευχθείσῃ, ἡ δὲ EZ τῇ KΘ, ἡ δὲ KΘ τῇ ΛM· καὶ γὰρ τὸ AKΔΘM πεντάγωνόν ἐστιν. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αὐτοὶ μὲν ἐπιζευγνύουσαι τὰ B Γ, E Δ, H Θ, Λ N παράλληλοι, αὐτοὶ δὲ ἐπιζευγνύουσαι τὰ B A, Z Δ, H K, M N παράλληλοι. καὶ ὁμοίως ὁ περὶ τὰ A B Γ κύκλος ἴσος καὶ παράλληλος τῷ περὶ τὰ Λ M N· ἴσα γὰρ καὶ ὅμοια τὰ ἐν αὐτοῖς τρίγωνα τὰ ABΓ ΛMN. οἱ δὲ περὶ τὰ Δ E Z, K H Θ σημεία κύκλοι ἴσοι καὶ παράλληλοι· καὶ γὰρ τὰ ἐν αὐτοῖς τρίγωνα ἴσα καὶ ἰσόπλευρα· ἐκάστη γὰρ πλευρὰ πενταγώνου γωνίαν ὑποτείνει. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ οἱ περὶ τὰ Δ E Z, K H Θ κύκλοι ἴσοι εἰσὶν καὶ ἐν αὐτοῖς ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευραὶ παράλληλοι αὐτοὶ EZ KΘ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων, ἔσται ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ Z K διάμετρος τῆς σφαίρας καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ZEK γωνία· προδεδείκται γάρ. καὶ ἐπεὶ πεντάγωνόν ἐστι τὸ HEΑΓZ, τῆς EZ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, μεῖζον ἔσται τμήμα ἡ AΓ· ἡ ἄρα EZ πρὸς τὴν AΓ λόγον ἔχει ὅν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου. καὶ δύναται ἀμφοτέρως ἡ ZK διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν EK τῇ AΓ· ἔξει ἄρα ἡ ZK διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς μὲν τὴν EZ λόγον, ὅν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, πρὸς δὲ AΓ, ὅν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου.

3.154 καὶ δοθεῖσα ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν EZ AΓ, ὥστε καὶ αὐτοὶ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τρίτον μέρος οὔσαι δυνάμει τῶν EZ AΓ· καὶ αὐτοὶ ἄρα οἱ κύκλοι δοθέντες, καὶ οἱ ἴσοι αὐτοῖς καὶ παράλληλοι, καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς σημεία τῶν τοῦ πολυέδρου γωνιῶν. Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεῖ γὰρ ἐκθέσθαι δύο εὐθείας, πρὸς ἃς λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ὅν ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου, καὶ ἐν τῇ σφαίρᾳ γράψαι δύο κύκλους, ὧν αὐτοὶ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος δυνάμει τῶν ἐκτεθεισῶν εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρας, ὡς τοὺς ΔEZ ABΓ, καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἴσους αὐτοῖς γράψαι παραλλήλους τοὺς KΘ ΛMN, καὶ ἐναρμόσαι ἐν ἐκάστῳ ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευρὰς παραλλήλους τὰς AΓ EZ KΘ ΛM ἐνηλλαγμένως πρὸς τὰ κέντρα κειμένας, καὶ ἐγγράψαι τὰ τρίγωνα ὅλα τὰ ποιοῦντα τὰς τοῦ πολυέδρου γωνίας. καὶ ἡ

ἀπόδειξις ἐκ τῆς ἀναλύσεως εὐχερής. συνοραῖται δ' ὅτι καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας τριπλασία ἐστὶν δυνάμει τῆς τοῦ πενταγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν ΔΕΖ κύκλον ἐγγραφομένου· ἡ μὲν γὰρ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ λόγον ἔχει ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΕΖ πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ, ὃν ἡ τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου, καὶ ἔστιν τριπλασία δυνάμει ἡ τοῦ τριγώνου τῆς τοῦ ἑξαγώνου· τριπλασία ἄρα δυνάμει ἐστὶν καὶ ἡ ΚΖ διάμετρος τῆς σφαίρας τῆς τοῦ ἐν τῷ ΔΕΖ κύκλῳ πενταγώνου πλευρᾶς.

3.156 νβ'. Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν [τὸ] δωδεκάεδρον ἐγγράψαι. Ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω σημεῖα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τὰ Α Β Γ Δ Ε, Ζ Η Θ Κ Λ, Μ Ν Ξ Ο Π, Ρ Σ Τ Υ Φ. ἔσται δὴ ἡ μὲν ΕΔ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ζ Λ, ἡ δὲ ΑΕ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ζ Η. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ λοιπαί, ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε ἐπίπεδον παράλληλον τῷ διὰ τῶν Ζ Η Θ Κ Λ. ἐπεὶ δὲ αἱ ἐπὶ τὰ Ο Α, Ξ Γ παράλληλοι (ἐκατέρα γὰρ τῇ ΒΘ) καὶ ἴσαι εἰσὶν, καὶ αἱ ἐπὶ τὰ Ο Ξ, Α Γ ἄρα παράλληλοι, ὥστε καὶ αἱ ΣΤ ΕΔ.

3.158 ὁμοίως καὶ αἱ ΣΡ ΓΔ, καὶ αἱ λοιπαί· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἄρα παράλληλα. νοείσθωσαν οὖν οἱ περὶ αὐτὰ γραφόμενοι [παράλληλοι] κύκλοι. ἔσται δὴ ὁ μὲν περὶ τὰ Α Β Γ Δ Ε ἴσος τῷ περὶ τὰ Ρ Σ Τ Υ Φ· τὰ γὰρ ἐν αὐτοῖς πεντάγωνα ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ περὶ τὰ Ζ Η Θ Κ Λ τῷ περὶ τὰ Μ Ν Ξ Ο Π· καὶ γὰρ τὰ ἐν τούτοις πεντάγωνα ἴσα. καὶ ἔστιν ἡ ἐπὶ τὰ Γ Λ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὰ Ξ Υ (ἐκατέρα γὰρ τῇ ΚΝ)· ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔσται τὰ Α Γ Ξ Υ σημεῖα. καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰ ἴσαι εἰσὶν· ἴσων γὰρ πενταγώνων ὑποτείνουσι γωνίας· καὶ εἰσὶν ἐν κύκλῳ· τετράγωνον ἄρα τὸ ΑΓΞΥ, ὥστε διπλῇ δυνάμει ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ Ξ Λ τῆς ἐπὶ τὰ Α Γ, τουτέστιν τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Λ. καὶ ὁρθὴ ἡ ὑπὸ ΞΛΖ γωνία· ἐν ἴσοις γὰρ κύκλοις ἴσαι καὶ παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ΟΞ ΖΛ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΖ τοῦ ἀπὸ ΖΛ. καὶ ἔστιν διὰ τὰ προδεδειγμένα διάμετρος τῆς σφαίρας ἡ ἐπὶ τὰ Ζ Ξ· οὐ γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν κέντρων εἰσὶν αἱ ΟΞ ΖΛ. ἔξει οὖν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν ΖΛ λόγον ὃν τριγώνου πλευρὰ πρὸς ἑξαγώνου τῶν εἰς τὸν ΖΗΘΚΛ κύκλον ἐγγραφομένων.

3.160 ἔχει δὲ καὶ ἡ ΖΛ πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου· ἔξει ἄρα καὶ δι' ἴσου ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν λόγον ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου. ἐπεὶ δὲ καὶ τῆς ΖΛ λόγος πρὸς τὴν ΕΔ, ὃν ἡ τοῦ ἑξαγώνου ἔχει πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου (ἄκρον γὰρ αὐτῆς καὶ μέσον λόγον τεμνομένης μεῖζον τμήμα ἡ ΕΔ διὰ τὸ πενταγώνου γωνίαν ὑποτείνειν τὴν ΖΛ, οὗ πλευρὰ ἡ ΕΔ), ὥς δὲ ἡ ΖΛ πρὸς ΕΔ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ τοῦ ἐν τῷ ΖΗΘΚΛ πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ΑΒΓΔΕ, ἔξει καὶ ἡ τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου λόγον ὃν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ΖΗΘΚΛ, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑξαγώνου· ἔξει ἄρα ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν τοῦ ἐν τῷ ΑΒΓΔΕ, ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου· δοθεῖσα ἄρα ἐν ἐκατέρῳ κύκλῳ τοῦ τριγώνου πλευρὰ, ὥστε καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος οὔσαι δυνάμει τῶν πλευρῶν· δοθέντες ἄρα καὶ οἱ κύκλοι καὶ οἱ ἴσοι αὐτοῖς καὶ παράλληλοι καὶ τὰ ἐν αὐτοῖς σημεῖα τῶν τοῦ πολυέδρου γωνιῶν, ὅπερ· ~ Δεῖ οὖν ἐν τῇ συνθέσει δύο ἐκθέσθαι, πρὸς ἃς λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ὃν ἡ τοῦ πενταγώνου πρὸς τε τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ πρὸς τὴν τοῦ δεκαγώνου, ἃς καὶ ἐπὶ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐξεθέμεθα, καὶ γράψαι δύο παραλλήλους κύκλους ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου κειμένους, ὥς τοὺς ΖΗΘΚΛ ΑΒΓΔΕ, ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τρίτον μέρος εἰσὶ δυνάμει τῶν ἐκκειμένων εὐθειῶν ἐκατέρα ἐκατέρας.

3.162 καὶ τούτοις ἴσους ἄλλους δύο κύκλους καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὥς τοὺς ΜΝΞΟΠ ΡΣΤΥΦ, καὶ ἐναρμόσαι τὰς ΕΔ ΖΛ ΟΞ ΣΤ πενταγώνων πλευρὰς παραλλήλους, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναγράψαι τὰ πεντάγωνα, δι' ὧν αἱ τοῦ πολυέδρου συνίστανται γωνίαι. καὶ φανερόν ἐκ τῆς κατασκευῆς, ὅτι οἱ περιέχοντες κύκλοι τὰς τοῦ δωδεκαέδρου γωνίας οἱ αὐτοὶ εἰσὶν τοῖς περιέχουσιν τὰς τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίας, καὶ ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος

περιλαμβάνει τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Ἄλλως τὸ δέκατον θεώρημα ἐν τῷ τρίτῳ τῆς τοῦ Πάππου συναγωγῆς καὶ τὴν ἀποδείξιν περιέχον καὶ τὴν ὀργανικὴν κατασκευὴν τοῦ τε διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου καὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον.

3.164. (1n) Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διάμετροι δὲ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις ἔστωσαν αἱ ΑΔΓ ΒΔΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΕΜΝ ΒΘΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΘΖ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ κύβον. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΗΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΛΘ καὶ ἡ ΛΕ· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΛ τῇ ΑΔΓ καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΛΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΒΛΕ κάθετος ἦκται ἐπὶ τὴν ΒΔΕ, ἡ ΚΛ ἄρα μέση ἀνάλογόν ἐστὶν τῶν ΕΚ ΚΒ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΔΜ. κοινοῦ ἄρα προσληφθέντος λόγου τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔσται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ὀργανικῶς δὲ κατασκευασθήσεται τὸν τρόπον τοῦτον.

3.166 Ἐστω τύμπανον πρὸς κανόνα ἀπωρθωμένον, ἐν ᾧ καταγραφέντος κύκλου κέντρῳ καὶ διαστήματι ἐλάττονι τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ τυμπάνου, ὡς τοῦ ΑΒΓ, πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις ἦχθωσαν διὰ τοῦ κέντρου αἱ ΒΔΕ ΑΔΓ, καὶ κατὰ τὸ Β σημεῖον τρηματίου γενομένου ἐμβεβλήσθω εἰς αὐτὸ ἀξόνιον κυκλοτερές, καὶ περὶ τὸ ἀξόνιον περιβεβλήσθω κανὼν διατρηθεὶς καὶ αὐτός, ὡς ὁ ΒΘΖΗ, ὥστε εὐλύτως περὶ τὸ Β κέντρον περιάγεσθαι, περόνης ἐμβληθείσης εἰς τὸ ἀξόνιον τῆς κατεχούσης ἐν τῇ περιαγωγῇ τὸν κανόνα. τούτων δὲ οὕτως γενομένων κύβος κύβου πολλαπλάσιος καθ' ὅποιον οὖν ἀριθμὸν ῥαδίως κατασκευασθήσεται. προκείσθω δὲ διπλασίονα κατασκευάσαι· λαβόντες γὰρ τὴν ΔΕ διπλασίονα τῆς ΔΜ ἐπιζεύζομεν [κανόνι] τὴν ΕΜΝ, καὶ τὸν κανόνα τὸν ΒΘΖΗ κινήσομεν περὶ τὸ Β κέντρον, ἕως ἂν ἡ [αὐτῷ μέση γραμμὴ] μεταξὺ τῶν Θ Η διχοτομηθῇ ὑπὸ τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Ζ σημείον, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΘΖ τῇ ΖΗ. τοιαύτην γὰρ θέσιν τοῦ κανόνος λαβόντος ἀφορισθήσεται ἡ ΔΖ, ἀφ' ἧς ὁ ζητούμενος κύβος ἀναγραφῆσεται ἀκολουθῶς τῇ ἀποδείξει. Ὑπομνηματικώτερον δὲ συνταχθεῖν ἂν τὸ αὐτὸ πρόβλημα οὕτως.

3.168 Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΕ περὶ κέντρον τὸ Δ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἀλλήλαις διηγμέναι αἱ ΑΔΓ ΒΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἐντὸς προσπίπτουσα ἡ ΒΖΗ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΕ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα μείζων ἐστὶ τῆς ΒΗ, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα τῆς ἡμισείας μείζων· μείζων ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΗ. ἡ δὲ ΒΖ μείζων ἐστὶν τῆς ΒΔ· πολλῶ ἄρα ἡ ΒΖ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΗ, καὶ πολλῶ ἄρα καὶ τῆς ΖΗ. Ἐπεὶ ἡ ΒΖ μείζων ἐστὶν τῆς ΖΗ, ἴση τῇ ΖΗ κείσθω ἡ ΘΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΗΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΛΘ καὶ ἡ ΛΕ· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΛ τῇ ΑΔΓ καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΛΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘΖ τῇ ΖΗ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΔΗ διὰ τὸ ἑκατέραν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι, ἔστιν ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς τὴν ΔΗ. ἐὰν τριγώνου ἀνάλογον τμηθῶσιν αἱ πλευραὶ, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἐστὶ τοῦ τριγώνου πλευρὰν· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΛ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπειδὴ δύο αἱ ΒΔΗ δυοὶ ταῖς ΛΔΕ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΗ τῇ ὑπὸ ΛΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ βάσις ἡ ΒΗ βάσει τῇ ΛΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΛΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΕΛ. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΔΓ, αἱ ὑπὸ ΑΚΔ ΚΔΓ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὣν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΚΔΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΔ ἄρα ὀρθή ἐστίν· πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΒΕ.

3.170

καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΒΛΕ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΚ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΚ τῶν ΕΚ ΚΒ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΒ. καὶ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΒΖ τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ΘΛ τῇ ΖΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΑΚΕ τρίγωνον τῷ ΒΚΘ, τὸ δὲ ΒΚΘ τῷ ΒΔΖ, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΘΚΕ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΜΔΕ, τὸ δὲ ΑΚΕ τῷ ΞΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἕκαστον ἐκάστω. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ὡς ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. πάλιν ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΑΚΕ τρίγωνον τῷ ΒΚΘ, τὸ δὲ ΘΚΕ τῷ ΜΔΕ, καὶ τὸ ΑΚΕ τῷ ΞΔΕ τριγώνῳ διὰ τὸ τὰς παραλλήλους ἰσογώνια αὐτὰ ποιεῖν, ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΔΞ. ὁμοίως καί, ἐπεὶ ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΔΜ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΔΞ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΜΔ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἡ ΞΔ πρὸς ΔΜ.

3.172 ἀλλ' ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΞΔ πρὸς τὴν ΔΜ. ἴση δὲ ἡ ΞΔ τῇ ΔΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ. Ὅτι δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΞΔ τῇ ΔΖ δῆλον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΞ τῇ ΖΗ, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΞΔ τρίγωνον τῷ ΖΔΗ. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστιν τὰ ΑΞΔ ΖΔΗ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΞΔΑ ΔΛΞ ταῖς ὑπὸ ΖΔΗ ΔΗΖ δυσὶν ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΛΔ μιᾷ πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἴσην, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται ἐκατέρα ἐκατέρᾳ τῶν ὑποτείνουσῶν τὰς ἴσας γωνίας. ἴση ἄρα ἡ ΔΞ τῇ ΔΖ. Κοινοῦ ἄρα προσληφθέντος λόγου τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔσται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ΕΔ πρὸς ΜΔ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΕΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΖ. Καὶ τούτοις ἀκολουθῶς δύο τῶν ΕΔ ΔΜ δοθεισῶν ληψόμεθα τὰς δύο μέσας ἀνάλογον ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἐκκείσθωσαν γὰρ ταῖς ΕΔ ΔΖ ΔΜ ἴσαι αἱ ΕΔ ΔΖ ΔΜ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ, δῆλον ὡς ἡ ΔΜ οὐκ ἔστι τρίτη ἀνάλογον τῶν ΕΔ ΔΖ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογον τῶν ΕΔ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΕΔ ΔΖ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΜ. ἀλλ' ἦν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΔΜ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· ἐκατέρα ἄρα τῶν ΕΔ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, ὅπερ ἀδύνατον (μεῖζων γὰρ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ)· οὐκ ἄρα ἡ ΔΜ τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν τῶν ΕΔ ΔΖ.

3.174 Εὐλήφθω τῶν ΕΔ ΔΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΟΠ. ἐπεὶ οὖν τῶν ΕΔ ΔΖ τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΟΠ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ', οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΟΠ. ἀλλ' ἦν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΜ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΟΠ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΜ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΔΜ. ἀλλ' ἦν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΟΠ, οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΔΜ· αἱ ΕΔ ΔΖ ΟΠ ΔΜ ἄρα τέσσαρες οὔσαι ἐν τῇ συνεχεῖ καὶ ἐφεξῆς ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῶν ΕΔ ΔΜ ἄρα δύο μέσαι ἀνάλογον εἰσιν αἱ ΔΖ ΟΠ. Τῆς δὲ ἀποδείξεως ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς ἀκολουθῶς τῇ ὀργανικῇ κατασκευῇ γενομένης δῆλον ὡς ἡ μὲν ὀργανικὴ κατασκευὴ, δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων καὶ λόγου πρὸς ἀλλήλας τῶν εὐθειῶν δεδομένου, εὐρίσκει τὰς δύο μέσας ἀνάλογον, ἐφ' ὧν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἡ δὲ

ἀπόδειξις, ὑποστησάμενη τινὰ εὐθεΐαν καὶ ἄλλας δύο λαβοῦσα διὰ τῆς τῶν γραμμῶν καταγραφῆς ἐλάττονας μὲν τῆς πρώτης ἐφεξῆς δὲ αὐτῇ κειμένης καὶ ἀλλήλαις ἀνίσους, εὐρίσκει ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὴν δευτέραν πρὸς τὴν ἐλαχίστην. τούτων δὲ τῆς τε πρώτης καὶ τῆς δευτέρας προσλαβοῦσα τρίτην ἀνάλογον ἀποδείκνυσιν τὰς δύο μέσας ἀνάλογον οὕτως θεωρουμένας ὡς ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς. τούτων γὰρ τὸ μὲν συμπέρασμα τὸ αὐτό, δι' ὧν δὲ τοῦτο εὐρίσκεται τῶν πρώτων, οὐ τὸ αὐτό.

3.176 ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς, λόγου δοθέντος δύο εὐθειῶν ἀνίσων, τὸ συμπέρασμα δεικνύται, ἐπὶ δὲ τῆς ἀποδείξεως, μὴ δοθέντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν, διὸ ἔτι τοῦτο μένει ζητούμενον, πῶς ἐν λόγῳ δοθέντι αἱ τέσσαρες εὐθεΐαι. δεῖ γὰρ, λόγου δοθέντος τοῦ ὄν ἔχει ἢ πρώτη εὐθεΐα πρὸς τὴν τετάρτην, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ γενέσθαι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. α'.

4.176. (9) Ἐὰν ἡ τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ ἀπὸ τῶν AB ΒΓ ἀναγραφῇ τυχόντα παραλληλόγραμμα τὰ ABΔΕ ΒΓΖΗ, καὶ αἱ ΔΕ ΖΗ ἐκβληθῶσιν ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΘΒ, γίνεται τὰ ABΔΕ ΒΓΖΗ παραλληλόγραμμα ἴσα τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΘΒ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ἐν γωνίᾳ ἣ ἐστὶν ἴση συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ΔΘΒ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ διὰ τῶν Α Γ τῇ ΘΚ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΑΛ ΓΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστὶν τὸ ΑΛΘΒ, αἱ ΑΛ ΘΒ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι. ὁμοίως καὶ αἱ ΜΓ ΘΒ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι, ὥστε καὶ αἱ ΛΑ ΜΓ ἴσαι τέ εἰσιν καὶ παράλληλοι. καὶ αἱ ΑΜ ΑΓ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΛΜΓ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΓ, τουτέστιν συναμφοτέρῳ τῇ τε ὑπὸ ΒΑΓ καὶ ὑπὸ ΔΘΒ· ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΒ τῇ ὑπὸ ΛΑΒ.

4.178 καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΑΒΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΛΑΒΘ ἴσον ἐστὶν (ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν τῆς ΑΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΒ ΔΘ), ἀλλὰ τὸ ΛΑΒΘ τῷ ΛΑΚΝ ἴσον ἐστὶν (ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν τῆς ΛΑ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΛΑ ΘΚ), καὶ τὸ ΑΔΕΒ ἄρα τῷ ΛΑΚΝ ἴσον ἐστὶν. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΒΗΖΓ τῷ ΝΚΓΜ ἴσον ἐστὶν· τὰ ἄρα ΔΑΒΕ ΒΗΖΓ παραλληλόγραμμα τῷ ΛΑΓΜ ἴσα ἐστὶν, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΓ ΘΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΓ, ἣ ἐστὶν ἴση συναμφοτέραις ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ ΒΘΔ. καὶ ἔστι τοῦτο καθολικώτερον πολλῶ τοῦ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἐπὶ τῶν τετραγώνων ἐν τοῖς στοιχείοις δεδειγμένου. β'. Ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς ΑΒ ῥητὴν ἔχον τὴν διάμετρον, καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση καὶ τῇ ΑΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ δίχα ἡ ΒΔ περιφέρεια τῷ Ε σημείῳ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ἄλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰλήφθω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΔ ΖΕ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΔΓ, ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶν τῷ ἐπὶ τῆς ΖΓ, οὗ κέντρον ἐστὶν τὸ Β. καὶ τῆς ΒΔ ἐπιζευχθείσης ἰσόπλευρον γίνεται τὸ ΒΖΔ τρίγωνον, ὥστε διμοῖρου μὲν ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΖΒ γωνία, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ ΕΖΒ. ἤχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ διάμετρον ἡ ΗΕ· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΓΖΔ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

4.180 ἐπίτριτον δὲ τὸ ἀπὸ ΖΓ τοῦ ἀπὸ ΓΔ· ἐπίτριτον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ὄν ις' πρὸς ιβ', τοῦ δὲ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ ὄν ξδ' πρὸς ις'. καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ἐστὶν ὄν ξδ' πρὸς ιβ'. ἔστω δ' ἡ ΖΒ τετραπλασία τῆς ΒΘ· καὶ ἔστιν τῆς ΒΖ διπλασίῳ τῇ ΖΓ· λόγος ἄρα τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΖΘ, ὄν η' πρὸς ε', καὶ τῆς ΖΘ πρὸς ΘΓ ὄν ε' πρὸς γ'· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγος ἐστὶν ὄν ξδ' πρὸς κε'. ἐδείχθη δὲ τοῦ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ὄν ξδ' πρὸς ιβ'· καὶ τοῦ ἀπὸ ΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ λόγος ἐστὶν ὡς κε' πρὸς ιβ'· αἱ ΘΖ ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΘΖ τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ. καὶ ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρός ἐστὶν ῥητῇ τῇ ΑΒ· ἀποτομή ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΘΗ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΓ καὶ ἡ διπλῇ αὐτῆς ἡ ἄρα δυναμένη τὸ δις ὑπὸ ΖΓ ΗΘ ἄλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἐλάσσων. καὶ δύναται τὸ δις ὑπὸ ΓΖ ΗΘ ἢ ΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ. Ὅτι δὲ ἡ ΓΕ δύναται τὸ δις ὑπὸ ΓΖ ΗΘ, οὕτως ἔσται δῆλον· ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς

ἀπὸ τῶν ΕΘ ΘΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΓΘ ΘΗ, ἔστιν δὲ καὶ τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΖ ἴσα τῷ ἀπὸ ΕΖ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΖΘ ΘΗ [ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΓΘΗ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΕΘ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΖΘΗ. καὶ ὡς ἐν πρὸς ἐν, πάντα πρὸς πάντα. καὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΓΕ τοῖς ἀπὸ ΕΘΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΓΘΗ], ἴσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ ΓΕ ΕΘ ΘΖ τοῖς ἀπὸ ΕΘ ΘΓ ΕΖ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΓΘΗ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΖΘΗ, τουτέστιν τῷ δις ὑπὸ ΓΖ ΗΘ.

4.182 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἀπὸ ΕΓ ΖΘ ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΕΖ ΘΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΓΖ ΗΘ. ὢν τὸ ἀπὸ ΖΘ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΖ ΘΓ (τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΘ ἐστὶν κε', τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΓ θ', καὶ τὸ ἀπὸ ΕΖ ις')· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΖΓ ΗΘ. γ'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΓ ῥητὴν ἔχον τὴν διάμετρον, καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΒ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνία ὑπὸ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ ΔΖ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης. Εἰλήφθω γὰρ τὸ Η κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΗΒΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ Κ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΚΗ. ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἐξαγώνου ἐστὶν πλευρὰ ἡ ΒΗ, ἡμίσεια δὲ τῆς ἐξαγώνου ἡ ΚΛ (ἐκβαλλομένη γὰρ τὴν διπλὴν τῆς ΚΗ περιφερείας ὑποτείνει), διπλασία ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΓΚ τῆς ΚΛ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΚΛΓ· ἐπίτρίτον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΚΓ τοῦ ἀπὸ ΓΛ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΛ· αἱ ΔΓ ΓΛ ἄρα ῥηταὶ εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΛ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ῥητῇ τῇ ΑΓ· ἐκ δύο ὀνομάτων ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΛΔ, ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ· ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΗΔΛ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

4.184 δύναται δὲ αὐτὸ ἡ ΔΚ (διὰ γὰρ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΗΔΚ τρίγωνον τῷ ΔΛΚ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΛ)· ἡ ΔΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ διμοίρου ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία καὶ ἴση ἡ ΗΒ τῇ ΗΓ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶν τὸ ΒΗΓ τρίγωνον. ἦχθω δὲ κάθετος ἡ ΒΘ· διπλὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΓ, τῆς ΓΘ. καὶ ἐδείχθη τὸ ἀπὸ ΔΓ τοῦ ἀπὸ ΓΛ ἐπίτρίτον· τὸ ἄρα ἀπὸ ΛΓ τριπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΓΘ· αἱ ΛΓ ΓΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΛΓ τῆς ΓΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλασσον ὄνομα τὸ ΓΘ σύμμετρόν ἐστιν ῥητῇ τῇ ΑΓ· ἡ ΛΘ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν πέμπτη. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΗ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΒΗΘ ΒΗΔ τρίγωνα, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΚΗ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΚΗΛ ΚΗΔ τρίγωνα, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΔΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΗΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΛ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ [κοινὸν γὰρ ὕψος τὸ ΔΗ]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΗ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ.

4.186 καὶ ἐδείχθη ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗΛ τῷ ἀπὸ ΗΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΗ ΛΘ τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΛΘ ἀποτομή πέμπτη, ἡ δὲ ΔΗ ῥητὴ· ἡ ἄρα ΚΖ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΔΚ ἐκ δύο ὀνομάτων· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΖ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης. δ'. Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ ΒΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΔ συμπίπτουσα τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚΗ ΗΛΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΕΛ. Γεγονέτω καὶ ἦχθω τῇ ΚΛ παράλληλος ἡ ΘΞΜ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἡ ΕΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΝ τῇ ΝΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ τῇ ΜΖ· οὕτως ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΘΝΞ τῇ ὑπὸ τῶν ΝΖΜ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑΞ· οὕτως ἄρα ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Ν Ξ Θ σημεία· οὕτως ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΝΘ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΑΞΘ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ τῶν ΑΕΛ· οὕτως ἄρα ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Ν Ε Δ σημεία.

4.188

ἔστιν δὲ ὀρθή γάρ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΔ ΕΝΔ. Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΔ ΕΝΔ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Δ Ε Ν σημεία· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΝΔ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΑΞΘ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΕΔ ΞΘ· ἐν κύκλῳ ἄρα τὰ Α Ν Ξ Θ σημεία· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΑΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΝΞ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΞ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΘΖΜ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΝΞ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΖΝ τῇ ΝΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ μὲν ΞΜ πρὸς ΕΚ, ἡ δὲ ΘΞ πρὸς ΛΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΜ πρὸς ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΞ πρὸς ΛΕ. καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΞ τῇ ΞΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΕ τῇ ΛΕ. ε'. Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖ, ἔστω δὲ ἡ ΕΗ ἴση τῇ ΗΖ· ὅτι καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση. Ἦχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΕΜ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ ΛΖ ΛΓ ΛΜ ΛΕ ΛΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΜΓ τῇ ΓΖ. καὶ ἔστιν ἡ ΜΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῇ ΛΜ.

4.190 καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΜΓ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΛΓ ἴση, καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ τῶν ΕΑΛ ὀρθή τῇ ὑπὸ τῶν ΜΓΛ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ, τουτέστιν τῇ ΛΖ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση· ἡ ΗΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΗΚ. ζ'. Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ διήχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ὅτι καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ ΛΑ ΛΗ ΛΖ ΛΓ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΕΑΛ ΕΗΛ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Ε Α Η Λ σημεία· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΕΛ γωνία. πάλιν ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΛΗΖ ΛΓΖ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Λ Η Ζ Γ σημεία· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΓΛ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΑΛ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΗΕΛ, τῇ ὑπὸ τῶν ΗΖΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΖ. καὶ ἔστιν κάθετος ἡ ΛΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ. Ἐὰν ὥσιν τρεῖς κύκλοι τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένοι καὶ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ ὁ περιλαμβάνων αὐτοὺς κύκλος δοθεὶς ἔσται τῷ μεγέθει. προγράφεται δὲ τάδε. ζ'. Τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν καὶ δοθεῖσαν ἐκάστην τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ εὐθειῶν· δεῖξαι δοθεῖσαν τὴν ἐπιζευγνύουσιν τὰ Δ Β σημεία [τὴν ΒΔ]. Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ κάθετοι ἦχθωσαν ἐπὶ μὲν τὴν ΓΔ ἡ ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΓ ἡ ΒΕ.

4.192 ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν [ἢ ἐν ἀριθμοῖς], καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετός ἐστιν ἡ ΒΕ, δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἐκάστη τῶν ΑΕ ΕΓ ΑΓ ΒΕ (καὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσον ὄν τῷ ἀπὸ ΒΓ γίνεται δοθέν· καὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΑΓ, ὥστε ἐκάστη τῶν ΑΕ ΕΓ ΒΕ ἔσται δοθεῖσα). πάλιν ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἐκάστη τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΑ εὐθειῶν, καὶ κάθετός ἐστιν ἡ ΑΗ, δοθεῖσά ἐστι καὶ ἐκάστη τῶν ΔΗ ΗΓ ΑΗ (καὶ γὰρ ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ παρὰ τὴν ΓΔ παραβληθεῖσα ποιεῖ δοθεῖσαν τὴν τῆς ΓΔ πρὸς ΗΔ ὑπεροχὴν, ὡς ἔστι λῆμμα· ὥστε καὶ ἐκάστην τῶν ΔΗ ΗΓ ΑΗ δεδόσθαι). καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΓΕΖ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ τε ΑΓ πρὸς ΓΖ καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ. καὶ ἔστι δοθεὶς ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΕ λόγος· δοθεῖσα ἄρα ἔσται καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΖ ΖΕ. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ ΒΓ· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ΖΒ ΒΓ ΓΖ δοθεῖσα. ἦχθω δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΖ ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκάστη τῶν ΖΘ ΘΓ ΒΘ· ὥστε καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΘ ΘΒ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. Ἄλλως.

4.194. (1n) η'. Ἦχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἡ ΔΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἐκάστη τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΑ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, δοθεῖσα ἔσται καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΓΕΖ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ λόγος· δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΖ λόγος. καὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΓΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΔΕ δοθεῖσα· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΔΖ ἔσται δοθεῖσα. κατὰ ταῦτα δοθήσεται καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΖ ΖΓ (ὡς γὰρ ἡ ΑΓ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΕ. καὶ δοθεὶς ὁ τῆς ΑΓ πρὸς ΒΓ λόγος). ἦχθω δὲ

πάλιν ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἡ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΖΗ ΗΓ, ὥστε καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΗ ΗΔ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ Η γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΔ. Θ'. ἴσοι κύκλοι τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δοθέντες, ὧν κέντρα τὰ Α Β, καὶ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐφαπτόμενος τῶν κύκλων, ὧν κέντρα τὰ Α Β, γεγράφθω ὁ ΓΕΖ· ὅτι δοθεῖσά ἐστὶν αὐτοῦ ἡ διάμετρος. Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΖΗ ΓΖΘ ΓΜΠ ΑΒ ΓΕ ΠΖΚ ΘΚ ΘΗ· γίνεται δὴ παράλληλος ἡ ΗΘ τῇ ΓΕ διὰ τὸ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΖΓ ΗΖΘ ἴσας εἶναι, καὶ ὁμοίας τὰς ΕΠΖ ΗΚΖ περιφερείας καὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ.

4.196 καὶ διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΠΓ ἐστὶν παράλληλος. καὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ κύκλοι, ὧν τὰ κέντρα τὰ Α Β· ἴση ἄρα ἡ ΖΗ τῇ ΔΕ. ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΣ ΒΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΣ τῇ ΒΛ· ὥστε καὶ ἡ μὲν ΒΜ τῇ ΜΑ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΜΣ (δύο γὰρ τρίγωνά ἐστιν τὰ ΒΛΜ ΑΣΜ τὰς δύο γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν ἴσας ἔχοντα καὶ τὰς πρὸς τοῖς Λ Σ σημείοις ὀρθάς, ἔχει δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ΒΛ τῇ ΑΣ). καὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἐκάστη τῶν ΜΛ ΑΒ ΜΣ ΣΑ [οὕτως καὶ ἡ ΖΗ ΔΕ καὶ ΒΛ ΑΣ]· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΜ ΜΑ εὐθειῶν. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΓ ΓΒ δοθεῖσά ἐστὶν (θέσει γὰρ τὰ Α Β Γ σημεία)· δοθὲν ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἶδει· καὶ ἡ ΓΜ ἄρα δοθεῖσα ἔσται (καθέτου ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ). καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΝΡ διάμετρος τοῦ ΗΘΚ κύκλου, ἀλλὰ καὶ ἡ ΜΑ δοθεῖσα, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΜΡ δοθεῖσά ἐστὶν.

4.198 καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΝΜΡ, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΗΜΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΕΜΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τῶν ΓΜΠ. καὶ δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΓΜ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΓΠ. ἐπεὶ οὖν θέσει καὶ μεγέθει ἐστὶν κύκλος, οὗ κέντρον τὸ Α, καὶ δοθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει ἡ ΓΠ, καὶ διηγμέναι αἱ ΠΖΚ ΓΖΘ, ὥστε παράλληλον εἶναι τῇ ΓΠ τὴν ΚΘ, δοθεῖσά ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ περὶ τὸ ΓΖΠ τρίγωνον κύκλου, τουτέστιν τοῦ ΓΕΖ. ι'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον ἐκάστην τῶν πλευρῶν δοθεῖσαν, καὶ σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, καὶ ᾧ ὑπερέχει ἡ ΑΔ τῆς ΓΔ, τούτῳ ὑπερεχέτω καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ, καὶ ἔστω ὑπεροχὴ δοθεῖσα· ὅτι ἐκάστη τῶν ΑΔ ΔΓ ΔΒ δοθεῖσά ἐστὶν. Ἐπεὶ ἡ τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχὴ δοθεῖσά ἐστὶν, ἔστω τῇ ὑπεροχῇ ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΒΖ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΕΔ ΔΓ ΔΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. γεγράφθω περὶ κέντρον τὸ Δ κύκλος ὁ ΓΕΖ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΔΖ.

4.200 ἥς ἡ ΒΖ ἐστὶν δοθεῖσα· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ ἐστὶν δοθεῖσα. ἀλλὰ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΔ ΔΓ δοθεῖσά ἐστὶν· ἐκάστη ἄρα τῶν ΑΔ ΔΓ ΔΒ ἐστὶν δοθεῖσα. ια'. Τὰ μὲν οὖν λήμματα ταῦτα, τὸ δὲ ἀρχαϊκόν· τρεῖς κύκλοι ἄνισοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων δοθείσας ἔχοντες τὰς διαμέτρους, ὧν κέντρα τὰ Α Β Γ, καὶ περὶ αὐτοὺς κύκλος ἐφαπτόμενος αὐτῶν ὁ ΔΕΖ, οὗ δέον ἔστω εὐρεῖν τὴν διάμετρον. Ἔστω δὲ αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Η, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τὰ Α Β Γ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ ΓΒ καὶ ἔτι αἱ ΗΑΔ ΗΒΖ ΗΓΕ. ἐπεὶ οὖν αἱ διάμετροι τῶν κύκλων, ὧν κέντρα τὰ Α Β Γ, δοθεῖσαι εἰσιν, γενήσεται καὶ ἐκάστη τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ δοθεῖσα. καὶ αἱ τῶν ΑΗ ΗΓ ΗΒ διαφοραὶ δοθεῖσαι· διὰ ἄρα τὸ προγεγραμμένον δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΑΗ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ δοθεῖσά ἐστὶν, ὥστε δοθεῖσά ἐστὶν ἡ διάμετρος τοῦ ΔΕΖ κύκλου. καὶ τοῦτο μὲν ἐνθάδε μοι πέρας ἔχει, τὰ δὲ λοιπὰ ὑπογράψω. ιβ'.

4.202 Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ κεκλᾶσθω ἡ ΓΒΑ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἴση ἔστω ἡ ΓΒ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΓ αἱ ΒΕ ΔΖ· ὅτι ἡ ΑΖ διπλασίων ἐστὶν τῆς ΒΕ. Κείσθω γὰρ τῇ μὲν ΑΕ ἴση ἡ ΕΗ, τῇ δὲ ΑΒ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΘ ΘΗ ΘΖ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΚ. ἐπεὶ ἡ ΓΒ ἴση ἐστὶν συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒ ΔΓ, ὧν ἡ ΒΘ τῇ ΒΑ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΓ λοιπῇ τῇ ΓΔ. ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΖ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΖ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΘ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΖΘΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑΗ γωνίᾳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΑΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΗ, ἴσον ἐστὶν τῷ δις ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΓΖ γωνίᾳ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΘΑΗ ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΖΘΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΗΘ

λοιπῇ τῇ ὑπὸ τῶν ΘΖΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΗΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΖΗ ἐστὶν ἴση· καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΘΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΚΗ· καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ τῶν ΑΒΘ ΑΚΘ, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὸ ΑΒΘΚ τετράπλευρον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΒΚΑ· ἡμίους δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΘΑ· ἡμίους ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΑ· ὀρθή δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΕΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΚ· τῆς δὲ ΕΚ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΑΖ (ἐπέιπερ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΚ τῇ ΚΗ)· καὶ τῆς ΕΒ ἄρα διπλῇ ἐστὶν ἡ ΑΖ, ὅπερ· ~ ιγ'.

4.204 Ὡςτὼ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ κεκλάσθω ἡ ΑΒΔ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, καὶ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΕΖ, καὶ τὸ κέντρον τὸ Η, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΘΕ· ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ γωνίᾳ. Ὡςθω ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΒΕ κάθετος ἡ ΗΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΕ· καὶ ἔστιν ὀρθή ἡ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΒΚ ΚΔ ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΚ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεὶ ἐζήτουν τὴν ὑπὸ τῶν ΚΕΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ γωνίᾳ ἴσην, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΕ, ὅτι ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ ἴση ἐστίν, ὅτι ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΚ τῇ ΕΘ. Ὡςθω καὶ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΔΕ ἐστὶν παράλληλος, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΕΖ, ζητεῖται δὲ καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΕΘ παράλληλος, ὅτι ἄρα διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ μὲν ΚΛΗ τρίγωνον τῷ ΕΔΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΔΚΗ τῷ ΕΘΖ, ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΕ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ· ὅτι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ (δι' ἴσου γάρ)· ὅτι ἄρα καὶ ὡς ἡ ΛΔ πρὸς τὴν ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ (διελόντι γάρ). ὑπέκειτο δὲ καὶ ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΑΗ· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΛΑ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση.

4.206 ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΒΗ ἑκατέρω τῶν ΛΔ ΑΗ ἐστὶν ἴση· ὅτι ἄρα καὶ ἡ ΒΛ τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση. ἔστιν δέ· ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΛ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΑΚΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΔ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΛ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΔΚΛ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΛ ἄρα τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολουθῶς τῇ ἀναλύσει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΚΕΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΚΔΕ τῇ ὑπὸ ΔΚΛ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΚΕΔ τῇ ὑπὸ ΒΚΛ ἐστὶν ἴση διὰ τὰς ΚΛ ΕΔ παραλλήλους· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΚΛ ἐστὶν ἴση. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΒΚ εὐθεῖα τῇ ΚΔ ἴση· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΒΛ βάσει τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΛΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΑ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΔΑΒ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΑΒΗ. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΒΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΛ ἐστὶν ἴση· δύο δὲ τρίγωνά ἐστιν τὰ ΒΔΗ ΒΑΛ τὰς δύο γωνίας ταῖς δύο γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΑΒ τῇ ΒΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΛΑ, ὥστε καὶ ἡ ΛΔ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΛΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ.

4.208 ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΕ· ἐξ ἴσου ἄρα καὶ ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΘ τῇ ὑπὸ ΚΗΔ διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ ΚΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΖ τῇ ὑπὸ ΚΔΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΔΕ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΘ. ιδ'. Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον, ὃ δὲ καλοῦσιν ἄρβηλον, ἐγγεγράφθωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν τε ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὅσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ κέντρα τὰ Η Θ Κ Λ· δεῖξαι τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Η κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Θ κάθετον διπλασίαν τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Θ κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Κ κάθετον τριπλασίαν, καὶ τὰς ἐξῆς καθέτους τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλασίας κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων

ὑπερέχοντας ἀριθμοὺς ἐπ' ἄπειρον γινομένης τῆς τῶν κύκλων ἐγγραφῆς. δειχθήσεται δὲ πρότερον τὰ λαμβανόμενα. ιε'. Ἐστῶσαν δύο κύκλοι οἱ ΖΒ ΒΜ περὶ κέντρα τὰ Α Γ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Β, καὶ μείζων ἔστω ὁ ΒΜ, ἄλλος δέ τις ἐφαπτόμενος αὐτῶν κατὰ τὰ Κ Λ περὶ κέντρον τὸ Η ὁ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ ΑΗ (πεσοῦνται δὴ διὰ τῶν Κ Λ), καὶ ἡ ἐπὶ τὰ Κ Λ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τεμεῖ μὲν τὸν ΖΒ κύκλον, συμπίπτει δὲ τῇ διὰ τῶν Α Γ κέντρων ἐκβαλλομένη εὐθείᾳ διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ΑΚ πλευρὰν τῆς ΓΔ τοῦ ΑΚΔΓ τραπεζίου συμπίπτέτω οὖν κατὰ τὸ Ε τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Δ· δεῖξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ.

4.210 Ἐστὶν δὲ φανερόν [ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΔ]· γίνεται γὰρ ἰσογώνια τὰ ΓΔΛ ΑΚΗ τρίγωνα τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας [πρὸς τῷ Λ] ἴσας ἔχοντα καὶ περὶ τὰς Γ Η γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον [ἔχοντα], ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ ΔΓΗ ΓΗΑ γωνίας ἐναλλάξ, καὶ παράλληλον τὴν ΓΔ τῇ ΑΗ, καὶ ὡς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΓ, τὴν ΑΚ πρὸς ΓΔ, τουτέστιν τὴν ΑΒ πρὸς ΒΓ. Καὶ τὸ ἀναστροφίον δὲ φανερόν ἐστίν. ἐὰν γὰρ ᾗ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΔ ἐπ' εὐθείας γίνεται τῇ ΔΕ. Παράλληλός τε γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΓΔ καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ τῇ ΔΕ. εἰ γὰρ ἡ διὰ τῶν Κ Ε οὐχ ἦξει καὶ διὰ τοῦ Δ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, γίνεται ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΘ, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως οὐδὲ τοῦ Δ ἐκτὸς ἦξει τέμνουσα τὴν ΓΔ ἐκβληθεῖσαν, οἷον κατὰ τὸ Ν· ἔσται γὰρ πάλιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΚ πρὸς ΓΝ, ὅπερ ἀδύνατον· ἔστιν γὰρ πρὸς τὴν ΓΔ.

4.212 Ἡ οὕτως. διὰ τοῦ Κ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΚΝ ἦχθω, καὶ γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΝΚ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΓΝ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΚ, τουτέστιν ἡ ΓΝ, πρὸς ΓΔ, διελόντι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΝΔ πρὸς ΔΓ. ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΝ, πρὸς ΝΔ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΔ. καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Ν Γ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΕΔΓ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΚ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΓΝ· εὐθεῖα ἄρα καὶ ἡ ΚΔΕ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΚΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΒ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν πρὸς ΓΖ, ἔσται καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΒΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΕ πρὸς ΕΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΕ ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΖ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΛΕ ΕΔ τῷ ὑπὸ ΒΕ ΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΕΛ τῷ ἀπὸ ΕΒ. ις'. Δύο ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΕΔ, καὶ ἐφαπτόμενος αὐτῶν κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Α κάθετος ἦχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῶν ἡμικυκλίων ἡ ΑΜ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς ἀμφοτέρως ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης οὕτως ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΓΒ ΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ.

4.214 Ἡχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι οἱ ΒΗΓ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Η, καὶ διάμετροι ἐν αὐτοῖς παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ ΖΘ, εὐθεῖα ἔσται ἡ τε διὰ τῶν Η Θ Β καὶ ἡ διὰ τῶν Η Ζ Γ. πάλιν ἐπεὶ δύο κύκλοι οἱ ΒΕΔ ΕΖΗΘ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐν αὐτοῖς παράλληλοι διάμετροι εἰσιν αἱ ΘΖ ΒΔ, εὐθεῖα ἔσται ἡ τε διὰ τῶν Ζ Ε Β καὶ ἡ διὰ τῶν Θ Ε Δ. ἦχθωσαν καὶ ἀπὸ τῶν Θ Ζ σημείων κάθετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΗΓ ΒΘΚ τριγώνων ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΒΚ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΒ ΒΘ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΖΛ ΒΕΔ τριγώνων ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΛ, καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ ΒΛ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΒ ΒΘ τῷ ὑπὸ ΖΒ ΒΕ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ τῷ ὑπὸ ΔΒ ΒΛ, ἂν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὸ Δ πίπτῃ, τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ.

4.216 ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης καταγραφῆς ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΚ, ὥστε καὶ συναμφοτέρος ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ συναμφοτέρος ἡ ΑΒ ΒΚ

πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΚΛ. καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς ΛΒ ΒΚ ἡμίσεια ἢ ΒΜ (διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΚΜ τῇ ΜΛ), τῆς δὲ ΛΚ ἡμίσεια ἢ ΜΚ· καὶ ὥς ἄρα συναμφοτέρος ἢ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ ΒΜ πρὸς ΜΚ, τουτέστιν πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης καταγραφῆς, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΒΚ ἴσον ἐδείχθη [καὶ κοινῶς] τῷ ὑπὸ ΔΒΛ, ὥς ἄρα ἢ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἢ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ. συνθέντι ὥς ἢ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἢ ΚΛ πρὸς ΚΒ· ὥστε καὶ ὥς ἢ ΓΔ πρὸς τὴν τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴν, οὕτως ἢ ΚΛ πρὸς τὴν τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχὴν. καὶ ἔστι τῆς μὲν ΚΛ ἡμίσεια ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου [ἀντὶ τῆς ΛΜ], ἢ δὲ ΒΜ ἡμίσεια τῆς τῶν ΛΒ ΒΚ ὑπεροχῆς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΛΜ τῇ ΜΚ, ὥστε καὶ ὥς ἢ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς συναμφοτέρος ἢ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης ἢ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΓΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ [ἀνάπαλιν γάρ]. Συνθεωρεῖται δ' ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΛΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ.

4.218 διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΘΚ ΖΛΓ τριγώνων ἐστὶν ὥς ἢ ΒΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἢ ΖΛ πρὸς τὴν ΛΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ ΖΛ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. Γίνεται δὲ καὶ διὰ μὲν τὸ εἶναι ὥς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΛ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ ΒΓ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛ ΔΓ, διὰ δὲ τὸ εἶναι ὥς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὴν ΒΚ πρὸς ΚΛ, τὸ ὑπὸ τῆς ΒΔ καὶ τῆς ΚΛ, τουτέστιν τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΚ ΔΓ. ιζ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων γεγράφθω κύκλος ὁ ΘΡΤ ἐφαπτόμενος τῶν τε ἐξ ἀρχῆς ἡμικυκλίων καὶ τοῦ ΕΗΘ κύκλου κατὰ τὰ Θ Ρ Τ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Α Π κέντρων κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΑΜ ΠΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὥς ἢ ΑΜ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, οὕτως ἢ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον. Ἦχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΒΖ· ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΒΗΓ ἡμικυκλίου. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΑΠ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ διὰ τὸ προδειχθὲν ὥς συναμφοτέρος ἢ ΓΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ ἢ ΒΜ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ὥς ἢ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς συναμφοτέρον, τουτέστιν ὥς ἢ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, καὶ ἢ ΒΝ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου, ἔσται ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὥς ἢ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἢ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου.

4.222 ἀλλ' ὥς ἢ ΜΒ πρὸς ΒΝ, ἢ ΑΖ πρὸς ΖΠ (ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΖΜ ἔσται ὥς ἢ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, οὕτως ἢ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΞ). καὶ ὥς ἄρα ἢ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ, οὕτως ἢ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. καὶ τῶν ΕΗΘ ΡΘΤ κύκλων ἐφάπτεται τις κύκλος ὁ ΒΡΕΔ κατὰ τὰ Ρ Ε σημεῖα· διὰ ἄρα τὸ προδειχθὲν ιε' θεώρημα ἢ τὰ Ρ Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον πεσεῖται, καὶ ἴσον ἔσται τὸ ὑπὸ ΕΖΡ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ τετραγώνῳ. ἔστιν δὲ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετραγώνῳ ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΖΡ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ τῷ ἀπὸ ΖΘ· ἴση ἄρα ἢ ΒΖ τῇ ΖΘ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἢ μὲν ΜΑ ἐκβληθεῖσα τέμνει τὴν τοῦ ΕΗΘ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Σ, ἢ δὲ ΠΝ τέμνει τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ο σημεῖον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν ΑΘ τῇ ΑΣ, ἢ δὲ ΠΟ τῇ ΠΘ, καὶ ἢ τὰ Ο Σ σημεῖα ἐπιζευγνύουσα ἥξει διὰ τοῦ Θ· ἴση γάρ ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΘΑΣ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΠΟ γωνίᾳ ἐναλλάξ, καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΘΣ τρίγωνον τῷ ΠΘΟ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἢ ΑΠ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἢ διὰ τῶν Σ Θ Ο σημείων ἀπαγομένη. ἥξει δὲ καὶ διὰ τοῦ Β· εὐθεῖα γὰρ ἢ ΘΟΒ διὰ τὸ εἶναι ὥς τὴν ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὴν ΟΠ πρὸς τὴν ΠΘ, ἴσων οὖσων τῶν ὑπὸ ΒΖΘ ΟΠΘ γωνιῶν ἐν παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΟΠ· καὶ τοῦτο γὰρ προδεδεικται ιε'.

4.224 ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἢ ΒΠ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπίπτέτω τῇ ΜΑ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἦν ὥς ἢ ΜΒ πρὸς ΒΝ, τουτέστιν ὥς ἢ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, οὕτως ἢ ΑΖ πρὸς ΖΠ καὶ ἢ ΑΘ πρὸς ΘΠ, ἔσται καὶ ὥς ἢ ΚΒ πρὸς ΒΠ, ἢ ΑΣ πρὸς ΠΟ καὶ ἢ ΣΚ πρὸς ΠΟ· ἴση ἄρα ἢ ΑΣ τῇ ΣΚ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἢ

ΑΚ ὅλη τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΕΗΘ κύκλου ἐστὶν ἴση, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΣ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΟΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΑ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον, ὅπερ ~ ιη'. Τούτων προτεθεωρημένων ὑποκείσθω ἡμικύκλιον τὸ ΒΗΓ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον εἰλήφθω τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῶν ΒΔ ΔΓ ἡμικύκλια γεγράφθω τὰ ΒΕΔ ΔΥΓ, καὶ ἐγγεγράφωσαν εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τριῶν περιφερειῶν τὸν καλούμενον ἄρβηλον κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὅσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Α Π Ο, καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ ἤχθωσαν αἱ ΑΜ ΠΝ ΟΣ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΑΜ ἴση ἐστὶν τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ἡ δὲ ΠΝ διπλῇ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου, ἡ δὲ ΟΣ τριπλῇ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς. Ἦχθω διάμετρος ἡ ΘΖ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ κάθετοι αἱ ΘΚ ΖΛ· ἔσται δὴ κατὰ τὰ προγεγραμμένα τὸ μὲν ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒ ΒΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ τῷ ὑπὸ ΚΓΔ.

4.226 καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΓ· ἐκάτερος γὰρ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΓ (ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΚ· ἐναλλάξ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΚ· διελόντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ· πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΓ ΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΛ· ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἣν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΓΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. προδεδεικται δὲ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΑΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΚΛ, τουτέστιν τῇ ΖΘ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦτο προδεδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ διπλῇ τῆς ΖΘ, ἔσται καὶ ἡ ΠΝ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διπλῇ.

4.228 ἡ ΠΝ ἄρα μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου τριπλασία τῆς διαμέτρου, καὶ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἡ ΟΣ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου· καὶ ἡ ΟΣ ἄρα τριπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου. καὶ ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ ἐξῆς κύκλου κάθετος τῆς διαμέτρου τετραπλασία, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν καθ' αὐτὰς διαμέτρων εὐρεθήσονται πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς, καὶ τοῦτο συμβαῖνον ἐπὶ τὸ ἄπειρον ἀποδειχθήσεται. Ἄν δ' ἀντὶ τῶν ΒΗΓ ΔΥΓ περιφερειῶν εὐθεῖαι ὥσιν ὀρθαὶ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης ἔχει καταγραφῆς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται περὶ τοὺς ἐγγεγραμμένους κύκλους· αὐτόθεν γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἴση γίνεται τῇ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου διαμέτρῳ. Ἄν δὲ αἱ μὲν ΒΗΓ ΒΕΔ μένωσιν περιφέρειαι, ἀντὶ δὲ τῆς ΔΥΓ περιφερείας εὐθεῖα ὑποτεθεῖ (ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης ἔχει καταγραφῆς) ἡ ΔΖ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΒΓ, τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ τετραγωνικὸν ἐν ἀριθμοῖς λόγον ἐχούσης, σύμμετρος ἔσται ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, εἰ δὲ μή, ἀσύμμετρος.

4.230 καθόλου γὰρ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον δυνάμει ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ὡς ἐξῆς δείκνυται. οἷον ἐὰν ᾗ τετραπλασία μήκει ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, γίνεται διπλῇ μήκει ἡ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος, τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Π τριπλῇ, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ Ο τετραπλῇ, καὶ ἐξῆς κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς. ιθ'. Τὸ ὑπερτεθὲν λῆμμα. ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΑΔ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΔΕ, καὶ κύκλος ἐφαπτόμενος ὁ ΘΗΖΑ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ μήκει, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ΘΗΖΑ κύκλου δυνάμει. Ἦχθω διάμετρος ἡ ΘΖ· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΖΑΒ ΘΑΔ. κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ· ἔσται ἄρα διὰ τὰ προδεδειγμένα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον χωρίον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ· ὡς ἄρα

ή ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ή ΒΔ πρὸς ΔΚ, τουτέστιν πρὸς ΘΖ. ὡς δὲ ή ΒΔ πρὸς ΘΖ, ή ΔΑ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ ή ΔΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΖ (ὀρθογώνιον γάρ ἐστὶν τὸ ΘΖΔ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσιν ή ΖΑ)· καὶ ὡς ἄρα ή ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ ΘΗΖΑ κύκλου.

4.232 κ'. Ἔτι καὶ τοῦτο διὰ τῶν προγεγραμμένων λημμάτων τεθεώρηται. ἔστω ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ, καὶ γεγράφθωσαν ἐφαπτόμενοι τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κύκλοι οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Ζ Η Θ, καὶ οἱ συνεχεῖς αὐτοῖς ὡς ἐπὶ τὸ Α. ὅτι μὲν οὖν ή ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Ζ κύκλου δῆλον, λέγω δ' ὅτι καὶ ή μὲν ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τριπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, ή δὲ ἀπὸ τοῦ Θ πενταπλασία, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλασίου κατὰ τοὺς ἐξῆς περισσοὺς ἀριθμούς. Ἐπεὶ γὰρ προδεδεικται ὡς ή ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ή ἀπὸ τοῦ Η κάθετος πρὸς τὴν ἰδίαν διάμετρον, καὶ ἔστιν ή ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου ἡμιολία τῆς διαμέτρου, τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται τριπλασία. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ή ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ή ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, ή δ' ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ δύο, ἔξει καὶ ή ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον τὸν αὐτὸν λόγον· τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται πενταπλασία. ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλασίου κατὰ τοὺς ἐξῆς περισσοὺς ἀριθμούς. κα'.

4.234 Τὸ ἐπὶ τῆς ἔλικος τῆς ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένης θεώρημα προὔτεινε μὲν Κόνων ὁ Σάμιος γεωμέτρης, ἀπέδειξεν δὲ Ἀρχιμήδης θαυμαστῇ τινι χρησάμενος ἐπιβολῇ. ἔχει δὲ γένεσιν ή γραμμὴ τοιαύτην. Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον μὲν τὸ Β, ή δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ή ΒΑ. κενινήσθω ή ΒΑ εὐθεῖα οὕτως ὥστε τὸ μὲν Β μένειν, τὸ δὲ Α ὁμαλῶς φέρεσθαι κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἅμα δὲ αὐτῇ ἀρξάμενόν τι σημεῖον ἀπὸ τοῦ Β φερέσθω κατ' αὐτῆς ὁμαλῶς ὡς ἐπὶ τὸ Α, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τό τε ἀπὸ τοῦ Β σημεῖον τὴν ΒΑ διερχέσθω καὶ τὸ Α τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· γράψει δὴ τὸ κατὰ τὴν ΒΑ κινούμενον σημεῖον ἐν τῇ περιφορᾷ γραμμὴν οἷα ἐστὶν ή ΒΕΖΑ, καὶ ἀρχὴ μὲν αὐτῆς ἔσται τὸ Β σημεῖον, ἀρχὴ δὲ τῆς περιφορᾶς ή ΒΑ, αὐτὴ δὲ ή γραμμὴ ἔλιξ καλεῖται. καὶ τὸ ἀρχικὸν αὐτῆς ἐστὶ σύμπτωμα τοιοῦτον. Ἦτις γὰρ ἂν διαχθῇ πρὸς αὐτὴν ὡς ή ΒΖ καὶ ἐκβληθῇ, ἔστιν ὡς ή ὅλη τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΔΓ περιφέρειαν, οὕτως ή ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ. Τοῦτο δὲ συνιδεῖν ῥάδιον ἐκ τῆς γενέσεως· ἐν ᾧ μὲν γὰρ τὸ Α σημεῖον τὴν ὅλην κύκλου περιφέρειαν διέρχεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Β τὴν ΒΑ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Α τὴν ΑΔΓ περιφέρειαν, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Β τὴν ΒΖ εὐθεῖαν. καὶ εἰσὶν αἱ κινήσεις αὗται ἑαυταῖς ἴσοταχεῖς, ὥστε καὶ ἀνάλογον εἶναι. Φανερόν δὲ καὶ τοῦτο ὅτι, αἵτινες ἂν διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὴν γραμμὴν εὐθεῖαν ἴσας περιέχουσαι γωνίας, τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσιν.

4.236 κβ'. Δείκνυται δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς ἔλικος καὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐν ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς τρίτον μέρος τοῦ περιλαμβάνοντος αὐτὴν κύκλου. Ἔστω γὰρ ὁ τε κύκλος καὶ ή προειρημένη γραμμὴ, καὶ ἐκκείσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΚΝΛΠ, καὶ ἀπειλήφθω ή μὲν ΑΓ περιφέρεια μέρος τι τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ή δὲ ΚΡ εὐθεῖα τῆς ΚΠ τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ή τε ΓΒ καὶ ή ΒΑ, καὶ τῇ μὲν ΚΝ παράλληλος ή ΡΤ, τῇ δὲ ΚΠ ή ΩΜ, καὶ περὶ τὸ Β κέντρον περιφέρεια ή ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ή ΑΒ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ή ΒΓ πρὸς ΓΖ, οὕτως ή ὅλη τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ (τοῦτο γὰρ ἐστὶν τὸ ἀρχικὸν τῆς ἔλικος σύμπτωμα), ὡς δὲ ή τοῦ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ, ή ΠΚ πρὸς ΚΡ, ὡς δὲ ή ΠΚ πρὸς τὴν ΚΡ, ή ΑΚ πρὸς τὴν ΚΩ, τουτέστιν ή ΡΤ πρὸς τὴν ΡΩ, καὶ ὡς ἄρα ή ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, ή ΤΡ πρὸς ΡΩ. καὶ ἀναστρέψαντι· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΤΩ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, οὕτως ὁ ΑΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΖΒΗ τομέα. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΩ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΚΤ παραλληλογράμμου κύλινδρος

περι ἄξονα τὸν NT πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ MT παραλληλογράμμου κύλινδρον περι τὸν αὐτὸν ἄξονα· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΓΒΑ τομεὺς πρὸς τὸν ΖΒΗ τομέα, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΚΤ παραλληλογράμμου κύλινδρος περι ἄξονα τὸν NT πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ MT παραλληλογράμμου κύλινδρον περι τὸν αὐτὸν ἄξονα.

4.238 ὁμοίως δὲ ἐὰν τῇ μὲν ΑΓ ἴσην θῶμεν τὴν ΓΔ, τῇ δὲ ΚΡ ἴσην τὴν ΡΧ, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἔσται ὡς ὁ ΔΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΕΒΘ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΡΦ παραλληλογράμμου κύλινδρος περι ἄξονα τὸν ΤΦ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΞΦ παραλληλογράμμου κύλινδρον περι τὸν αὐτὸν ἄξονα. τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ ἐφοδεύσαντες δεῖξομεν ὡς ὅλον τὸν κύκλον πρὸς πάντα τὰ ἐγγεγραμμένα τῇ ἔλικι ἐκ τομέων σχήματα, οὕτως τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΠ παραλληλογράμμου κύλινδρον περι ἄξονα τὸν ΝΛ πρὸς πάντα τὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΚΝΛ τριγώνου περι τὸν ΛΝ ἄξονα κῶνῳ ἐγγραφόμενα ἐκ κυλίνδρων σχήματα, καὶ πάλιν ὡς τὸν κύκλον πρὸς πάντα τὰ περιγραφόμενα τῇ ἔλικι ἐκ τομέων σχήματα, οὕτως τὸν κύλινδρον πρὸς πάντα τὰ τῷ αὐτῷ κῶνῳ ἐκ κυλίνδρων περιγραφόμενα σχήματα, ἐξ οὗ φανερόν ὅτι ὡς ὁ κύκλος πρὸς τὸ μεταξὺ τῆς ἔλικος καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας σχῆμα, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κῶνον. τριπλάσιος δὲ ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου· τριπλάσιος ἄρα καὶ ὁ κύκλος τοῦ εἰρημένου σχήματος. κγ'. Τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δεῖξομεν ὅτι, κὰν διαχθῇ τις εἰς τὴν ἔλικα ὡς ἡ ΒΖ καὶ διὰ τοῦ Ζ περι τὸ κέντρον τὸ Β γραφῇ κύκλος, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς ΖΕΒ ἔλικος καὶ τῆς ΖΒ εὐθείας τρίτον μέρος ἐστὶν τοῦ περιεχομένου σχήματος ὑπὸ τε τῆς ΖΗΘ περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν. Ἡ μὲν οὖν ἀπόδειξις τοιαύτη τίς ἐστίν, ἐξῆς δὲ γράφομεν θεώρημα περι τὴν αὐτὴν γραμμὴν ὑπάρχον ἱστορίας ἄξιον. κδ'. Ἐστω γὰρ ὁ τε κύκλος ὁ προειρημένος ἐν τῇ γενέσει, καὶ ἡ ἔλιξ αὕτη ἡ ΑΖΕΒ· λέγω ὅτι, ἥτις ἂν διαχθῇ ὡς ἡ ΒΖ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης ἔλικος καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΕΒ ἔλικος καὶ τῆς ΒΖ εὐθείας περιεχόμενον, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΖΒ κύβον.

4.240 Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ κύκλος περι κέντρον τὸ Β ὁ ΖΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΖΕΒ γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΕΒ γραμμῆς καὶ τῆς ΖΒ εὐθείας περιεχόμενον σχῆμα, οὕτως ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΖΗΘ περιφερείας καὶ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα (ἐκάτερον γὰρ ἐκατέρου τρίτον ἐδείχθη μέρος), ὁ δὲ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν καὶ τῆς ΖΗΘ περιφερείας ἀπολαμβανόμενον χωρίον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΖΗΘ κύκλον καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ὁ ΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΒΘ εὐθειῶν καὶ τῆς ΖΗΘ περιφερείας ἀπολαμβανόμενον χωρίον, ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, ὡς δὲ ὁ ΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ εἰρημένον χωρίον, ἡ ὅλη αὐτοῦ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗΘ, τουτέστιν ἡ τοῦ ΑΓΔ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔΑ, τουτέστιν διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, καὶ τὸ μεταξὺ ἄρα τῆς ἔλικος καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας σχῆμα πρὸς τὸ μεταξὺ τῆς ἔλικος καὶ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΖ. οὗτος δὲ ὁ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΖ κύβον. κε'.

4.242 Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν τῆς ἔλικος ὑποκειμένης καὶ τοῦ περι αὐτὴν κύκλου ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἀχθῇ ἡ ΓΖΕΚ, οἷον ἐστὶν ἐνὸς τὸ μεταξὺ τῆς ΒΛΕ γραμμῆς καὶ τῆς ΒΕ εὐθείας χωρίον, τοιούτων ἐστὶν τὸ μὲν μεταξὺ τῆς ΝΜΕ γραμμῆς καὶ τῶν ΝΒΕ εὐθειῶν χωρίον ἐπτά, τὸ δὲ μεταξὺ τῆς ΖΘΝ γραμμῆς καὶ τῶν ΖΒΝ εὐθειῶν ιθ', τὸ δὲ μεταξὺ τῆς ΑΞΖ γραμμῆς καὶ τῶν ΑΒΖ εὐθειῶν λζ' (δῆλα γὰρ ταῦτα ἐκ τοῦ προδεδειγμένου θεωρήματος), καὶ ὅτι οἷων ἐστὶν ἡ ΑΒ δ', ἡ μὲν ΖΒ τριῶν, ἡ δὲ ΒΝ δύο, ἡ δὲ ΒΕ ἐνός· καὶ γὰρ τοῦτο δῆλον ἔκ τε τοῦ τῆς γραμμῆς συμπτώματος καὶ τοῦ τὰς ΑΓ ΓΔ ΔΚ ΚΑ περιφερείας ἴσας εἶναι. κς'. Εἰς τὸν διπλασιασμόν τοῦ κύβου παράγεται τις ὑπὸ Νικομήδους γραμμὴ καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ AB, καὶ αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔΖ δοθέν τὸ Ε, καὶ μένοντος τοῦ Ε σημείου ἐν ᾧ ἔστιν τόπῳ ἡ ΓΔΕΖ εὐθεῖα φερέσθω κατὰ τῆς ΑΒ εὐθείας ἔλκομένη διὰ τοῦ Ε σημείου οὕτως ὥστε διὰ παντὸς φέρεσθαι τὸ Δ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ μὴ ἐκπίπτειν ἔλκομένης τῆς ΓΔΕΖ διὰ τοῦ Ε.

4.244 τοιαύτης δὴ κινήσεως γενομένης ἐφ' ἑκάτερα φανερόν ὅτι τὸ Γ σημεῖον γράψει γραμμὴν οἷα ἔστιν ἡ ΛΓΜ, καὶ ἔστιν αὐτῆς τὸ σύμπτωμα τοιοῦτον. ὥς ἂν εὐθεῖα προσπίπτῃ τις ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν γραμμὴν, τὴν ἀπολαμβάνομένην μεταξὺ τῆς τε ΑΒ εὐθείας καὶ τῆς ΛΓΜ γραμμῆς ἴσην εἶναι τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· μενούσης γὰρ τῆς ΑΒ καὶ μένοντος τοῦ Ε σημείου, ὅταν γένηται τὸ Δ ἐπὶ τὸ Η, ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῇ ΗΘ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται· ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΓΔ τῇ ΗΘ. ὁμοίως καὶ ἐὰν ἑτέρα τις ἀπὸ τοῦ Ε σημείου πρὸς τὴν γραμμὴν προσπέσῃ, τὴν ἀποτεμνομένην ὑπὸ τῆς γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ἴσην ποιήσῃ τῇ ΓΔ [ἐπειδὴ ταύτῃ ἴσαι εἰσὶν αἱ προσπίπτουσαι]. καλείσθω δέ, φησιν, ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα κανὼν, τὸ δὲ σημεῖον πόλος, διάστημα δὲ ἡ ΓΔ, ἐπειδὴ ταύτῃ ἴσαι εἰσὶν αἱ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν ΛΓΜ γραμμὴν, αὐτὴ δὲ ἡ ΛΓΜ γραμμὴ κοχλοειδὴς πρώτη (ἐπειδὴ καὶ ἡ δευτέρα καὶ ἡ τρίτη καὶ ἡ τετάρτη ἐκτίθεται εἰς ἄλλα θεωρήματα χρησιμεύουσαι). κζ'. Ὅτι δὲ ὀργανικῶς δύναται γράφεσθαι ἡ γραμμὴ καὶ ἐπ' ἑλαττον αἰεὶ συμπορεύεται τῷ κανόνι, τουτέστιν ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τινων σημείων τῆς ΛΓΘ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν καθέτων μεγίστη ἔστιν ἡ ΓΔ κάθετος, αἰεὶ δὲ ἡ ἑγγιον τῆς ΓΔ ἀγομένη κάθετος τῆς ἀπώτερον μείζων ἔστιν, καὶ ὅτι, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τοῦ κανόνος καὶ τῆς κοχλοειδοῦς ἐὰν τις ἡ εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη τμηθήσεται ὑπὸ τῆς κοχλοειδοῦς, αὐτὸς ἀπέδειξεν ὁ Νικομήδης, καὶ ἡμεῖς ἐν τῷ εἰς τὸ ἀνάλημμα Διοδώρου, τρίχα τεμεῖν τὴν γωνίαν βουλόμενοι, κεκρήμεθα τῇ προειρημένῃ γραμμῇ.

4.246 Διὰ δὴ τῶν εἰρημένων φανερόν ὥς δυνατόν ἔστιν γωνίας δοθείσης ὥς τῆς ὑπὸ ΗΑΒ καὶ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς τοῦ Γ διάγειν τὴν ΓΗ καὶ ποιεῖν τὴν ΚΗ μεταξὺ τῆς γραμμῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ. Ἦχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι, τουτέστιν τῇ ΔΘ, κανόνι δὲ τῷ ΑΒ γεγράφθω κοχλοειδὴς γραμμὴ πρώτη ἡ ΕΔΗ συμβάλλει ἄρα τῇ ΑΗ διὰ τὸ προλεχθέν. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ δοθείσῃ. κη'. Τινὲς δὲ τῆς χρήσεως ἕνεκα παρατιθέντες κανόνα τῷ Γ κινουῖσιν αὐτόν, ὥς ἂν ἐκ τῆς πείρας ἡ μεταξὺ ἀπολαμβάνομένη τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ τῆς ΕΔΗ γραμμῆς ἴση γένηται τῇ δοθείσῃ· τούτου γὰρ ὄντος τὸ προκείμενον ἐξ ἀρχῆς δείκνυται (λέγω δὲ κύβος κύβου διπλάσιος εὐρίσκεται). πρότερον δὲ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον λαμβάνονται, ὧν ὁ μὲν Νικομήδης τὴν κατασκευὴν ἐξέθετο μόνον, ἡμεῖς δὲ καὶ τὴν ἀπόδειξιν ἐφηρμόσαμεν τῇ κατασκευῇ τὸν τρόπον τοῦτον. Δεδόσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΛ ΛΑ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὑρεῖν, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΒΓΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκάτερα τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς Δ Ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ ΔΛ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η, τῇ δὲ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ προσβεβλήσθω ἡ ΓΖ ἴση οὔσα τῇ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ καὶ αὐτῇ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν ΚΓΘ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ζ διήχθω ἡ ΖΘΚ ποιοῦσα ἴσην τὴν ΘΚ τῇ ΑΔ ἢ τῇ ΓΖ (τοῦτο γὰρ ὥς δυνατόν ἐδείχθη διὰ τῆς κοχλοειδοῦς γραμμῆς), καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ· λέγω ὅτι ἔστιν ὥς ἡ ΛΓ πρὸς ΚΓ, ἡ ΚΓ πρὸς ΜΑ, καὶ ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΛ.

4.248 Ἐπεὶ ἡ ΒΓ τέτμηται δίχα τῷ Ε καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΚΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἔστιν τῷ ἀπὸ ΕΚ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ἴσον ἔστιν τοῖς ἀπὸ ΚΕΖ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ ὥς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΜΑ

πρὸς ΑΚ, ὥς δὲ ἡ ΜΛ πρὸς ΑΚ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ.

4.250 καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ, τῆς δὲ ΒΓ διπλῇ ἡ ΓΗ· ἔσται ἄρα καὶ ὥς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὥς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΗΖ ΓΘ· καὶ συνθέντι ἄρα ὥς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΘΚ [ἐπεὶ καὶ τῇ ΓΖ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ]· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΖΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΜΔ τῷ ἀπὸ ΖΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ ΜΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΜΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ, ὥν τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΖ (ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ)· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΜΑ τῷ ὑπὸ ΒΚΓ· ὥς ἄρα ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΜΑ. ἀλλ' ὥς ἡ ΒΜ πρὸς ΒΚ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΚ· ὥς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ. ἔστι δὲ καὶ ὥς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΛ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΑΜ, καὶ ἡ ΑΜ πρὸς ΑΛ. καθ'. Τούτου δειχθέντος πρόδηλον ὅπως δεῖ κύβου δοθέντος κύβον ἄλλον εὑρεῖν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον. Ἐστω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος τῆς Α εὐθείας πρὸς τὴν Β, καὶ τῶν Α Β δύο μέσαι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εἰλήφθωσαν αἱ Γ Δ· ἔσται ἄρα ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς Α κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς Γ κύβον· τοῦτο γὰρ δήλον ἐκ τῶν στοιχείων. λ'. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καὶ τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοῦνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

4.252 Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β σημείῳ φερομένῳ κατὰ τῆς ΒΑ συνακολουθείτω, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἢ τε ΑΒ κινουμένη ὁμαλῶς τὴν ὑπὸ ΒΑΔ γωνίαν, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, διανύετω, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΒΑ εὐθεῖαν παροδεύετω, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον κατὰ τῆς ΒΑ φερέσθω. συμβήσεται δήλον τῇ ΑΔ εὐθείᾳ ἅμα ἐφαρμόζειν ἐκατέραν τὴν τε ΑΒ καὶ τὴν ΒΓ. τοιαύτης δὴ γινομένης κινήσεως τεμοῦσιν ἀλλήλας ἐν τῇ φορᾷ αἱ ΒΓ ΒΑ εὐθεῖαι κατὰ τι σημεῖον αἰεὶ συμμεθιστάμενον αὐταῖς, ὅφ' οὗ σημείου γράφεται τις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τε ΒΑΔ εὐθειῶν καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας γραμμὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη, οἷα ἐστὶν ἡ ΒΖΗ, ἡ καὶ χρειώδης εἶναι δοκεῖ πρὸς τὸ τῷ δοθέντι κύκλῳ τετράγωνον ἴσον εὑρεῖν. τὸ δὲ ἀρχικὸν αὐτῆς σύμπτωμα τοιοῦτόν ἐστιν. ἥτις γὰρ ἂν διαχθῇ τυχοῦσα πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὥς ἡ ΑΖΕ, ἔσται ὥς ὅλη ἡ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΘ· τοῦτο γὰρ ἐκ τῆς γενέσεως τῆς γραμμῆς φανερόν ἐστιν. λα'. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ ταῦτα.

4.254 πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ' ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατόν, δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ Δ ἐν ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆσαι μὴ πρότερον τὸν λόγον τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχῃ τῶν κινήσεων ἀνάγκη εἶναι. ἐπεὶ πῶς οἶόν τε συναποκαταστῆναι τάχῃσιν ἀκρίτοις χρώμενα, πλὴν εἰ μὴ ἂν κατὰ τύχην ποτὲ συμβῇ; τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον; ἔπειτα δὲ τὸ πέρας αὐτῆς ὧ χρῶνται πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, τουτέστιν καθ' ὃ τέμνει σημεῖον τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, οὐχ εὐρίσκεται. νοείσθω δὲ ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ λεγόμενα καταγραφῆς· ὁπόταν γὰρ αἱ ΓΒ ΒΑ φερόμεναι συναποκατασταθῶσιν, ἐφαρμόσουσιν τῇ ΑΔ καὶ τομὴν οὐκέτι ποιήσουσιν ἐν ἀλλήλαις· παύεται γὰρ ἡ τομὴ πρὸ τῆς ἐπὶ τὴν ΑΔ ἐφαρμογῆς ἥπερ τομὴ πέρας αὐτῆς ἐγένετο τῆς γραμμῆς, καθ' ὃ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ συνέπιπτεν. πλὴν εἰ μὴ λέγοι τις ἐπινοεῖσθαι προσεκβαλλομένην τὴν γραμμὴν, ὥς ὑποτιθέμεθα τὰς εὐθείας, ἕως τῆς ΑΔ· τοῦτο δ' οὐχ ἔπεται ταῖς ὑποκειμέναις ἀρχαῖς, ἀλλ' ὥς ἂν ληφθεῖν τὸ Η σημεῖον προειλημμένου τοῦ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν εὐθεῖαν λόγου. χωρὶς δὲ τοῦ δοθῆναι τὸν λόγον τοῦτον οὐ χρὴ τῇ τῶν εὐρόντων ἀνδρῶν δόξῃ

πιστεύοντας παραδέχεσθαι τὴν γραμμὴν μηχανικωτέραν πως οὖσαν [καὶ εἰς πολλὰ προβλήματα χρησιμεύουσαν τοῖς μηχανικοῖς].

4.256 ἄλλα πρότερον παραδεκτέον ἐστὶ τὸ δι' αὐτῆς δεικνύμενον πρόβλημα. Τετραγώνου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τῆς μὲν περὶ τὸ κέντρον τὸ Γ περιφερείας τῆς ΒΕΔ, τῆς δὲ ΒΗΘ τετραγωνιζούσης γινομένης, ὡς προεῖρηται, δεικνύται, ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΘ εὐθεῖαν. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν, ἦτοι πρὸς μείζονα ἔσται τῆς ΓΘ ἢ πρὸς ἐλάσσονα. Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τὴν ΓΚ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια ἡ ΖΗΚ γεγράφθω τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Η, καὶ κάθετος ἡ ΗΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ, τουτέστιν ἡ ΓΔ, πρὸς τὴν ΓΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗΚ περιφέρειαν (ὡς γὰρ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν), φανερόν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ. καὶ ἐπειδὴ διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΛ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗΚ πρὸς τὴν ΗΚ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΒΓ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΛ. καὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΚ περιφέρεια τῇ ΗΛ εὐθείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς μείζονα τῆς ΓΘ. λβ'. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὴν ΚΓ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΖΜΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἡ ΚΗ τέμνουσα τὴν τετραγωνίζουσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε.

4.258 ὁμοίως δὲ τοῖς προγεγραμμένοις δείξομεν καὶ τὴν ΖΜΚ περιφέρειαν τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἴσην, καὶ ὡς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστιν ὡς τὴν ΖΜΚ πρὸς τὴν ΜΚ, οὕτως τὴν ΒΓ εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΗΚ. ἐξ ὧν φανερόν ὅτι ἴση ἔσται ἡ ΜΚ περιφέρεια τῇ ΚΗ εὐθείᾳ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΓΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα· πρὸς αὐτὴν ἄρα τὴν ΓΘ. Ἐστὶ δὲ καὶ τοῦτο φανερόν ὅτι ἡ τῶν ΘΓ ΓΒ εὐθειῶν τρίτη ἀνάλογον λαμβανομένη εὐθεῖα ἴση ἔσται τῇ ΒΕΔ περιφερείᾳ, καὶ ἡ τετραπλασίῳ αὐτῆς τῇ τοῦ ὅλου κύκλου περιφερείᾳ. εὐρημένης δὲ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσης εὐθείας πρόδηλον ὡς δὴ καὶ αὐτῷ τῷ κύκλῳ ῥάδιον ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι· τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν. λγ'. Αὕτη μὲν οὖν ἡ γένεσις τῆς γραμμῆς ἐστὶν, ὡς εἴρηται, μηχανικωτέρα, γεωμετρικῶς δὲ διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις τόπων ἀναλύεσθαι δύναται τὸν τρόπον τοῦτον. θέσει κύκλου τεταρτημόριον τὸ ΑΒΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΒΔ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΕΖ λόγον ἔχουσα δοθέντα πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν· ὅτι πρὸς γραμμὴν τὸ Ε.

4.260 Νοεῖσθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, καὶ ἐν αὐτῇ ἔλιξ γεγραμμένη δεδομένη τῇ θέσει ἡ ΓΗΘ, καὶ πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΘΔ, καὶ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθαὶ ἦχθωσαν αἱ ΕΙ ΒΛ [ἀνεσταμέναι ὀρθαί], διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ λόγος τῆς ΕΙ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν ἐστὶν δοθεὶς διὰ τὴν ἔλικα, δοθεὶς δὲ καὶ ὁ τῆς ΕΖ λόγος πρὸς τὴν ΔΓ, ἔσται καὶ τῆς ΕΖ πρὸς ΕΙ λόγος δοθεὶς. καὶ εἰσὶν αἱ ΖΕ ΕΙ παρὰ θέσει· καὶ ἡ ΖΙ ἄρα ἐπιζευχθεῖσα παρὰ θέσει. καὶ ἔστιν κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἐν τέμνοντι ἄρα ἐπιπέδῳ ἡ ΖΙ, ὥστε καὶ τὸ Ι. ἔστιν δὲ καὶ ἐν κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ (φέρεται γὰρ ἡ ΘΛ διὰ τε τῆς ΘΗΓ ἔλικος καὶ τῆς ΛΒ εὐθείας καὶ αὐτῆς τῇ θέσει δεδομένης αἰεὶ παράλληλος οὔσα. τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ)· πρὸς γραμμὴν ἄρα τὸ Ι, ὥστε καὶ τὸ Ε. τοῦτο μὲν οὖν ἀνελύθη καθόλου, ἂν δ' ὁ τῆς ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν λόγος ὁ αὐτὸς ἦ τῷ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔΓ, ἡ προειρημένη τετραγωνίζουσα γίνεται γραμμὴ.

4.262 λδ'. Δύναται δὲ καὶ διὰ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένης ἔλικος ἀναλύεσθαι τὸν ὁμοιον τρόπον. ἔστω γὰρ ὁ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔΓ

περιφέρειαν, καὶ ἐν ᾧ ἡ AB εὐθεῖα περὶ τὸ B κινουμένη παροδεύει τὴν AΔΓ περιφέρειαν, σημεῖον ἐπ' αὐτῆς ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παραγινέσθω θέσιν λαβούσης τὴν ΓΒ τῆς AB, καὶ ποιείτω τὴν ΒΗΑ ἔλικά. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς ΒΗ, ἡ AΔΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ἐναλλάξ. ἀλλὰ καὶ ἡ EZ πρὸς ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ZE. ἦχθω τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΚΗ ἴση τῇ ΒΗ· ἐν κυλινδροειδεῖ ἄρα ἐπιφανείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς ἔλικος τὸ Κ. ἀλλὰ καὶ ἐν κωνικῇ (ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΒΚ ἐν κωνικῇ γίνεται ἐπιφανείᾳ ἡμίσειαν ὀρθῆς κεκλιμένη πρὸς τὸ ὑποκείμενον καὶ ἡγμένη διὰ δοθέντος τοῦ Β)· πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Κ. ἦχθω διὰ τοῦ Κ τῇ EB παράλληλος ἡ ΛΚΙ, καὶ ὀρθαὶ τῷ ἐπιπέδῳ αἱ ΒΛ ΕΙ· ἐν πλεκτοειδεῖ ἄρα ἐπιφανείᾳ ἡ ΛΚΙ (φέρεται γὰρ διὰ τε τῆς ΒΛ εὐθείας θέσει οὔσης καὶ διὰ θέσει γραμμῆς πρὸς ἣ τὸ Κ)· καὶ τὸ Ι ἄρα ἐν ἐπιφανείᾳ. ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιπέδῳ (ἴση γὰρ ἡ ZE τῇ ΕΙ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΒΗ, καὶ γίνεται παρὰ θέσει ἡ ΖΙ κάθετος οὔσα ἐπὶ τὴν ΒΓ)· πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Ι, ὥστε καὶ τὸ Ε.

4.264 καὶ δῆλον ὅτι, ἂν ὀρθὴ ἡ ἢ ὑπὸ ABΓ γωνία, ἡ προειρημένη τετραγωνίζουσα γραμμὴ γίνεται. λε'. Ὡς περ ἐν ἐπιπέδῳ νοεῖται γινομένη τις ἔλιξ φερομένου σημείου κατ' εὐθείας κύκλον περιγραφούσης, καὶ ἐπὶ στερεῶν φερομένου σημείου κατὰ μιᾶς πλευρᾶς τιν' ἐπιφάνειαν περιγραφούσης, οὕτως δὴ καὶ ἐπὶ σφαίρας ἔλικά νοεῖν ἀκόλουθόν ἐστι γραφομένην τὸν τρόπον τοῦτον. Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΚΛΜ περὶ πόλον τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ μεγίστου κύκλου τεταρτημόριον γεγράφθω τὸ ΘΝΚ, καὶ ἡ μὲν ΘΝΚ περιφέρεια, περὶ τὸ Θ μένον φερομένη κατὰ τῆς ἐπιφανείας ὡς ἐπὶ τὰ Λ Μ μέρη, ἀποκαθιστάσθω πάλιν ἐπὶ τὸ αὐτό, σημεῖον δέ τι φερόμενον ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Κ παραγινέσθω· γράφει δὴ τινα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἔλικά, οἷα ἐστὶν ἡ ΘΟΙΚ, καὶ ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ Θ γραφῇ μεγίστου κύκλου περιφέρεια, πρὸς τὴν ΚΛ περιφέρειαν λόγον ἔχει ὅν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΟ· λέγω δὴ ὅτι, ἂν ἐκτεθῇ τεταρτημόριον τοῦ μεγίστου ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου τὸ ABΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΓΑ, γίνεται ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ΘΟΙΚ ἔλικος καὶ τῆς ΚΝΘ περιφερείας ἀπολαμβανομένην ἐπιφάνειαν, οὕτως ὁ ABΓΔ τομεὺς πρὸς τὸ ABΓ τμήμα. Ἦχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἡ ΓΖ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ διὰ τοῦ Α γεγράφθω περιφέρεια ἡ ΑΕΖ ἴσος ἄρα ὁ ABΓΔ τομεὺς τῷ ΑΕΖΓ (διπλασία μὲν γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΖ, ἥμισυ δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ τοῦ ἀπὸ ΑΓ)· ὅτι ἄρα καὶ ὡς αἱ εἰρημέναι ἐπιφάνειαι πρὸς ἀλλήλας, οὕτως ὁ ΑΕΖΓ τομεὺς πρὸς τὸ ABΓ τμήμα.

4.266 ἔστω, ὃ μέρος ἡ ΚΛ περιφέρεια τῆς ὅλης τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τὸ αὐτὸ μέρος περιφέρεια ἡ ZE τῆς ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ABΓ τὸ αὐτὸ μέρος, ὃ δὲ μέρος ἡ ΚΛ τῆς ὅλης περιφερείας, τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ΘΟ τῆς ΘΟΛ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΟΛ τῇ ABΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΒΓ. γεγράφθω περὶ πόλον τὸν Θ διὰ τοῦ Ο περιφέρεια ἡ ΟΝ, καὶ διὰ τοῦ Β περὶ τὸ Γ κέντρον ἡ ΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΛΚΘ σφαιρική ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ΟΘΝ, ἡ ὅλη τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν οὗ ἡ ἐκ τοῦ πόλου ἐστὶν ἡ ΘΟ, ὡς δ' ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ τμήματος ἐπιφάνειαν, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς τὰ Θ Λ ἐπιζευγνυούσης εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Θ Ο, ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς ὁ ΚΛΘ τομεὺς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ πρὸς τὸν ΟΘΝ, οὕτως ὁ ΕΖΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΒΗΓ.

4.268 ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ ὡς πάντες οἱ ἐν τῷ ἡμισφαιρίῳ τομεῖς οἱ ἴσοι τῷ ΚΛΘ, οἱ εἰσὶν ἡ ὅλη τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια, πρὸς τοὺς περιγραφομένους περὶ τὴν ἔλικά τομέας ὁμοταγεῖς τῷ ΟΘΝ, οὕτως πάντες οἱ ἐν τῷ ΑΖΓ τομεῖς οἱ ἴσοι τῷ ΕΖΓ, τουτέστιν ὅλος ὁ ΑΖΓ τομεὺς, πρὸς τοὺς περιγραφομένους περὶ τὸ ABΓ τμήμα τοὺς ὁμοταγεῖς τῷ ΓΒΗ. τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τοὺς ἐγγραφομένους τῇ ἔλικι τομέας, οὕτως ὁ ΑΖΓ τομεὺς πρὸς τοὺς ἐγγραφομένους τῷ ABΓ τμήματι τομέας, ὥστε καὶ ὡς ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ὑπὸ τῆς ἔλικος ἀπολαμβανομένην ἐπιφάνειαν, οὕτως ὁ ΑΖΓ τομεὺς,

τουτέστιν τὸ ΑΒΓΔ τεταρτημόριον, πρὸς τὸ ΑΒΓ τμήμα. συνάγεται δὲ διὰ τούτου ἢ μὲν ἀπὸ τῆς ἑλικος ἀπολαμβανομένη ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ΘΝΚ περιφέρειαν ὀκταπλασία τοῦ ΑΒΓ τμήματος (ἐπεὶ καὶ ἡ τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια τοῦ ΑΒΓΔ τομέως), ἢ δὲ μεταξὺ τῆς ἑλικος καὶ τῆς βάσεως τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφάνεια ὀκταπλασία τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, τουτέστιν ἴση τῷ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τετραγώνῳ. λζ'.

4.270 Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον εἰς τρία ἴσα τεμεῖν οἱ παλαιοὶ γεωμέτραι θελήσαντες ἠπόρησαν δι' αἰτίαν τοιαύτην. τρία γένη φαμέν εἶναι τῶν ἐν γεωμετρῷ προβλημάτων, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἐπίπεδα καλεῖσθαι, τὰ δὲ στερεά, τὰ δὲ γραμμικά. τὰ μὲν οὖν δι' εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας δυνάμενα λύεσθαι λέγοιτ' ἂν εἰκότως ἐπίπεδα· καὶ γὰρ αἱ γραμμαὶ δι' ὧν εὐρίσκεται τὰ τοιαῦτα προβλήματα τὴν γένεσιν ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ὅσα δὲ λύεται προβλήματα παραλαμβανομένης εἰς τὴν εὐρεσιν μιᾶς τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ καὶ πλειόνων, στερεὰ ταῦτα κέκληται· πρὸς γὰρ τὴν κατασκευὴν χρήσασθαι στερεῶν σχημάτων ἐπιφανείαις, λέγω δὲ ταῖς κωνικαῖς, ἀναγκαῖον. τρίτον δέ τι προβλημάτων ὑπολείπεται γένος τὸ καλούμενον γραμμικόν· γραμμαὶ γὰρ ἔτεροι παρὰ τὰς εἰρημένας εἰς τὴν κατασκευὴν λαμβάνονται ποικιλωτέραν ἔχουσαι τὴν γένεσιν καὶ βεβιασμένην μᾶλλον, ἐξ ἀτακτοτέρων ἐπιφανειῶν καὶ κινήσεων ἐπιπεπλεγμένων γεννώμεναι. τοιαῦται δὲ εἰσιν αἱ τε ἐν τοῖς πρὸς ἐπιφανείαις καλουμένοις τόποις εὐρισκόμεναι γραμμαὶ ἕτεραί τε τούτων ποικιλώτεροι καὶ πολλοὶ τὸ πλῆθος ὑπὸ Δημητρίου τοῦ Ἀλεξανδρέως ἐν ταῖς γραμμικαῖς ἐπιστάσεσι καὶ Φίλωνος τοῦ Τυανέως ἐξ ἐπιπλοκῆς πλεκτοειδῶν τε καὶ ἐτέρων παντοίων ἐπιφανειῶν εὐρισκόμεναι πολλὰ καὶ θαυμαστὰ συμπτώματα περὶ αὐτὰς ἔχουσαι. καὶ τινες αὐτῶν ὑπὸ τῶν νεωτέρων ἠξιώθησαν λόγου πλείονος, μία δέ τις ἐξ αὐτῶν ἐστὶν ἢ καὶ παράδοξος ὑπὸ τοῦ Μενελάου κληθεῖσα γραμμὴ. τοῦ δὲ αὐτοῦ γένους ἔτεροι ἑλικεῖς εἰσιν τετραγωνίζουσαι τε καὶ κοχλοειδεῖς καὶ κισσοειδεῖς. δοκεῖ δὲ πως ἀμάρτημα τὸ τοιοῦτον οὐ μικρὸν εἶναι τοῖς γεωμέτραις, ὅταν ἐπίπεδον πρόβλημα διὰ τῶν κωνικῶν ἢ τῶν γραμμικῶν ὑπὸ τινος εὐρίσκηται, καὶ τὸ σύνολον ὅταν ἐξ ἀνοικείου λύηται γένους, οἷόν ἐστιν τὸ ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς πρόβλημα καὶ ἡ ἐν τῷ περὶ τῆς ἑλικος ὑπὸ Ἀρχιμήδους λαμβανομένη στερεοῦ νεῦσις ἐπὶ κύκλῳ· μηδενὶ γὰρ προσχρώμενον στερεῶν δυνατὸν εὐρεῖν τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον θεώρημα, λέγω δὴ τὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ κύκλου ἴσην ἀποδείξει τῇ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη εὐθείᾳ τῇ ἐκ τῆς γενέσεως ἕως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἑλικος.

4.272 τοιαύτης δὴ τῆς διαφορᾶς τῶν προβλημάτων ὑπαρχούσης οἱ πρότεροι γεωμέτραι τὸ προειρημένον ἐπὶ τῆς γωνίας πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον διὰ τῶν ἐπιπέδων ζητοῦντες οὐχ οἷοί τ' ἦσαν εὐρίσκειν· οὐδέπω γὰρ αἱ τοῦ κώνου τομαὶ συνήθεις ἦσαν αὐτοῖς, καὶ διὰ τοῦτο ἠπόρησαν ὕστερον μέντοι διὰ τῶν κωνικῶν ἐτριχοτόμησαν τὴν γωνίαν εἰς τὴν εὐρεσιν χρῆσάμενοι τῇ ὑπογεγραμμένην νεύσει. Παραλληλογράμμου δοθέντος ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓΔ καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΒΓ, δέον ἔστω διαγαγόντα τὴν ΑΕ ποιεῖν τὴν ΕΖ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ. Γεγονέτω, καὶ ταῖς ΕΖ ΕΔ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΔΗ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστὶν ἡ ΖΕ καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΔΗ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΗ. καὶ δοθέν τὸ Δ· τὸ Η ἄρα πρὸς θέσει κύκλου περιφέρειᾳ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓΔ δοθέν καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΖ ΕΔ, δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΖ ΕΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΖΗ· τὸ Η ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ.

4.274 ἀλλὰ καὶ πρὸς θέσει κύκλου περιφερείᾳ· δοθέν ἄρα τὸ Η. λζ'. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως, ἔστω τὸ δοθέν παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἢ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα τῷ μεγέθει ἡ Μ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔστω ἡ ΔΚ, καὶ γεγράφθω διὰ μὲν τοῦ Δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒΓ ὑπερβολὴ ἡ ΔΗΘ (τοῦτο γὰρ ἐξῆς ἀποδείξομεν), διὰ δὲ τοῦ Κ περὶ κέντρον τὸ Δ κύκλου περιφέρεια ἡ ΚΗ τέμνουσα τὴν ὑπερβολὴν κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΓ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΗΖ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἴση ἐστὶν τῇ Μ. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΔ καὶ τῇ ΚΑ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΛ· τὸ ἄρα

ὑπὸ ΖΗΛ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΖΗ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΔΑ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΒΓ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΖΗ· ἡ ἄρα ΕΔ ἴση τῇ ΖΗ· παραλληλόγραμμοι ἄρα τὸ ΔΕΖΗ· ἴση ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΔΗ, τουτέστιν τῇ ΔΚ, τουτέστιν τῇ Μ. λη'. Δεδειγμένου δὴ τούτου τρίχα τέμνεται ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος οὕτως. Ἔστω γὰρ ὀξεῖα πρότερον ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου κάθετος ἡ ΑΓ, καὶ συμπληρωθέντος τοῦ ΓΖ παραλληλογράμμου ἡ ΖΑ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ παραλληλογράμμου ὄντος ὀρθογωνίου τοῦ ΓΖ κείσθω μεταξὺ τῶν ΕΑΓ εὐθεία ἡ ΕΔ νεύουσα ἐπὶ τὸ Β ἴση τῇ διπλασίᾳ τῆς ΑΒ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν γενέσθαι προέγγραπται)· λέγω δὴ ὅτι τῆς δοθείσης γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ τρίτον μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ.

4.276 Τετμήσθω γὰρ ἡ ΕΔ δίχα τῷ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ ΗΑ ΗΕ ἴσαι εἰσὶν· διπλῇ ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΑΗ. ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΒ διπλῇ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΗ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΔ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ διπλασία τῆς ὑπὸ ΑΕΔ, τουτέστιν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἄρα διπλῇ ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ. καὶ ἐὰν τὴν ὑπὸ ΑΒΔ δίχα τέμωμεν, ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τρίχα τετμημένη. λθ'. Ἐὰν δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθὴ τυγχάνῃ, ἀπολαβόντες τινὰ τὴν ΒΓ ἰσοπλευρον ἐπ' αὐτῆς γράψομεν τὸ ΒΔΓ, καὶ τὴν ὑπὸ ΔΒΓ γωνίαν δίχα τεμόντες ἔξομεν τρίχα τετμημένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν. μ'. Ἔστω δὲ ἀμβλεῖα ἡ γωνία καὶ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΔΒΓ τρίτον ἀπειλήφθω μέρος ἡ ὑπὸ ΔΒΖ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ὀξείας γωνίας τρίτον ἡ ὑπὸ ΕΒΔ (ταῦτα γὰρ ἡμῖν προδεδείκται)· καὶ ὅλης ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τρίτον μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΖ. ἐὰν δὲ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ ἴσην συστησώμεθα πρὸς ἐκατέραν τῶν ΑΒΓ, τρίχα τεμοῦμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. μα'. Τὸ δὲ ὑπερτεθὲν πρόβλημα νῦν ἀναλύσομεν. θέσει οὐσῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ καὶ δοθέντος σημείου τοῦ Δ γράψαι διὰ τοῦ Δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒΓ ὑπερβολήν.

4.278 Γεγονέτω, καὶ γεγράφθω ἡ ΕΔΖ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ ΑΔΓ, καὶ διάμετρος ἡ ΗΒΔ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΘ. θέσει ἄρα αἱ ΗΔ ΔΘ, καὶ δοθὲν τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒΓ τῆς ὑπερβολῆς, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, καὶ τὸ ἀφ' ἐκατέρας αὐτῶν τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΗΔ εἵδους· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ δευτέρῳ τῶν κωνικῶν ἀποδεδείκται. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ, ἴση καὶ ἡ ΒΘ τῇ ΘΑ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΑ. καὶ δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΔΓ. καὶ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἡ ΑΓ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ δοθὲν ἐστὶν. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ πρὸς τῇ ΗΔ εἶδει· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ πρὸς τῇ ΗΔ εἶδος. καὶ δοθεῖσα ἡ ΗΔ (διπλῇ γάρ ἐστὶν τῆς ΒΔ τῷ μεγέθει δεδομένης διὰ τὸ δοθὲν ἐκάτερον εἶναι τῶν Β Δ)· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὀρθία τοῦ εἵδους πλευρά. γέγονεν δὴ πρόβλημα τοιοῦτον· θέσει καὶ μεγέθει δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῆς τε ΗΔ καὶ τῆς ὀρθίας γράψαι περὶ διάμετρον τὴν ΗΔ ὑπερβολήν, ἥς παρ' ἣν δύνανται ἔσται ἡ λοιπὴ εὐθεῖα, καὶ αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΗΔ παράλληλοι ἔσσονται θέσει τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΑΓ.

4.280 τοῦτο δὲ ἀναλέλνται ἐν τῷ πρώτῳ τῶν κωνικῶν. μβ'. Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, καὶ τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΘ, τῇ δὲ ΒΘ ἴση ἡ ΘΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΒΔ ἐκβεβλήσθω καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΒΗ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῆς ΗΔ καὶ ἐτέρας τινὸς τῆς Κ, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ΗΔ καὶ ὀρθίαν τὴν Κ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΕΔΖ, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΗΔ παραλλήλους εἶναι τῇ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. καὶ ἔστιν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ ἴση (ἐπεὶ καὶ ἡ ΒΘ τῇ ΘΑ), καὶ φανερόν ὅτι τὸ ἀφ' ἐκατέρας τῶν ΑΔ ΔΓ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΗΔ εἵδους· αἱ ἄρα ΑΒΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ΕΔΖ ὑπερβολῆς· γέγραπται ἄρα διὰ τοῦ Δ περὶ τὰς δοθείσας εὐθείας ἀσυμπτώτους ὑπερβολή. μγ'. Καὶ ἄλλως τῆς δοθείσης περιφερείας τὸ τρίτον ἀφαιρεῖται μέρος, χωρὶς τῆς νεύσεως, διὰ στερεοῦ τόπου τοιούτου. θέσει ἡ διὰ τῶν Α Γ, καὶ ἀπὸ δοθέντων ἐπ' αὐτῆς τῶν Α Γ κεκλάσθω ἡ ΑΒΓ διπλασίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΑΓΒ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΓΑΒ· ὅτι τὸ Β πρὸς ὑπερβολῇ.

- 4.282 Ὡχθω κάθετος ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΔΕ· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΒΕ ἴση ἔσται τῇ ΑΕ. κείσθω καὶ τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· τριπλασία ἄρα ἡ ΓΖ τῆς ΓΔ. ἔστω καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΗ τριπλασία· ἔσται δὴ δοθέν τὸ Η, καὶ λοιπὴ ἡ ΑΖ τῆς ΗΔ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ ΒΕ ΕΖ ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΑ ΑΖ τῶν αὐτῶν ὑπεροχὴ, ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΑΖ, τουτέστιν τὸ τρις ὑπὸ ΑΔΗ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΔ· πρὸς ὑπερβολῇ ἄρα τὸ Β, ἥς πλαγία μὲν τοῦ πρὸς ἄξονι εἶδους ἡ ΑΗ, ἡ δὲ ὀρθία τριπλασία τῆς ΑΗ. καὶ φανερόν ὅτι τὸ Γ σημεῖον ἀπολαμβάνει πρὸς τῇ Η κορυφῇ τῆς τομῆς τὴν ΓΗ ἡμίσειαν τῆς πλαγίας τοῦ εἶδους πλευρᾶς τῆς ΑΗ. Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά· δεήσει γὰρ τὴν ΑΓ τεμεῖν ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΗ τῆς ΗΓ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΑΗ γράψαι διὰ τοῦ Η ὑπερβολὴν, ἥς ὀρθία τοῦ εἶδους πλευρὰ τριπλασία τῆς ΑΗ, καὶ δεικνύναι ποιοῦσαν αὐτὴν τὸν εἰρημένον διπλασίον λόγον τῶν γωνιῶν. καὶ ὅτι τῆς δοθείσης κύκλου περιφερείας τὸ γ' ἀποτεμένει μέρος ἡ τοῦτον γραφομένη τὸν τρόπον ὑπερβολῇ συνιδεῖν ῥάδιον τῶν Α Γ σημείων περάτων τῆς περιφερείας ὑποκειμένων.
- 4.284 μδ'. Ἐτέρως δὲ τὴν ἀνάλυσιν τοῦ τρίχα τεμεῖν τὴν γωνίαν ἢ περιφέρειαν ἐξέθεντό τινες ἄνευ τῆς νεύσεως. ἔστω δὲ ἐπὶ περιφερείας ὁ λόγος· οὐδὲν γὰρ διαφέρει γωνίαν ἢ περιφέρειαν τεμεῖν. Γεγονέτω δὴ, καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας τρίτον ἀπειλήφθω μέρος ἡ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΑ· διπλασίον ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ΓΔ, καὶ κάθετοι αἱ ΔΕ ΖΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· δοθέν ἄρα τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ. διπλὴ δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΕ· διπλὴ ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖΓ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν δύο δοθέντα ἐστὶν τὰ Ε Γ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΒΖ, καὶ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖΓ, τὸ Β ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ. ἀλλὰ καὶ πρὸς θέσει περιφερείᾳ· δοθέν ἄρα τὸ Β. καὶ ἡ σύνθεσις φανερά. με'. Τὸ μὲν οὖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν τρίχα τεμεῖν στερεόν ἐστὶν, ὡς προδεδείκται, τὸ δὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν γραμμικόν ἐστὶν καὶ δέδεικται μὲν ὑπὸ τῶν νεωτέρων, γραφήσεται δὲ καὶ ὑφ' ἡμῶν διχῶς. Ἐστω γὰρ κύκλου τοῦ ΚΛΘ περιφέρεια ἡ ΛΘ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὴν εἰς δοθέντα λόγον.
- 4.286 Ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΛΒΘ, καὶ τῇ ΒΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ γεγράφθω τετραγωνίζουσα γραμμὴ ἡ ΚΑΔΓ, καὶ κάθετος ἀχθεῖσα ἡ ΑΕ τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸν δοθέντα λόγον εἰς ὃν διελεῖν θέλομεν τὴν γωνίαν, καὶ τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΔ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΒΔ, καὶ κάθετος ἡ ΔΗ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΔΗ, τουτέστιν πρὸς ΖΕ, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΓ, διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ἡ ἀπὸ ΑΒΔ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ περιφέρεια πρὸς ΜΘ. μς'. Ἐτέρως δὲ τέμνεται κύκλου τοῦ ΑΗΓ ἡ ΑΓ περιφέρεια. ὁμοίως ἐπὶ τὸ κέντρον αἱ ΑΒΓ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Β ἔλιξ ἡ ΒΖΔΓ, ἥς ἡ ἐν τῇ γενέσει εὐθεῖα ἡ ΓΒ, καὶ τῷ δοθέντι λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε περὶ κέντρον τὸ Β κύκλου περιφέρεια ἡ ΕΖ τέμνουσα τὴν ἔλικα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΖ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἔλικα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ, τουτέστιν πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΑΗΓ περιφέρεια πρὸς ΓΗ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΗ περιφέρεια πρὸς ΗΓ.
- 4.288 ὁ δὲ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΒ λόγος ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι· καὶ ὁ τῆς ΑΗ ἄρα περιφερείας πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ δοθέντι· τέμνεται ἄρα ~ μζ'. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν ὡς δυνατόν ἐστὶν ἀπὸ δύο κύκλων ἀνίσων ἴσας περιφερείας ἀφελεῖν. Γεγονέτω γάρ, καὶ ἀφηρήσθωσαν ἴσαι αἱ ΑΗΒ ΓΘΔ, ἔστω δὲ μείζων ὁ περὶ κέντρον τὸ Ε μείζων ἄρα ἡ ὁμοία τῇ ΓΘΔ τῆς ΑΗΒ. ἔστω οὖν τῇ ΑΗΒ ὁμοία ἡ ΓΘ· λόγος ἄρα ὁ τῆς ΑΗΒ πρὸς ΓΘ δοθεὶς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστιν ταῖς ὅλαις τῶν κύκλων περιφερείαις ἢ ταῖς τῶν κύκλων διαμέτροις. ἴση δὲ ἡ ΑΗΒ τῇ ΓΘΔ· λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τῆς ΓΘΔ πρὸς τὴν ΓΘ. καὶ διελόντι. γέγονεν οὖν τέμνειν τὴν ΓΘΔ περιφέρειαν εἰς δοθέντα

λόγον κατὰ τὸ Θ· τοῦτο δὲ προγέγραπται. μη'. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν λόγον ἔχουσιν δοθέντα πρὸς τὴν λοιπὴν. Γεγονέτω, καὶ συνεστάτω τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Β διὰ τῶν Α Γ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΔΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

4.290 ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶν δοθεὶς τῆς ὑπὸ τῶν ΓΑΒ γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, καὶ ἔστιν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ, λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ γωνίας πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΔΓ, ὥστε καὶ τῆς ΔΓ περιφερείας πρὸς τὴν ΑΓ λόγος. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓΔ περιφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου εἰς δοθέντα λόγον τέτμηται, δοθέν ἐστὶν τὸ Γ, καὶ δοθέν τῷ εἶδει τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω γὰρ ὁ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔδει ἔχειν ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν πρὸς τὴν λοιπὴν, ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα τῷ Θ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΑΔΓ περὶ κέντρον τὸ Β καὶ διάμετρον τὴν ΑΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓΔ περιφέρεια κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΔΓ περιφέρειαν πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς ΖΘ (τοῦτο γὰρ προγέγραπται, καὶ καθόλου πῶς ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς δοθέντα λόγον τέμνεται), καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΓΑ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΔΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΘ, καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἐπομένων, ὡς ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΒ πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΒΓ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν λόγον ἔχουσιν τὸν δοθέντα πρὸς τὴν λοιπὴν. μθ'. Δεδειγμένου δὴ τούτου φανερόν ὡς δυνατόν ἐγγράψαι πολύγωνον εἰς κύκλον ἰσοπλευρον καὶ ἰσογώνιον πλευρὰς ἔχον ὅσας ἄν τις ἐπιτάξῃ. Πῶς δ' εὐρίσκεται κύκλος οὗ ἡ περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, συνιδεῖν εὐκολον.

4.292 Εὐρήσθω γὰρ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ τοῦ Α κύκλου περιφέρεια, καὶ ἐκκείσθω κύκλος τυχὼν ὁ Β, καὶ τῇ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἴση διὰ τῆς τετραγωνιζούσης εὐρήσθω ἡ Δ εὐθεῖα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Β. λόγος δὲ τῆς Δ πρὸς Γ· λόγος ἄρα καὶ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς ἀλλήλας. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Β· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Α, ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ Α. καὶ φανερά ἡ σύνθεσις. ν'. Εὐθείας τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης τῆς ΑΒ γράψαι διὰ τῶν Α Β κύκλου περιφέρειαν λόγον ἔχουσιν τὸν δοθέντα πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν. Γεγράφθω ἡ ΑΓΒ, καὶ ἐκκείσθω τεταρτημόριον κύκλου θέσει δεδομένον τὸ ΖΗΕ, καὶ γεγράφθω τετραγωνίζουσα ἡ ΖΘΚ, καὶ τῇ βεβηκυῖα γωνίᾳ ἐπὶ τῆς ΑΓ περιφερείας πρὸς τῇ ΖΕ περιφερείᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΕΗΛ, καὶ ἦχθωσαν κάθετοι αἱ ΛΜ ΘΝ. ἔσται οὖν διὰ τὸ ἰδίωμα τῆς γραμμῆς ὡς ἡ ΕΛΖ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗ εὐθεῖαν, τουτέστιν ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΘΝ εὐθεῖαν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΛ, ἡ ΘΝ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΕΛ περιφέρεια πρὸς τὴν ΛΜ εὐθεῖαν.

4.294 εἰλήφθω δὴ τὸ κέντρον τῆς ΑΓΒ περιφερείας τὸ Ξ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΞΡΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΞΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΗΛ. καὶ ἔστιν κέντρα τὰ Ξ Η· ὡς ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΡ εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΑΓΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΒ εὐθεῖαν. καὶ λόγος τῆς ΑΒΓ πρὸς τὴν ΑΒ· λόγος ἄρα καὶ ὁ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΚ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΗΚ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΘ· πρὸς περιφερείᾳ ἄρα τὸ Θ. ἀλλὰ καὶ πρὸς τῇ ΖΘΚ γραμμῇ· δοθέν ἄρα τὸ Θ. θέσει ἡ ΗΘΛ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΛ γωνία. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΞΑ, καὶ ἔστιν θέσει ἡ ΓΞ, καὶ δοθέν τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΞ, ὥστε καὶ ἡ ΑΓΒ περιφέρεια. Καὶ ἡ σύνθεσις φανερά. δεῖ γὰρ τῷ δοθέντι λόγῳ τὸν αὐτὸν ποιῆσαι τὸν τῆς ΔΗ πρὸς ΗΚ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Η διὰ τοῦ Δ γράψαι περιφέρειαν, καὶ λαβεῖν τὸ Θ, καθ' ὃ τέμνει τὴν τετραγωνίζουσαν, καὶ ἐπιζευῖται τὴν ΘΗ, καὶ δίχα τεμόντα τὴν ΑΒ καὶ ὀρθὴν ἀναστήσαντα τὴν ΡΞ καταγαγεῖν τὴν ΑΞ περιέχουσιν μετὰ τῆς ΕΡ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΚΗΘ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ξ διὰ τοῦ Α γράψαι κύκλου περιφέρειαν τὴν ΑΓΒ ἔχουσιν λόγον πρὸς τὴν ΑΒ βάσιν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

4.296

να'. Οὐκ ἀπίθανον δὲ οὐδὲ τὸ γωνίας ἀσύμμετρος εὐρεῖν. διὰ τούτου γὰρ καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀσύμμετροι ληφθήσονται περιφέρειαι, κἂν ῥητὴν ὑποστησώμεθα τὴν μίαν γωνίαν ἢ περιφέρειαν, ἄλογος ἢ λοιπὴ γενήσεται. Ἐκκείσθω τὸ ΑΒΓ τεταρτημόριον, καὶ ἐν αὐτῷ τετραγωνίζουσα ἡ ΑΕΔΖ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΕΗ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΒΘ ἀσύμμετρος μήκει τῇ ΒΗ, καὶ ἦχθω παράλληλος ἡ ΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ἀπὸ ΕΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΖ. Ἦχθω κάθετος ἡ ΔΝ· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν γραμμὴν ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΔΝ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΕΒΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΒΖ. ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΕΚ τῇ ΔΝ (ἐπεὶ καὶ ἡ ΗΒ τῇ ΒΘ)· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ γωνία τῇ γωνία, κἂν ῥητὴν ὑποστησώμεθα τὴν ὑπὸ ΕΒΖ γωνίαν [κἂν ἡμίσειαν ὀρθῆς], ἄλογος ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΒΖ.

4.298 νβ'. Τῆς ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ ἐλίκων βιβλίῳ λαμβανομένης νεύσεως τὴν ἀνάλυσίν σοι κατέταξα, ἵνα τὸ βιβλίον διερχόμενος [περὶ τῶν ἐλίκων] μὴ διαπορῆς. λαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὴν οἱ ὑπογεγραμμένοι τόποι καὶ πρὸς ἄλλα πολλὰ τῶν στερεῶν προβλημάτων χρήσιμοι. θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ δοθέντος σημείου τοῦ Γ προσπιπτέτω τις ἡ ΓΔ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἡ ΔΕ, ἔστω δὲ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ· ὅτι τὸ Ε πρὸς ὑπερβολῇ. Ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ πρὸς ὀρθὰς παράλληλος ἡ ΓΖ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΗ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω τῆς ΓΖ πρὸς ἐκτέραν τῶν ΖΘ ΖΚ· δοθὲν ἄρα ἐκτέρον τῶν Θ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΔ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ, πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΚΗΘ λόγος ἐστὶν δοθείς. καὶ ἔστι δοθέντα τὰ Κ Θ· τὸ Ε ἄρα πρὸς ὑπερβολῇ ἐρχομένη διὰ τῶν Θ Ε.

4.300 νγ'. Ἐστω θέσει καὶ μεγέθει δοθεῖσα ἡ ΑΒ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΓ, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΓΔ· ὅτι τὸ Δ σημεῖον ἄπτεται θέσει παραβολῆς. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα τῷ Ε, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ΕΖ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΔΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς δοθείσης καὶ τῆς ΖΗ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Ζ· τὸ ἄρα Δ σημεῖον ἄπτεται παραβολῆς κατερχομένης διὰ τῶν Α Ζ Β, ἥς ἄξων ἐστὶν ὁ ΕΖ. νδ'. Τούτων προγεγραμμένων προκειμένη προγενομένη τὸν τρόπον τοῦτον. θέσει ὄντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ καὶ θέσει ἐν αὐτῷ εὐθείας τῆς ΒΓ, καὶ δοθέντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Α, θεῖναι μεταξὺ τῆς ΒΓ εὐθείας καὶ τῆς ΒΖΓ περιφερείας ἴσην τῇ τεθείσῃ νεύουσας πρὸς τὸ Γ.

4.302 Γεγονέτω γάρ, καὶ κείσθω τῇ ΕΑ ἴση, καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΔΖ ἴση τῇ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει τὴν ΒΓ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Α προσβέβληται ἡ ΑΔ, καὶ ἴση τῇ πρὸς ὀρθὰς ἐφάρστηκεν ἡ ἀπὸ τὸ πρὸς ὑπερβολῇ (ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΖΔΕ). καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΔΖ· τὸ Ζ ἄρα πρὸς παραβολῇ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. ἀναλο..... τῷ προβλήματι χρῆται ὁ Ἀρχιμήδης πρὸς τὸ δεῖξαι κύκλου περιφερείαν ἴσην εὐθείαν. αἰτιῶνται δὲ αὐτοῦ τινες ὡς οὐ δεόντως χρησαμένου στερεῶ προβλήματι δεικνύουσιν ὡς καὶ διὰ τῶν ἐπιπέδων εὐρεῖν ἔστιν εὐθεῖαν ἴσην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ χρησάμενον τοῖς ἐπὶ τῆς ἑλίκος εἰρημένοις θεωρήμασιν. ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Ε.

5.304. (1τ) Περιέχει δὲ συγκρίσεις τῶν ἴσην περίμετρον ἔχοντων ἐπιπέδων σχημάτων πρὸς ἄλληλά τε καὶ τὸν κύκλον, καὶ συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἔχοντων στερεῶν σχημάτων πρὸς ἄλληλά τε καὶ τὴν σφαῖραν. Σοφίας καὶ μαθημάτων ἔννοιαν ἀρίστην μὲν καὶ τελειοτάτην ἀνθρώποις θεὸς ἔδωκεν, ὧ κράτιστε Μεγεθίον, ἐκ μέρους δὲ πού καὶ τῶν ἀλόγων ζῶων μοῖραν ἀπένειμνεν τισιν. ἀνθρώποις μὲν οὖν ἅτε λογικοῖς οὖσι τὸ μετὰ λόγου καὶ ἀποδείξεως παρέσχεεν ἕκαστα ποιεῖν, τοῖς δὲ λοιποῖς ζώοις ἄνευ λόγου τὸ χρήσιμον καὶ βιωφελὲς αὐτὸ μόνον κατὰ τινὰ φυσικὴν πρόνοιαν ἐκάστοις ἔχειν ἔδωκ' ἔστω. τοῦτο δὲ μάθοι τις ἂν ὑπάρχον καὶ ἐν ἑτέροις μὲν πλείστοις γένεσιν τῶν ζώων, οὐχ ἥκιστα δὲ κἂν ταῖς μελίσσαις ἢ τε γὰρ εὐταξία καὶ πρὸς τὰς

ήγουμένης τῆς ἐν αὐταῖς πολιτείας εὐπείθεια θαυμαστή τις, ἥ τε φιλοτιμία καὶ καθαριότης ἡ περὶ τὴν τοῦ μέλιτος συναγωγὴν καὶ ἡ περὶ τὴν φυλακὴν αὐτοῦ πρόνοια καὶ οἰκονομία πολὺ μᾶλλον θαυμασιωτέρα. πεπιστευμένοι γὰρ, ὡς εἰκός, παρὰ θεῶν κομίζειν τοῖς τῶν ἀνθρώπων μουσικοῖς τῆς ἀμβροσίας ἀπόμοιράν τινα ταύτην οὐ μάτην ἔκχεϊν εἰς γῆν καὶ ξύλον ἢ τινα ἑτέραν ἀσχήμονα καὶ ἄτακτον ὕλην ἠξίωσαν, ἀλλ' ἐκ τῶν ἡδίστων ἐπὶ γῆς φυομένων ἀνθέων συνάγουσαι τὰ κάλλιστα κατασκευάζουσιν ἐκ τούτων εἰς τὴν τοῦ μέλιτος ὑποδοχὴν ἀγγεῖα τὰ καλούμενα κηρία πάντα μὲν ἀλλήλοις ἴσα καὶ ὅμοια καὶ παρακείμενα, τῷ δὲ σχήματι ἐξάγωνα. τοῦτο δ' ὅτι κατὰ τινα γεωμετρικὴν μηχανῶνται πρόνοιαν οὕτως ἂν μάθοιμεν. πάντως μὲν γὰρ ὦντο δεῖν τὰ σχήματα παρακεῖσθαι τε ἀλλήλοις καὶ κοινωνεῖν κατὰ τὰς πλευράς, ἵνα μὴ τοῖς μεταξὺ παραπληρώμασιν ἐμπίπτοντά τινα ἕτερα λυμῆνται αὐτῶν τὰ ἔργα.

5.306 τρία δὲ σχήματα εὐθύγραμμα τὸ προκείμενον ἐπιτελεῖν ἐδύνατο, λέγω δὲ τεταγμένα τὰ ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια, τὰ δ' ἀνόμοια ταῖς μελίσσαις οὐκ ἤρρεσεν. τὰ μὲν οὖν ἰσόπλευρα τρίγωνα καὶ τετράγωνα καὶ τὰ ἐξάγωνα χωρὶς ἀνομοίων παραπληρωμάτων ἀλλήλοις δύναται παρακείμενα τὰς πλευράς κοινὰς ἔχειν [ταῦτα γὰρ δύναται συμπληροῦν ἐξ αὐτῶν τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, ἐτέρῳ δὲ τεταγμένῳ σχήματι τοῦτο ποιεῖν ἀδύνατον]. ὁ γὰρ περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπος ὑπὸ ζ' μὲν τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ διὰ ζ' γωνιῶν, ὧν ἐκάστη διμοῖρου ἐστὶν ὀρθῆς, συμπληροῦται, τεσσάρων δὲ τετραγώνων καὶ δ' ὀρθῶν γωνιῶν [αὐτοῦ], τριῶν δὲ ἐξαγώνων καὶ ἐξαγώνου γωνιῶν τριῶν, ὧν ἐκάστη α' γ' ἐστὶν ὀρθῆς. πεντάγωνα δὲ τὰ τρία μὲν οὐ φθάνει συμπληρῶσαι τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, ὑπερβάλλει δὲ τὰ τέσσαρα· τρεῖς μὲν γὰρ τοῦ πενταγώνου γωνίαι δ' ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν (ἐκάστη γὰρ γωνία μιᾶς καὶ ε' ἐστὶν ὀρθῆς), τέσσαρες δὲ γωνίαι μείζους τῶν τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπτάγωνα δὲ οὐδὲ τρία περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον δύναται τίθεσθαι κατὰ τὰς πλευράς ἀλλήλοις παρακείμενα· τρεῖς γὰρ ἐπταγώνου γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζονες (ἐκάστη γὰρ ἐστὶν μιᾶς ὀρθῆς καὶ τριῶν ἐβδόμων). ἔτι δὲ μᾶλλον ἐπὶ τῶν πολυγωνοτέρων ὁ αὐτὸς ἐφαρμόσαι δυνήσεται λόγος. ὄντων δὲ οὖν τριῶν σχημάτων τῶν ἐξ αὐτῶν δυναμένων συμπληρῶσαι τὸν περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τόπον, τριγώνου τε καὶ τετραγώνου καὶ ἐξαγώνου, τὸ πολυγωνότερον εἴλαντο διὰ τὴν σοφίαν αἱ μέλισσαι πρὸς τὴν παρασκευὴν, ἅτε καὶ πλεῖον ἐκατέρου τῶν λοιπῶν αὐτὸ χωρεῖν ὑπολαμβάνουσαι μέλι. Καὶ αἱ μέλισσαι μὲν τὸ χρησιμὸν αὐταῖς ἐπίστανται μόνον τοῦθ' ὅτι τὸ ἐξάγωνον τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ τριγώνου μείζον ἐστὶν καὶ χωρῆσαι δύναται πλεῖον μέλι τῆς ἴσης εἰς τὴν ἐκάστου κατασκευὴν ἀναλίσκομένης ὕλης, ἡμεῖς δὲ πλεόν τῶν μελισσῶν σοφίας μέρος ἔχειν ὑπισχνούμενοι ζητήσομεν τι καὶ περισσότερον.

5.308 τῶν γὰρ ἴσην ἐχόντων περίμετρον ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογώνιων ἐπιπέδων σχημάτων μείζον ἐστὶν αἰεὶ τὸ πολυγωνότερον, μέγιστος δ' ἐν πᾶσιν ὁ κύκλος, ὅταν ἴσην αὐτοῖς περίμετρον ἔχη. δεῖξομεν δὲ πρότερον ὅτι τῶν ἀνισοπληθεῖς μὲν ἐχόντων τὰς γωνίας τεταγμένων πολυγώνων, τὴν δὲ περίμετρον ἴσην, τὸ πολυγωνότερον αἰεὶ καὶ μείζον ἐστὶν. α'. Ἐστω δύο πολύγωνα ἰσόπλευρά τε καὶ ἰσογώνια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι μὲν αὐτῶν αἱ περίμετροι, πολυγωνότερον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ μείζον τοῦ ΓΑΒ. Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν περιγραφομένων αὐτοῖς κύκλων τὰ Η Θ, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΗΓ ΘΔ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν πολυγωνότερόν ἐστὶν τὸ ΕΔΖ τοῦ ΑΒΓ, πλεονάκεις ἢ ΔΖ τὴν τοῦ ΔΕΖ πολυγώνου καταμετρεῖ περίμετρον ἢ περὶ ἢ ΑΓ τὴν τοῦ ΑΒΓ· μείζων ἄρα ἢ ΑΓ τῆς ΔΖ (ἴσαι γὰρ ὑπόκεινται αἱ περίμετροι), ὥστε καὶ ἡ ΑΚ μείζων τῆς ΔΛ (ἡμίσεια γὰρ ἐκατέρα ἐκατέρας). κείσθω τῇ ΔΛ ἴση ἡ ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΗ. καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ΑΓ εὐθεῖα τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ γωνία τεσσάρων ὀρθῶν (ἐπειδὴ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ πολύγωνον), ὁμοίως δὲ καί, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς τοῦ ΔΕΖ περιμέτρου, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΖ γωνία τεσσάρων ὀρθῶν, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ περίμετροι ἀλλήλαις καὶ

αὶ δ' ὀρθαὶ ταῖς δ' ὀρθαῖς, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒΓ περίμετρον, οὕτως ἡ Η γωνία πρὸς δ' ὀρθάς. ὡς δὲ ἡ περίμετρος τοῦ ΔΕΖ, τουτέστιν τοῦ ΑΒΓ, πρὸς τὴν ΔΖ, αὶ δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΖ γωνίαν· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΛΔ, τουτέστιν πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΛ.

5.310 ἡ δὲ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΜ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ (τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικά λήμμασιν δέδεικται)· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΜΗΚ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΗΚ τῆς ὑπὸ ΔΘΛ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Κ ὀρθὴ ἴση τῇ πρὸς τῷ Λ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΜΚ τῆς ὑπὸ ΘΔΛ ἐλάσσων. ἔστω τῇ ὑπὸ ΘΔΛ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΜΝ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΛ τῇ ΚΜ· καὶ ἡ ΛΘ ἄρα τῇ ΚΝ ἴση ἐστίν· μείζων ἄρα ἡ ΘΛ τῆς ΚΗ. ἴσαι δὲ αἱ περίμετροι· μείζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΘ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΔΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τοῦ ὑπὸ τῆς ΚΗ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ. καὶ ἔστιν τῶν εἰρημένων χωρίων ἡμίση τὰ πολύγωνα· μείζον ἄρα τὸ ΔΕΖ πολύγωνον τοῦ ΑΒΓ. [τὸ γὰρ ὕψος ἴσον ἐστὶ τῆς περιμέτρου τῆς αὐτῆς οὔσης τῶν δύο εὐθυγράμμων, καὶ αἱ βάσεις ἄνισοι αἱ ΘΛ ΗΚ, καὶ ὡς ἡ ΘΛ βάσις πρὸς τὴν ΗΚ βάσιν, οὕτως τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ ΘΛ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΔΕΖ πολυγώνου πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ. καὶ τὰ ἡμίση πολύγωνα ἄνισα, ὥστε μείζον τὸ ΔΕΖ τοῦ ΑΒΓ.] β'. Ἔστω πάλιν τὸ πολύγωνον τὸ ΑΒΓ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἴσην ἔχον τὴν περίμετρον τῇ τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείᾳ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ὁ ΔΕΖ κύκλος τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου. Εἰλήφθω τοῦ μὲν ΔΕΖ κύκλου κέντρον τὸ Θ, τοῦ δὲ περὶ τὸ ΑΒΓ πολύγωνον περιγραφομένου κύκλου κέντρον τὸ Η, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον ὅμοιον τῷ ΑΒΓ τὸ ΛΜΝΞΟ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΔ, καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΗΚ.

5.312 ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ΛΜΝΞΟ πολυγώνου περίμετρος τῆς τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείας, ὡς ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδει υπόκειται [διὰ τὸ περιέχειν αὐτήν], ἡ δὲ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρῳ, καὶ ἡ τοῦ ΛΜΝΞΟ πολυγώνου περίμετρος μείζων τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ πολύγωνα· μείζων ἄρα ἡ ΛΔ τῆς ΑΚ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ ΑΗΚ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ τριγώνῳ (καὶ γὰρ τὰ ὅλα πολύγωνα ὅμοιά ἐστι)· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΔ τῆς ΗΚ. ἴση δὲ ἡ τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφέρεια τῇ τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρῳ· μείζον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΔΘ καὶ τῆς τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφερείας τοῦ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῆς ΔΘ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας διπλάσιον τοῦ ΔΕΖ κύκλου (καὶ τοῦτο γὰρ ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας δέδεικται), τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΗΚ καὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου περιμέτρου διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου, καὶ τὰ ἡμίση· μείζων ἄρα ὁ κύκλος τοῦ ΑΒΓ πολυγώνου. γ'. Ὅτι μὲν οὖν τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύκλου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, οὐδὲν δὲ ἥττον καὶ ἐξῆς δειχθήσεται τοῦτο πρὸς τὸ μὴ δεῖσθαι τοῦ Ἀρχιμηδείου συντάγματος ἔνεκεν μόνου τοῦ θεωρήματος τούτου.

5.314 Ἔστω γὰρ κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἡμισυ ἔστω τὸ Ζ χωρίον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶν τὸ Ζ χωρίον τῷ ΑΒΓΔ κύκλῳ. Ἔστω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἀκολούθως τῇ ἀγωγῇ τῇ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶν στοιχείων ἐγγράψαι εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ ἐγγραφέν πολύγωνον μείζον εἶναι τοῦ Ζ χωρίου, εἰ πρότερον ἐγγραφείη τετράγωνον εἰς τὸν κύκλον καὶ αἱ περιφέρειαι τῶν περιλειπομένων τμημάτων αἰεὶ δίχα τέμνονται, μέχρις ἂν λειφθεῖν τινὰ τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τῆς ὑπεροχῆς ἣ ὑπέρχει ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Ζ χωρίου. ἐγγεγράφθω, καὶ ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἤχθω ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ ὁποσαγώνου, ἡ δ' ἐκ τοῦ κέντρου μείζων τῆς ΗΘ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου

καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μεῖζόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου καὶ τῆς ΗΘ. καὶ τὰ ἡμίση· μεῖζον ἄρα τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον· οὐκ ἄρα μεῖζον ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Ζ χωρίου. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάσσων· δυνατόν ἄρα περιγράψαι περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὸ Ζ χωρίον μεῖζον εἶναι τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, εἰ πρότερον τετράγωνον περιγραφεῖν περὶ τὸν κύκλον καὶ δίχα ἀεὶ τεμνομένων τῶν ἀπολειπομένων περιφερειῶν ἄγοιντο ἐφαπτόμεναι, μέχρις ἂν ἀπολειφθῇ τινα τμήματα τῶν ἐκτὸς σχημάτων, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ἣ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν [ἀνάγκη] γενέσθαι δέδεικται.

5.316 περιγεγράφθω οὖν, ὡς εἴρηται, τὸ πολύγωνον καὶ ἔστω τὸ ΚΛΜΝΞ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Η κέντρου ἐπὶ μίαν τῶν συναφῶν τὴν Ο ἢ ΗΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ περίμετρος τοῦ ΚΛΜΝΞ πολυγώνου μεῖζον ἐστὶν τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΚΛΜΝΞ πολυγώνου καὶ τῆς ΗΟ μεῖζόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ΗΟ. καὶ τὰ ἡμίση· τὸ ἄρα ΚΛΜΝΞ πολύγωνον μεῖζον τοῦ Ζ χωρίου, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἔλασσον· οὐκ ἄρα τὸ Ζ χωρίον μεῖζον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον· ἴσον ἄρα. καὶ ἔστι τοῦ Ζ χωρίου διπλάσιον τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. δ'. Οὐ μόνον δὲ τῶν τεταγμένων ἐπιπέδων σχημάτων, ἃ ἐστὶν ἰσοπλευρά τε καὶ ἰσογώνια, ὁ κύκλος γίνεται μεῖζον, ἀλλὰ καὶ τῶν ἀνισοπλεύρων καὶ τῶν ἀνομοιογώνιων, ὅταν τὴν αὐτὴν αὐτοῖς περίμετρον ἔχη. δειχθήσεται γὰρ ὅτι καὶ τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων πολυγώνων καὶ πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσοπλευρόν τέ ἐστὶν καὶ ἰσογώνιον. πρότερον οὖν τὰ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτοῦ λαμβανόμενα θεωρήματα προγράψομεν. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μεῖζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ, καὶ εὐθεῖα ἡ Ε, ἣτις ἔστω ἐλάσσων μὲν τῆς ΑΒ, μεῖζων δὲ τῆς ΒΓ· ὅτι δυνατόν ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΑΓ δύο εὐθείας συσταθῆναι, ὥστε συναμφοτέρας μὲν ἴσας εἶναι ταῖς ΑΒΓ, μίαν δὲ αὐτῶν ἴσην τῇ Ε. Ὅσον γὰρ ὑπερέχουσιν αἱ ΑΒ ΒΓ τῆς Ε, ἔστω ἡ Ζ· ἡ Ζ ἄρα τῆς μὲν ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶν (ὅτι συναμφοτέραί αἱ ΑΒΓ ταῖς Ε.

5.318 Ζ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ Ε τῆς ΓΒ μεῖζων), τῆς δὲ ΓΒ μεῖζων (ἐπεὶ συναμφοτέραί πάλιν αἱ ΑΒΓ ταῖς Ε Ζ ἴσαι, ὧν ἡ Ε τῆς ΑΒ ἐλάσσων). ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΒΓ τῆς ΑΓ μεῖζονές εἰσιν, καὶ αἱ Ε Ζ ἄρα τῆς ΑΓ μεῖζονές εἰσιν. ἐπεὶ δὲ καὶ αἱ ΑΓΒ τῆς ΑΒ μεῖζονές εἰσιν, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΓΒ μεῖζων ἡ Ε, τῆς δὲ ΑΒ ἐλάσσων ἡ Ζ, πολλῶ ἄρα αἱ ΑΓ Ε τῆς Ζ μεῖζονές εἰσιν. ὁμοίως ἐπεὶ αἱ ΑΓΒ τῆς ΑΒ μεῖζονες, ἀλλὰ τῆς μὲν ΓΒ μεῖζων ἡ Ζ, τῆς δὲ ΑΒ ἐλάσσων ἡ Ε, πολλῶ ἄρα αἱ ΑΓ Ζ τῆς Ε μεῖζονές εἰσιν· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ΑΓ Ε Ζ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΑΓΔ *** [καὶ φανερόν ὅτι εἰ μὲν ἴσαι εἰσὶν αἱ Ε Ζ, ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, εἰ δὲ ἄνισοι, ἡ μεῖζων αὐτῶν ἴση ἔσται τῇ ΓΔ]. ε'. Τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν ἐχόντων τὸ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστὶν, καὶ ἀεὶ τὸ ἰσοσκελέστερον μεῖζον. Ἐπὶ γὰρ τῆς ΒΓ βάσεως ἰσοπερίμετρα ἔστω τρίγωνα, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ ΑΒΓ, ἰσοσκελέστερον δὲ τὸ ΒΔΓ τοῦ ΒΕΓ (δυνατόν γὰρ κατασκευάσαι διὰ τὸ προδειχθὲν ἔναγχος)· λέγω ὅτι μέγιστον μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ, μεῖζον δὲ τὸ ΒΔΓ τοῦ ΒΕΓ. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΔ ΔΑ.

5.320 ἐπεὶ οὖν αἱ ΖΔΒ τῆς ΒΖ μεῖζονές εἰσιν, καὶ τῶν ΒΑΓ ἄρα μεῖζονές εἰσιν (ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΖ). ἀλλ' αἱ ΒΑΓ ταῖς ΒΔΓ ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ΒΔΖ ἄρα τῶν ΒΔΓ μεῖζονές εἰσιν. κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ΒΔ λοιπὴ ἡ ΖΔ τῆς ΔΓ μεῖζων ἐστίν. δύο δὴ αἱ ΖΑΔ δύο ταῖς ΓΑΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσεως τῆς ΔΓ μεῖζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζων ἐστίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζων ἐστὶν ἢ διπλῇ. διπλῇ δὲ ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, τουτέστιν τῆς ὑπὸ ΑΓΒ (ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ τρίγωνον)· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μεῖζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΔΑΓ. κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΑΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΒΓ διὰ τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας. ἐκβληθείσης

οὖν τῆς ΓΔ ἐπὶ τὸ Η καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΗ φανερόν ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΒΔΓ μείζον ἐστίν· ἴσον γὰρ τὸ ΒΑΓ τῷ ΒΗΓ. πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κείσθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΔΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ ΔΕ. ἐπεὶ αἱ ΒΕΚ τῆς ΒΚ, τουτέστιν τῶν ΒΔΓ, τουτέστιν τῶν ΒΕΓ μείζονές εἰσιν, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ΒΕ λοιπὴ ἡ ΕΚ τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. δύο δὲ αἱ ΚΔΕ δυοὶ ταῖς ΓΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω· καὶ βάσεις ἡ ΚΕ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΔΕ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΔΕ μείζων ἐστίν· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΔΓ ἢ διπλῇ τῆς ὑπὸ ΓΔΕ. τῆς δὲ ὑπὸ ΔΓΒ ἐλάσσων ἢ διπλῇ ἢ αὐτῇ ἡ ὑπὸ ΚΔΓ (μείζων γὰρ ἐστίν ἡ ὑπὸ ΔΓΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· ἴσαι γὰρ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ)· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΕ. συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΓ καὶ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΛ· φανερόν γὰρ ὅτι μεταξὺ τῶν ΔΕ ΔΚ ἢ ΔΛ ἔσται παράλληλος οὕσα τῇ ΒΓ διὰ τὰς ἐναλλάξ γωνίας· ἐκβληθείσης ἄρα τῆς ΓΕ ἄχρι τῆς ΔΛ παραλλήλου καὶ συμπιπτούσης κατὰ τὸ Λ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΛ ἔσται τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΑΓ.

5.322 [ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΓΒ καὶ παραλλήλων τῶν ΒΓ ΔΛ], ὥστε μείζον εἶναι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΒΕΓ ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ΒΔΓ. ζ'. Πάλιν ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθογώνια ὅμοια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΕΗ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η παράλληλος τῇ ΔΕ ἀχθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΔΖ ἐκβληθείση κατὰ τὸ Κ, διὰ δὲ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΖΗ ἢ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ ΔΘ τῇ ΗΕ ἐν παραλληλογράμμῳ, τουτέστιν τῇ ΒΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΘ γωνία τῇ Ζ ἴση, τουτέστιν τῇ Γ, καὶ ὀρθὴ ἡ Θ τῇ Β, καὶ λοιπὴ ἡ Κ τῇ Α, ἰσογώνια ἄρα τὰ ΚΘΔ ΑΒΓ τρίγωνα καὶ ἴσα· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΖ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΚΗΖ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΓ ΔΖ ὡς μιᾶς τῷ τε ἀπὸ ΑΒ ΔΕ ὡς μιᾶς καὶ τῷ ἀπὸ ΒΓ ΕΖ ὡς μιᾶς. ζ'. Τὰ ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα συναμφοτέρα τῶν ἐπὶ ταῖς αὐταῖς βάσεσι συναμφοτέρων ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀνομοίων μὲν ἀλλήλοις καὶ τοῖς ὁμοίοις, ἰσοπεριμέτρων δὲ αὐτοῖς, μείζονά ἐστιν. Ἔστω ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΔΖΒ ΒΑΓ, καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων ἄλλα ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΔΕΒ ΒΑΓ ἰσοπερίμετρα μὲν τοῖς ΔΖΒ ΒΑΓ, ἀνόμοια δὲ ἐξ ἀνάγκης [ὅτι αἱ γωναὶ ἄνισοί εἰσιν]· τοῦτο δὲ ὡς δυνατόν κατασκευάσαι δειχθήσεται· λέγω ὅτι τὰ ΔΒΖ ΒΑΓ συναμφοτέρα τῶν ΔΕΒ ΒΑΓ συναμφοτέρων μείζονά ἐστιν.

5.324 Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ ΑΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰς βάσεις· τεμοῦσι δὲ αὐτὰς δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθάς· ἴσαι γὰρ εἰσιν αἱ ΔΕΖ ταῖς ΒΕΖ, καὶ βάσεις ἴσαι αἱ ΔΖ ΖΒ διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ γωναὶ ἴσαι [καὶ ὅμοια τὰ ΔΕΖ ΖΕΒ τρίγωνα], ὥστε καὶ τὰς ἐκτὸς γωνίας Ζ Ζ ἴσας εἶναι [ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἐντός], ἴσαι δὲ εἰσιν καὶ αἱ Δ Β, καὶ αἱ λοιπαὶ αἱ Η Η ἴσαι· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν καὶ ἴσαι αἱ ΔΗ ΗΒ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ΒΜ ΜΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ ὀρθαὶ αἱ Μ Μ. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὰ Η Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΗ, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ· ἔσται δὲ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΗ τῇ ὑπὸ ΘΒΗ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ μείζων τῆς ὑπὸ ΑΒΓ (ὅτι καὶ τῆς ὑπὸ ΖΒΗ ἴσης· ὅμοια γὰρ τὰ ΔΒΖ ΒΑΓ τρίγωνα)· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΒΗ ἄρα μείζων τῆς ὑπὸ ΑΒΓ· ἡ ἄρα τὰ Θ Λ σημεία ἐπιζευγνύουσα τέμνει τὴν ΒΜ, ὑποκειμένης τῆς ΔΒΓ εὐθείας καὶ τῆς ΘΒΝ ἐκβεβλημένης ἔξωθεν τῆς ΑΒ, ὅτι ἐλάσσων ἐστίν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΘΒΗ, τουτέστιν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΝΒΓ, καὶ πολλῶ ἢ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάσσων, ὥστε τὴν ΒΜ τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ΘΛ κατὰ τὸ Κ [καὶ φανερόν ὅτι οὐ τὴν ΜΓ τέμνει, ἵνα μὴ τὴν ΑΜ ἐκβαλλομένην τέμῃ κατ' ἄλλο σημεῖον τοῦ Λ]. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΕΒ ΒΑΓ ταῖς ΔΖΒ ΒΑΓ ἴσαι εἰσὶν (ὑπόκεινται γὰρ ἰσοπερίμετροι), καὶ αἱ ἡμίσειαι αἱ ΕΒΛ, τουτέστιν αἱ ΘΒΛ, ταῖς ΖΒΑ ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ΘΒΛ τῆς ΘΛ μείζονές εἰσιν, καὶ αἱ ΖΒΑ ἄρα τῆς ΘΛ μείζονές εἰσιν.

5.326 καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΖΒΑ ὡς μιᾶς μείζον ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΘΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΒΑ ὡς μιᾶς ἴσα εἰσὶν τὰ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΗ ΑΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΒΜ ὡς μιᾶς, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΜ, διὰ τὴν τῶν ΗΖΒ ΒΑΜ τριγώνων ὀρθογωνίων ὁμοιότητα (τοῦτο γὰρ προεδείχθη), τῷ δὲ ἀπὸ ΘΛ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΘΚ ΚΛ ὡς μιᾶς, ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΜ ΗΘ ὡς μιᾶς,

τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΛΜ ΗΕ ὡς μιᾶς, μετὰ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΚΜ ὡς μιᾶς, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΜ, διὰ τὸ αὐτὸ προδειχθέν· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΜ ΖΗ ὡς μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΗ ΑΜ ὡς μιᾶς μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΗΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΗ ΑΜ ὡς μιᾶς μείζον ἐστὶν τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΕ ΑΜ ὡς μιᾶς καὶ μήκει ἄρα μείζων ἢ ΖΗ ΑΜ ὡς μία τῆς ΕΗ ΑΜ ὡς μιᾶς. τὰ δ' ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τρίγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἢ ΗΕ πρὸς ΗΖ, τὰ τε ἡμίση τῶν τριγώνων τὸ ΕΗΒ πρὸς ΖΗΒ καὶ τὰ ὅλα τρίγωνα [διπλάσια] τὸ ΔΕΒ πρὸς ΔΖΒ, ὡς δὲ ἢ ΑΜ πρὸς ΜΑ, τὸ ΜΛΓ πρὸς τὸ ΜΑΓ, καὶ τὸ διπλάσιον ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ· καὶ συνθέντι ἄρα πρὸς συγκείμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὡς ἢ ΕΗ ΑΜ πρὸς τὴν ΖΗ ΑΜ, τὰ ΔΕΒ ΒΛΓ τρίγωνα πρὸς τὰ ΔΖΒ ΑΒΓ τρίγωνα· καὶ τοῦτο γὰρ ἐξῆς.

- 5.328 ἐλάσσων δὲ συναμφοτέρος ἢ ΕΗ ΑΜ τῆς ΖΗ ΑΜ συναμφοτέρου· ἐλάσσονα ἄρα καὶ τὰ συναμφοτέρα ΔΕΒ ΒΛΓ τρίγωνα τῶν ΔΖΒ ΒΑΓ συναμφοτέρων τριγώνων. ἢ'. Ἐστω ἐπὶ ἀνίσων βάσεων τῶν ΑΒ ΓΔ ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΑΕΒ ΓΔΖ, καὶ ἢ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ ἴση ἔστω, ἢ δὲ ΑΒ τῆς ΔΓ μείζων (ἀνόμοια ἄρα τὰ τρίγωνα)· δεῖ δὴ ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστήσασθαι, ὥστε τὰς δ' πλευρὰς αὐτῶν ἅμα ἴσας εἶναι ταῖς ΑΕΒ ΓΔΖ ἅμα. Ἐκκείσθω γὰρ ἢ ΗΘ εὐθεῖα ἴση οὔσα ταῖς ΑΕΒ ΓΔΖ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Κ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΗΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως τὴν ΑΒ βάσιν πρὸς τὴν ΓΔ, τετμήσθω δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΚ ΚΘ δίχα κατὰ τὰ Λ Μ σημεία. ἐπεὶ οὖν ἢ ΗΘ συναμφοτέρων τῶν ΑΒ ΓΔ μείζων ἐστὶν (ὅτι καὶ αἱ ΑΕΒ ΓΔΖ), καὶ ἔστιν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἢ ΗΚ πρὸς ΚΘ, μείζων ἄρα καὶ ἢ μὲν ΗΚ τῆς ΑΒ, ἢ δὲ ΚΘ τῆς ΓΔ. καὶ τέτμηται ἑκατέρα δίχα· τῶν ἄρα ΑΒ ΗΛ ΑΚ αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὁμοίως καὶ τῶν ΓΔ ΚΜ ΜΘ. συνεστάτω οὖν ἐκ μὲν τῶν ΑΒ ΗΛ ΑΚ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον (φανερὸν γὰρ ὅτι ἔξω πίπτουσιν τῶν· ΑΕΒ διὰ τὸ μείζους εἶναι τὰς ΗΛΚ τῶν ΑΕΒ· ἢ μὲν γὰρ ΑΕΒ ἡμίσεια τῆς ΗΘ, ἴσαι γὰρ αἱ ΑΕΒ ταῖς ΓΔΖ, καὶ αἱ δ' ἅμα εὐθεῖαι τῇ ΗΘ, ἢ δὲ ΗΚ μείζων ἢ ἡμίσεια τῆς ΗΘ), ἐκ δὲ τῶν ΓΔ ΚΜΘ τὸ ΓΝΔ (ὁμοίως γὰρ ἔνδον συνίστανται).
- 5.330 καὶ φανερόν ὅτι ὁμοῖα ἔσται τὰ τρίγωνα, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἢ ΗΚ πρὸς ΚΘ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἢ τε ΗΛ πρὸς ΚΜ καὶ ἢ ΑΚ πρὸς ΜΘ, καὶ αἱ ἴσαι συνιστάμεναι ἢ ΑΞ πρὸς ΓΝ καὶ ἢ ΒΞ πρὸς ΔΝ. [Τὸ δὲ ΑΕΒ τρίγωνον τοῦ ΓΔΖ τριγώνου ποτὲ μὲν μείζον γίνεται, ποτὲ δὲ ἔλασσον, ποτὲ δὲ ἴσον αὐτῷ. ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΠΡΣ ἴσην ἔχον τὴν μὲν ΠΡ τῇ ΖΓ, τὴν δὲ ΡΣ τῇ ΔΖ, τὴν δὲ ΠΣ τῇ ΓΔ· ἴσα ἄρα καὶ ὁμοῖα ἐστὶ τὰ ΓΔΖ ΠΡΣ τρίγωνα ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν ἢ ΑΒ μείζων ἐστὶν τῆς ΓΔ, τουτέστιν τῆς ΠΣ, καὶ αἱ ΑΕ ΕΒ ἴσαι ταῖς ΠΡ ΡΣ (ἐπεὶ καὶ ταῖς ΓΖ ΖΔ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ), γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΠΡΣ μείζων ἐστὶν (ἐπεὶ καὶ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ μείζων ἐστὶν). κείσθω ἢ ὑπὸ ΠΡΤ γωνία τῇ Ε ἴση, καὶ ἢ ΡΤ τῇ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΠΤ· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοῖον τὸ ΠΡΤ τρίγωνον τῷ ΑΕΒ τριγώνῳ. ἐκβεβλήσθω δὲ ἢ ΠΣΥ, καὶ τῇ ΑΒ ἴση ἢ ΠΥ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΡΥ· μείζων ἄρα ἢ ΡΥ τῆς ΡΣ καὶ τῆς ΡΤ (ἑκατέρα γὰρ τῶν ΠΡ ΡΤ ἴση ἐστὶν τῇ ΡΣ). τὸ οὖν ΠΡΤ τρίγωνον τῷ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν καὶ ὁμοῖον, τῷ δὲ ΠΡΣ τὸ ΠΡΤ ἥτοι ἴσον ἐστὶν, ἐὰν ἢ ΤΣ παράλληλος ἢ τῇ ΡΠ, καὶ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι ὧσιν αἱ ὑπὸ ΡΠΤ ΠΤΣ (ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν τῆς ΡΠ τὰ τρίγωνα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΡΠ ΤΣ), ἢ μείζων ἐστὶν αὐτοῦ, ἐὰν ἢ ΤΥ παράλληλος ἢ τῇ ΡΠ, καὶ ἢ ὑπὸ ΠΤΥ γωνία τῇ ἐναλλὰξ ὑπὸ ΡΠΤ ἴση (γίνεται γὰρ πάλιν τὸ ΠΡΤ ἴσον τῷ ΡΥΠ· μείζον δὲ τὸ ΠΡΥ τοῦ ΠΡΣ· καὶ τὸ ΠΡΤ ἄρα μείζον ἐστὶν τοῦ ΠΡΣ).
- 5.332 ἐὰν δὲ ἢ ΤΦ παράλληλος ἢ τῇ ΡΠ, διὰ τὰς ἴσας ἐναλλὰξ ὑπὸ ΡΠΤ ΠΤΦ γωνίας καὶ τὸ ΠΡΤ ἴσον τῷ ΡΠΦ, ὥστε μείζον εἶναι τὸ ΠΡΣ τοῦ ΠΡΦ, τουτέστιν τοῦ ΠΡΤ, ὥστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον ἴσον ὂν τῷ ΠΡΤ τριγώνῳ ἥτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἴσον ἢ ἔλασσον τοῦ ΠΡΣ, τουτέστιν τοῦ ΓΔΖ.] Τὸ λοιπὸν τῶν ἐν ὑπερθέσει * * * * * θ'. Τούτων προγραφέντων τὸ προκείμενον δείξομεν, τουτέστιν ὅτι τῶν ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἐχόντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶν καὶ ἰσογώνιον. Ἐστω γὰρ πολύπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ

μέγιστον τῶν ἰσοπεριμέτρων αὐτῶ καὶ ἰσοπληθεῖς πλευρὰς ἔχοντων· λέγω ὅτι ἰσόπλευρόν ἐστιν. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ $AB\Gamma$ ἄνισοι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AG , ἐφ' ἧς συνεστάτω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $AZ\Gamma$, ὥστε συναμφοτέρας τὰς $AZ\Gamma$ ἴσας εἶναι συναμφοτέραις ταῖς $AB\Gamma$ διὰ τὸ δ'. ἐπεὶ οὖν πρὸ τριῶν ἐδείχθη ὅτι τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἰσοπεριμέτρων τριγώνων τὸ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστιν, μεῖζον ἄρα τὸ $AZ\Gamma$ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ $AG\Delta E$ τετραπλεύρου ἔσται τι χωρίον τὸ $Z\Gamma\Delta E A$ τοῦ $AB\Gamma\Delta E$ μεγίστου, ἰσοπερίμετρον αὐτῶ καὶ ἰσαρίθμους πλευρὰς ἔχον, μεῖζον, ὅπερ ἀδύνατον· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶν τὸ $AB\Gamma\Delta E$. καὶ φανερόν ὅτι τὸ ἰσοπλευρότερον αἰεὶ μεῖζον· καὶ γὰρ τὸ ἰσοσκελέστερον αἰεὶ μεῖζον, ὡς ἐδείχθη πρὸ τριῶν.

5.334

ι'. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύπλευρον. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ B γωνία τῆς Δ μεῖζων. καὶ ἡ AG εὐθεῖα τῆς GE ἄρα μεῖζων (ἴσαι γὰρ αἱ $AB\Gamma$ $\Gamma\Delta E$). συνεστάτω ἐπὶ τῶν AG GE ἀνίσων ὁμοία ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὡς πρὸ ἐνὸς ἐδείχθη, τὰ $AZ\Gamma$ GHE τὰς $AZ\Gamma$ GHE πλευρὰς συναμφοτέρας ἴσας ἔχοντα συναμφοτέραις ταῖς $AB\Gamma$ $\Gamma\Delta E$. μεῖζονα δὴ ἔσται τὰ συσταθέντα τὰ $AZ\Gamma$ GHE ἅμα τῶν ἐξ ἀρχῆς $AB\Gamma$ $\Gamma\Delta E$ · καὶ τοῦτο γὰρ δέδεικται πρὸ δύο. κοινοῦ προστεθέντος τοῦ $AG E$ τριγώνου ἔσται τὸ αὐτὸ ἄτοπον· τὸ γὰρ $AZ\Gamma H E$ μεῖζον ἔσται τοῦ $AB\Gamma\Delta E$ μεγίστου καὶ ἰσοπεριμέτρου αὐτῶ. καὶ ἰσογώνιον τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύπλευρον· τῶν ἄρα ἰσοπεριμέτρων εὐθυγράμμων σχημάτων καὶ τὰς πλευρὰς ἰσοπληθεῖς ἔχοντων τὸ μέγιστον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶν καὶ ἰσογώνιον. Καὶ δῆλον ὅτι μέγιστος πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων σχημάτων ὁ κύκλος, ἐπειδὴ τοῦ ἰσοπεριμέτρου τεταγμένου σχήματος, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἐδείχθη μεῖζων. ια'. Τῆς αὐτῆς δέ ἐστιν τοῖς προειρημένοις θεωρίας καὶ τοῦτο. τῶν ἴσην ἔχοντων περιφέρειαν κυκλικῶν τμημάτων μέγιστόν ἐστι τὸ ἡμικύκλιον. δεῖξομεν δὲ τοῦτο προγράψαντες πρότερον τὰ εἰς αὐτὸ λαμβανόμενα. Αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι. Ἐστωσαν δύο κύκλοι οἱ AB $\Gamma\Delta$, καὶ διάμετροι αὐτῶν αἱ AB $\Gamma\Delta$ · λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ AB κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ $\Gamma\Delta$ κύκλου περιφέρειαν, οὕτως ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$.

5.336

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ὁ AB κύκλος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Delta$, ἀλλὰ τοῦ μὲν AB κύκλου τετραπλάσιόν ἐστι τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τε τῆς AB εὐθείας καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ δὲ $\Gamma\Delta$ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ εὐθείας καὶ τῆς τοῦ $\Gamma\Delta$ κύκλου περιφερείας (τοῦτο γὰρ προδεδείκται), καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς AB καὶ τῆς περιφερείας τοῦ AB κύκλου πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ καὶ τῆς τοῦ $\Gamma\Delta$ κύκλου περιφερείας, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ AB κύκλου περιφερείας καὶ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ AB , οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ $\Gamma\Delta$ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Delta$ · ὡς ἄρα ἡ τοῦ AB κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ τοῦ $\Gamma\Delta$ περιφέρεια πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ τοῦ AB περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ $\Gamma\Delta$ περιφέρειαν, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. ιβ'. Τοῦτο ἀποδείκνυται καὶ χωρὶς τοῦ λαβεῖν ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας τετραπλάσιόν ἐστὶν τοῦ κύκλου. τὰ γὰρ ἐγγραφόμενα τοῖς κύκλοις ἢ περιγραφόμενα ὁμοία πολύγωνα τὰς περιμέτρους ἔχει λόγον ἔχουσας πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ταῖς ἐκ τῶν κέντρων, ὥστε καὶ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διάμετροι. Πάλιν ἔστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$ περὶ κέντρον τὸ Δ , ἐκ τοῦ κέντρου δὲ αὐτοῦ ἡ AB , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω τις ἡ ΔE · ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν BZE περιφέρειαν, οὕτως ὁ $AB\Gamma$ κύκλος πρὸς τὸν $B\Delta E$ τομέα. Εἰ μὲν οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ BZE περιφέρεια τῇ $AB\Gamma$ περιμέτρῳ τοῦ κύκλου, ἐπεὶ διαιρεθείσης τῆς $AB\Gamma$ περιμέτρου τοῦ κύκλου εἰς τὰ μέτρα καὶ ἀπὸ τῶν τῆς διαιρέσεως σημείων ἐπὶ τὸ Δ κέντρον ἐπιζευχθειῶν εὐθειῶν ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλοις πάντες οἱ τομεῖς, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος αὐτῶν τῶ πληθὲι τῶν μέτρων, ἔσται ἄρα ὡς ὅλη ἡ $AB\Gamma$ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν BZE περιφέρειαν, οὕτως ὁ $AB\Gamma$ κύκλος πρὸς τὸν $B\Delta E$ τομέα [ιε' τοῦ ε' στοιχείων].

- 5.338 εἰ δὲ μὴ ἔστιν σύμμετρος τῇ BZE περιφερείᾳ, ὁμοίως ἔστιν ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος πρὸς τὴν BZE περιφέρειαν. ἔστω, εἰ δυνατόν, ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν BZ περιφέρειαν πρότερον ἐλάσσονα οὔσαν τῆς BZE περιφερείας, καὶ εἰλήφθω τις ἑτέρα περιφέρεια ἢ BH τῆς μὲν BZ μείζων τῆς δὲ BZE ἐλάσσων, σύμμετρος δὲ οὔσα τῇ ABΓ περιμέτρῳ, ὡς ἔστιν λῆμμα σφαιρικῶν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ. ἔστιν οὖν διὰ τὰ προειρημένα καὶ ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΗ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν BZH περιφέρειαν. ἀλλὰ ἢ ABΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν BZH περιφέρειαν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὴν BZ περιφέρειαν, τουτέστιν ἢ περ ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα· καὶ ὁ ABΓ οὖν κύκλος πρὸς τὸν BΔΗ τομέα ἐλάσσονα λόγον ἔξει ἢ περ πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν BZ περιφέρειαν ἐλάσσονα οὔσαν τῆς BZE περιφερείας. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα τῆς BZE. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὴν BEΓ περιφέρειαν, καὶ εἰλήφθω τις ὁμοίως ἢ BEΘ περιφέρεια τῆς μὲν BZE περιφερείας μείζων τῆς δὲ BEΓ περιφερείας ἐλάσσων, σύμμετρος δὲ πρὸς τὴν ABΓ περίμετρον τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν πάλιν ἔστιν ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΘ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν BEΘ περιφέρειαν, ἢ δὲ ABΓ περίμετρος πρὸς τὴν BEΘ περιφέρειαν μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὴν BEΓ περιφέρειαν, τουτέστιν ἢ περ ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, ἔξει δηλονότι καὶ ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΘ τομέα μείζονα λόγον ἢ περ πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, ὅπερ ἔστιν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς μείζονα τῆς BZE περιφέρειαν.
- 5.340 ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν BΔΕ τομέα, οὕτως ἢ ABΓ περίμετρος αὐτοῦ πρὸς τὴν BZE περιφέρειαν. ιγ'. Τὰ ὅμοια τμήματα τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλα ἔστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα, καὶ αἱ περιφέρειαι δὲ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἔστω ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ABΓ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ὡς μὲν τὸ ABΓ τμήμα πρὸς τὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, ὡς δὲ ἢ ABΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἢ ΑΓ πρὸς ΔΖ. Προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν κέντρα τὰ Η Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗΓ ΔΘΖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἔστιν τὰ ABΓ ΔΕΖ τμήματα, ἴση ἔστιν ἢ πρὸς τῷ Η γωνία τῇ πρὸς τῷ Θ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ, καὶ ἢ ABΓ περιφέρεια ὁμοία τῇ ΔΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν ΑΗΓΒ τομέα, οὕτως ἢ περίμετρος τοῦ ABΓ κύκλου πρὸς τὴν ABΓ περιφέρειαν, τουτέστιν δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν Η γωνίαν. ὡς δὲ ὁ ΔΕΖ κύκλος πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, οὕτως ἢ περίμετρος τοῦ ΔΕΖ κύκλου πρὸς τὴν ΔΕΖ περιφέρειαν, τουτέστιν δ' ὀρθαὶ πρὸς τὴν Θ γωνίαν. καὶ ἴση ἔστιν ἢ Θ γωνία τῇ Η γωνίᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν ΑΗΓΒ τομέα, οὕτως ὁ ΔΕΖ κύκλος πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ ABΓ κύκλος πρὸς τὸν ΔΕΖ, οὕτως ὁ ΑΗΓΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα.
- 5.342 ὡς δὲ ὁ κύκλος πρὸς τὸν κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ, τουτέστιν τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΖΕ τομέα, οὕτως τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον. καὶ λοιπὸν τὸ ABΓ τμήμα πρὸς τὸ ΔΕΖ τμήμα ἔστιν ὡς τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΘΖ τρίγωνον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Λέγω δὴ ὅτι ἔστιν καὶ ὡς ἢ ABΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἔστιν ὡς ἢ τοῦ ABΓ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ ΔΕΖ κύκλου περιφέρειαν, οὕτως ἢ ABΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ. ὡς δὲ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας, οὕτως ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ, τουτέστιν ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ABΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕΖ, οὕτως ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ιδ'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι καὶ πρὸς τοῖς κέντροις αὐτῶν ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ABΓ ΔΕΖ περιεχόμεναι, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΗ ΔΘ, κάθετοι δὲ αἱ ΑΚ ΔΛ· δεῖξαι ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ΑΗΚ τρίγωνον πρὸς τὸ

ΑΓΚ τρίγραμμον, οὕτως καὶ τὸ ΔΘΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΖΛ τρίγραμμον. Ἔστι δὲ φανερόν ἐκ τοῦ προγεγραμμένου. ὅμοιον γὰρ γίνεται τὸ ΑΗΚ τρίγωνον τῷ ΔΘΛ, καὶ τὸ ΑΓΚ τρίγραμμον τῷ ΔΖΛ τριγράμμῳ, καὶ λόγον ἔχει πρὸς ἀλλήλα ἐκάτερον πρὸς ἐκάτερον, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΛ.

5.344

ιε'. Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ διὰ τοῦ Α περιφέρεια γεγράφθω ἢ ΑΔ, ὀρθὴ δὲ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δεῖξαι ὅτι ὁ ΑΔΓ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ τῶν ΒΓΑ περιεχομένην. Ἦχθω τῇ ΓΑ ὀρθὴ ἡ ΖΑ (ἐφάπτεται ἄρα τῆς ΑΔ περιφερείας), καὶ διὰ τοῦ Β περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἢ ΕΒΗ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ ἡ ΧΘ ἢ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΕΒΖ τρίγραμμον πρὸς τὸ ΕΒΘ τρίγραμμον ἢ περὶ πρὸς τὸν ΕΑΒ τομέα, καὶ συνθέντι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΖΘΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΘΒ τρίγραμμον ἢ περὶ τὸ ΖΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸν ΕΑΒ τομέα, ὥς δὲ τὸ ΖΘΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΘ τρίγραμμον, οὕτως τὸ ΖΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΒ τρίγραμμον διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ ΕΑΒ ΑΓΔ γωνίας (τοῦτο γὰρ προδεδεικται), καὶ τὸ ΖΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ αὐτὸ τρίγωνον πρὸς τὸν ΕΑΒ τομέα, μείζων ἄρα ὁ ΕΑΒ τομεὺς τοῦ ΔΑΒ τριγράμμου· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ ΕΑΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα ἢ περὶ τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα. τὸ δὲ ΔΑΒ τρίγραμμον πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· πολλῶν ἄρα ὁ ΕΑΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΒΑΗ τομέα μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον. ὥς δὲ ὁ ΕΑΒ τομεὺς πρὸς τὸν ΒΑΗ τομέα, οὕτως ἡ ὑπὸ ΖΑΒ πρὸς τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον. καὶ ἀνάπαλιν τὸ ΒΑΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΒΑΖ, καὶ συνθέντι ὁ ΔΓΑ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΑΒ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΑΒ, τουτέστιν ἢ περὶ ἡ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΓΒ (ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΖΑΓ κάθετον εἶναι τὴν ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΑΓΖ).

5.346

ις'. Ἐστω πάλιν ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β, καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ διὰ τοῦ Α γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἢ ΑΔ· λέγω ὅτι ὁ ΑΓΔ τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΔ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ὀρθὴ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΓΔ. Ἦχθω τῇ ΑΓ ὀρθὴ ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ σημείου περὶ κέντρον τὸ Α γεγράφθω κύκλου περιφέρεια ἢ ΕΓΖ. ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν ἐκ τοῦ κέντρου τὴν ΓΑ γεγραμμένοι εἰσὶν αἱ περιφέρειαι, φανερόν ὅτι ἴσων εἰσὶ κύκλων. καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΕ· μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓΔ τομεὺς τοῦ ΑΓΕ τομέως· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ ΑΓΔ τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἢ περὶ ὁ ΑΓΕ τομεὺς πρὸς τὸ αὐτὸ τρίγωνον, καὶ πολὺ μᾶλλον ἢ περὶ ὁ ΑΓΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΓΖ τομέα. ὥς δὲ ὁ ΑΓΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΓΑΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΑΖ· καὶ ὁ ΑΓΔ ἄρα τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΑΖ. καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι [καὶ ἀναστρέψαντι] μείζονα λόγον ἔχει ὁ ΑΓΔ τομεὺς πρὸς τὸ ΑΒΔ τρίγραμμον ἢ περὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΑΖ, τουτέστιν ἢ περὶ ὀρθὴ πρὸς τὴν ὑπὸ ΑΓΔ (ἔστιν γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΑΖ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΔ, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶν ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ καὶ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ). ιζ'.

5.348

Τούτων προγεγραμμένων τὸ προκείμενον θεώρημα συγκριτικὸν ὑπάρχον δείξομεν οὕτως. Ἐστω δύο τμήματα κύκλων τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ περιφερείας, καὶ ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ΕΔΖ πρότερον ἔλαττον ἡμικυκλίου· λέγω ὅτι μείζον ἐστὶν τὸ ἡμικύκλιον τοῦ τμήματος. Εἰλήφθω κέντρα τῶν κύκλων τὰ Η Θ, καὶ ὀρθὴ μὲν ἡ ΗΒ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡ ΘΚΕ, καὶ τῇ ΔΖ παράλληλος ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὥς ἡ ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ (αἱ γὰρ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὥς αἱ διάμετροι), ἴση δὲ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ, ἔστιν ἄρα ὥς ἡ

ΛΕ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ὡς δὲ ἡ ΕΛ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΕ, ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΕΘΔ τομέα. καὶ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς ΘΛ πρὸς ΗΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστιν ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ ΛΕΘ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΕΘ τομέα· τῶν ἄρα ΛΕΘ ΑΒΗ τομέων μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ὁ ΔΕΘ τομεὺς. καὶ ἐπεὶ ἔχει διὰ τὸ προδειχθὲν λῆμμα μείζονα λόγον ὁ ΕΔΘ τομεὺς πρὸς τὸ ΕΔΚ τρίγραμμον ἥπερ ὀρθή γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΛΘΕ, πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΕ, τουτέστιν ἥπερ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, ὡς δὲ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, οὕτως ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ τομέα, ὁ ἄρα ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΕΚ τρίγραμμον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ αὐτὸς τομεὺς πρὸς τὸν ΑΒΗ τομέα· μείζων ἄρα ὁ ΑΒΗ τομεὺς τοῦ ΔΚΕ τριγράμμου.

5.350 καὶ τὰ διπλάσια· μείζον ἄρα τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον τοῦ ΔΕΖ τμήματος. ιη'. Ἐστω δὴ πάλιν τὸ ΔΕΖ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως μείζον ἐστὶ τὸ ἡμικύκλιον. Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτά. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, οὕτως ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΗΒ (ἴσαι γὰρ αἱ ΑΒ ΔΕ περιφέρειαι). καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ πρὸ δύο λῆμμα μείζονα λόγον ἔχει ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸ ΔΚΕ τρίγραμμον ἥπερ ὀρθή γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΛΘΕ, πρὸς τὴν ὑπὸ ΔΘΕ, τουτέστιν ἥπερ ὁ ΛΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΔΘΕ, τουτέστιν ἥπερ ὁ ΔΘΕ τομεὺς πρὸς τὸν ΑΒΗ, ἔσται μείζων ὁ ΑΗΒ τομεὺς τοῦ ΔΕΚ τριγράμμου. καὶ τὰ διπλάσια· μείζον ἄρα τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον τοῦ ΔΕΖ τμήματος· πάντων ἄρα τῶν ἴσας ἐχόντων τὰς περιφερείας κυκλικῶν τμημάτων μέγιστόν ἐστιν τὸ ἡμικύκλιον. Περὶ τῶν στερεῶν. ιθ'. Τὸν πρῶτον καὶ δημιουργὸν τῶν πάντων θεὸν οἱ φιλόσοφοί φασιν εἰκότως τῷ κόσμῳ σχῆμα περιθεῖναι σφαιρικὸν ἐκλεξάμενον τῶν ὄντων τὸ κάλλιστον, τὰ τε προσόντα τῇ σφαίρᾳ φυσικὰ συμπτώματα λέγοντες ἔτι καὶ τοῦτο προστιθέασιν ὅτι πάντων τῶν στερεῶν σχημάτων τῶν ἴσην ἐχόντων τὴν ἐπιφάνειαν μέγιστη ἐστὶν ἡ σφαῖρα. ἅλλα μὲν οὖν ὅσα προσεῖναι λέγουσιν αὐτῇ πρόδηλόν τέ ἐστιν καὶ παραμυθίας ἐλάσσοнос δεῖται, τὸ δ' ὅτι μείζων ἐστὶ τῶν ἄλλων σχημάτων οὐθ' οἱ φιλόσοφοι δεικνύουσιν, ἀλλ' ἀποφαίνονται μόνον, οὔτε παραμυθήσασθαι ῥᾶδιον ἄνευ θεωρίας πλείονος. φέρ' οὖν, ὥσπερ ἐν τοῖς πρόσθεν εὔρομεν τὸν κύκλον μέγιστον ὄντα τῶν ἴσην ἐχόντων αὐτῷ τὴν περίμετρον τεταγμένων πολυγώνων σχημάτων, καὶ νῦν τὴν σφαῖραν κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἀποδείξαι πειραθώμεν μέγιστην οὖσαν τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων αὐτῇ τεταγμένων στερεῶν σχημάτων.

5.352 πρότερον δὲ περὶ τῶν στερεῶν αὐτῶν, πρὸς ἃ δεῖ συγκρίνειν τὴν σφαῖραν, ὀλίγα προδιαληψόμεθα· πολλὰ γὰρ ἐπινοῆσαι δυνατόν στερεὰ σχήματα παντοίας ἐπιφανείας ἔχοντα, μᾶλλον δ' ἢ τις ἀξιώσειε λόγου τὰ τετάχθαι δοκοῦντα [καὶ τούτων πολὺ πλεον τοὺς τε κώνους καὶ κυλίνδρους καὶ τὰ καλούμενα πολύεδρα]. ταῦτα δ' ἐστὶν οὐ μόνον τὰ παρὰ τῷ θειοτάτῳ Πλάτῳ πέντε σχήματα, τουτέστιν τετράεδρόν τε καὶ ἑξάεδρον, ὀκτάεδρόν τε καὶ δωδεκάεδρον, πέμπτον δ' εἰκοσάεδρον, ἀλλὰ καὶ τὰ ὑπὸ Ἀρχιμήδους εὑρεθέντα τρισκαίδεκα τὸν ἀριθμὸν ὑπὸ ἰσοπλευρῶν μὲν καὶ ἰσογωνίων οὐχ ὁμοίων δὲ πολυγώνων περιεχόμενα. τὸ μὲν γὰρ πρῶτον ὀκτάεδρόν ἐστιν περιεχόμενον ὑπὸ τριγώνων δ' καὶ ἑξαγώνων δ'. τρία δὲ μετὰ τοῦτο τεσσαρεσκαίδεκάεδρα, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ζ', τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις ζ' καὶ ἑξαγώνοις η', τὸ δὲ τρίτον τριγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ζ'. μετὰ δὲ ταῦτα ἑκκαίδεκαεδρά ἐστὶν δύο, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ιη', τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις ιβ', ἑξαγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ζ'. μετὰ δὲ ταῦτα δυοκαετριάκοντάεδρά ἐστὶν τρία, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται τριγώνοις κ' καὶ πενταγώνοις ιβ', τὸ δὲ δεύτερον πενταγώνοις ιβ' καὶ ἑξαγώνοις κ', τὸ δὲ τρίτον τριγώνοις κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ'.

5.354 μετὰ δὲ ταῦτα ἔν ἐστιν ὀκτωκαετριάκοντάεδρον περιεχόμενον ὑπὸ τριγώνων λβ' καὶ τετραγώνων ζ'. μετὰ δὲ τοῦτο δυοκαεξηκοντάεδρά ἐστι δύο, ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχεται

τριγώνοις κ' καὶ τετραγώνοις λ' καὶ πενταγώνοις ιβ', τὸ δὲ δεύτερον τετραγώνοις λ' καὶ ἑξαγώνοις κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ'. μετὰ δὲ ταῦτα τελευταῖόν ἐστιν δυοκαιεννηκοντάεδρον, ὃ περιέχεται τριγώνοις π' καὶ πενταγώνοις ιβ'. Ὅσας δὲ γωνίας ἕκαστον ἔχει στερεὰς τῶν ιγ' τούτων σχημάτων πολυέδρων καὶ ὅσας πλευράς, διὰ τοῦδε τοῦ τρόπου θεωρεῖται· ὅσων μὲν γὰρ ἀπλῶς πολυέδρων αἱ στερεαὶ γωνίαι τρισὶν ἐπιπέδοις περιέχονται γωνίαις, ἑξαριθμηθεῖσων τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἃς ἔχουσιν πᾶσαι αἱ ἑδραι τοῦ πολυέδρου, δηλὸν ὡς ὁ τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀριθμὸς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, ὅσων δὲ πολυέδρων ἡ στερεὰ γωνία περιέχεται τέσσαρσιν ἐπιπέδοις, ἑξαριθμηθεῖσων πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἃς ἔχουσιν αἱ ἑδραι τοῦ πολυέδρου, τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ τὸ τέταρτον μέρος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς ὁ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ὅσων πολυέδρων ἡ στερεὰ γωνία περιέχεται ὑπὸ ε' γωνιῶν ἐπιπέδων, τὸ πέμπτον τοῦ πλήθους τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς τοῦ πλήθους τῶν στερεῶν γωνιῶν. Τῶν δὲ πλευρῶν τὸ πλήθος ἃς ἕκαστον ἔχει τῶν πολυέδρων τόνδε τὸν τρόπον εὐρήσομεν. ἑξαριθμηθεῖσων γὰρ πασῶν τῶν πλευρῶν ἃς ἔχει τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα τὸ πολυέδρον, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν δηλὸν ὡς ἴσος ἐστὶν τῷ πλήθει τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν.

5.356 ἀλλ' ἐπειδὴ δύο ἐπιπέδων ἑκάστη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κοινὴ ἐστίν, δηλὸν ὅτι τοῦ πλήθους τὸ ἥμισυ αἱ πλευραὶ εἰσὶ τοῦ πολυέδρου. τὸ μὲν οὖν πρῶτον τῶν ἀνομοιογενῶν ιγ' πολυέδρων ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις δ' καὶ ἑξαγώνοις δ', γωνίας μὲν ἔχει στερεὰς ιβ', πλευράς δὲ ιη' τῶν μὲν γὰρ τεσσάρων τριγώνων αἱ τε γωνίαι ιβ' εἰσὶν καὶ αἱ πλευραὶ ιβ', τῶν δὲ δ' ἑξαγώνων αἱ τε γωνίαι κδ' εἰσὶν καὶ αἱ πλευραὶ κδ' γενομένου δὴ τοῦ ἀριθμοῦ παντὸς λς' ἀναγκαῖόν ἐστιν τὸν μὲν τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀριθμὸν τρίτον μέρος εἶναι τοῦ προειρημένου ἀριθμοῦ, ἐπεὶ καὶ ἑκάστη τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐπιπέδοις γωνίαις περιέχεται γ', τὸ δὲ τῶν πλευρῶν πλήθος τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ, τουτέστιν τοῦ λς', ὥστε εἶναι πλευράς ιη'. τῶν δὲ τετρακαιδεκαέδρων τὸ πρῶτον περιέχεται τριγώνοις η' καὶ τετραγώνοις ζ', ὥστε ἔχειν στερεὰς μὲν γωνίας ιβ' (ἑκάστη γὰρ αὐτοῦ γωνία ὑπὸ τεσσάρων ἐπιπέδων γωνιῶν περιέχεται), πλευράς δὲ [ἔχει] κδ'. τὸ δὲ δεύτερον τῶν τετρακαιδεκαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις ζ' καὶ ἑξαγώνοις η', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ' (ἑκάστη γὰρ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ περιέχεται ὑπὸ γ' γωνιῶν ἐπιπέδων), πλευράς δὲ [ἔχει] λς'. τὸ δὲ τρίτον τῶν τετρακαιδεκαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ζ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευράς δὲ λς'. τῶν δὲ ἑκκαϊεικοσαέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε η' καὶ τετραγώνοις ιη', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευράς δὲ μη'. τὸ δὲ δεύτερον τῶν ἑκκαϊεικοσαέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις ιβ' καὶ ἑξαγώνοις η' καὶ ὀκταγώνοις ζ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας μη', πλευράς δὲ οβ'. τῶν δὲ δυοκαιτριακονταέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας λ', πλευράς δὲ ξ'.

5.358 τὸ δὲ δεύτερον τῶν δυοκαιτριακονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται πενταγώνοις ιβ' καὶ ἑξαγώνοις κ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευράς δὲ ρ'. τὸ δὲ τρίτον τῶν δυοκαιτριακονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευράς δὲ ρ'. τὸ δὲ ὀκτωκαιτριακοντάεδρον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε λβ' καὶ τετραγώνοις ἔξ, ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας κδ', πλευράς δὲ ξ'. τῶν δὲ δυοκαιεξηκονταέδρων τὸ μὲν πρῶτον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε κ' καὶ τετραγώνοις λ' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευράς δὲ ρκ'. τὸ δὲ λοιπὸν τῶν δυοκαιεξηκονταέδρων, ἐπεὶ περιέχεται τετραγώνοις λ' καὶ ἑξαγώνοις κ' καὶ δεκαγώνοις ιβ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας ρκ', πλευράς δὲ ρπ'. τὸ δὲ δυοκαιεννηκοντάεδρον, ἐπεὶ περιέχεται τριγώνοις τε π' καὶ πενταγώνοις ιβ', ἔξει στερεὰς μὲν γωνίας ξ', πλευράς δὲ ρν'. Ταῦτα μὲν οὖν τὰ ιγ' σχήματα [ἦτοι ἀνομοιογώνια ὄντα ἦ] ὑπὸ ἀνίσων καὶ ἀνομοίων πολυγώνων περιεχόμενα διὰ τὸ ἀτακτότερον παρητήσθω τὸ νῦν, τὰ δὲ καλούμενα ε' σχήματα

τῇ σφαίρᾳ συγκρίνειν ἄξιον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα μόνᾳ ταῦτα τὰς στερεὰς γωνίας ἴσας ἔχει, καὶ διὰ τοῦτ' εὐτακτα παρὰ τὰ λοιπὰ μᾶλλον ἐστίν. ὅτι δὲ πλείω τῶν ἐ' τούτων ἀδύνατόν ἐστιν εὑρεῖν ἄλλα σχήματα ἴσοις καὶ ὁμοίοις ἰσοπλεύροις πολυγώνοις περιλαμβανόμενα, καὶ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου καὶ ὑπὸ τινων ἄλλων ἀποδεδείκται. συγκρίνωμεν οὖν αὐτὰ ταῦτα πρότερον τὰ πολυέδρα τῇ σφαίρᾳ. Ἐστω γὰρ σφαῖρα μὲν ἐν ἣ τὸ Α, ἐν δέ τι τῶν προειρημένων ἐ' σχημάτων ἴσην ἔχον τὴν σύμπασαν ἐπιφάνειαν τῇ τῆς Α σφαίρας· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ σφαῖρα.

5.360 Νοείσθω γὰρ εἰς τὸ πολυέδρον ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, ὥστε τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων ἄπτεσθαι· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας· περιέχει γὰρ αὐτήν. ἀλλ' ἡ τοῦ πολυέδρου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ τῆς Α σφαίρας ἐπιφανείᾳ, ὥστε καὶ ἡ τῆς Α σφαίρας ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐγγεγραμμένης τῷ πολυέδρῳ σφαίρας· καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἄρα τῆς Α σφαίρας μείζων ἐστὶν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας. ἴση δὲ ἡ τῆς Α σφαίρας ἐπιφάνεια τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ· ὅρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς Α σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς Α σφαίρας, μείζων ἐστὶν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν ἐχούσης εὐθύγραμμον τὸ ἴσον τῇ τοῦ πολυέδρου ἐπιφανείᾳ καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐγγεγραμμένης αὐτῷ σφαίρας. ἀλλ' ὁ μὲν κῶνος ἴσος ἐστὶν τῇ Α σφαίρᾳ (τοῦτο γὰρ ἐκ τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους δεδειγμένων ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ τῶν ἄλλων ὑφ' ἡμῶν ὑποτεταγμένων λημμάτων ἐστὶ φανερόν), ἡ δὲ πυραμὶς ἴση τῷ πολυέδρῳ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Α σφαῖρα τοῦ ὑποκειμένου πολυέδρου. κ'. Ἐχει δὲ τινα σύγκρισιν καὶ ταῦτα τὰ ἐ' σχήματα πρὸς ἄλληλα, περὶ ἧς ὕστερον ἐπισκεψόμεθα· δείκνυται γὰρ ὑποκειμένων ἴσων τῶν ἐπιφανειῶν τὸ πολυεδρότερον αἰεὶ καὶ μείζων. οἶον τὸ μὲν εἰκοσάεδρον τοῦ δωδεκαέδρου, τὸ δὲ δωδεκάεδρον τοῦ ὀκτάεδρου, καὶ ὁμοίως τὸ μὲν ὀκτάεδρον τοῦ κύβου, ὁ δὲ κύβος τῆς πυραμίδος· ὁμοιον γάρ τι πέπονθεν τὰ στερεὰ ταῦτα τοῖς ἐπιπέδοις πολυγώνοις· καὶ γὰρ ἐπ' ἐκείνων, ὁπότε τὰς περιμέτρους ἴσας εἶχεν, αἰεὶ μείζων ἀπεδείκνυτο τὸ πολυγωνότερον, καὶ πάντων ὁ κύκλος μείζων, ὥσπερ ἐδείχθη νῦν τῶν πολυέδρων ἡ σφαῖρα.

5.362 πρόδηλον δ' ὅτι καὶ ὁ κῶνος καὶ ὁ κύλινδρος ἐκάτερος ὁ ἴσην ἔχων ἐπιφάνειαν τῇ τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν αὐτῆς. ὁ μὲν γὰρ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὅλην δὲ τὴν ἐπιφάνειαν μείζονα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἴσος αὐτῇ καταλαμβάνεται, ὅταν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἴσον ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ κύλινδρος ὁ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχων τῷ κῶνῳ, ἡ ἐστὶν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ γ' τοῦ ἄξονος τοῦ κῶνου, καὶ ἴσος ὢν τῷ κῶνῳ, ἴσος εὐρίσκεται καὶ τῇ σφαίρᾳ μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχων αὐτῆς αἰ γὰρ δύο βάσεις αὐτοῦ τῆς βάσεως τοῦ κῶνου, τουτέστιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, διπλασίους εἰσίν, ὥστε ὅταν ἐκάτερον τῶν σχημάτων ἴσην ἔχη τὴν ἐπιφάνειαν τῇ τῆς σφαίρας, τότε' ἐξ ἀνάγκης ἡ σφαῖρα ἐκατέρου σχήματος μείζων ἐστίν. Τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ τῆς συγκρίσεως τῆς σφαίρας πρὸς τὰ ἐ' σχήματα καὶ τὸν κῶνον καὶ κύλινδρον, τὰ δ' ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους, ὡς εἴρηται, δειχθέντα καὶ ἄλλως ἀποδείξομεν, προγράψαντες ὅσα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν συντείνει λημμάτια. (α'). Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ διαμέτρου καὶ τυχοῦσαι ἐπὶ τὴν διάμετρον κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΕ· ὅτι τὸ δις ὑπὸ ΖΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ. Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΕΗ, καὶ ληφθέντος τοῦ Θ κέντρου ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΕΘ τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΗΕΘ ἔσται λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΓΕΗ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἴση. ἀλλὰ καὶ ὀρθὴ ἡ Ζ τῇ Η ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΓΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΕΘ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΘΕΗ, ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ ΖΕΓ τῷ δις ὑπὸ ΘΕΗ ἐστὶν ἴσον.

5.364

ἀλλὰ τῷ δις ὑπὸ ΘΕΗ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ (ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΗΕ τῇ ΔΖ)· καὶ τὸ δις ὑπὸ ΖΕ ΕΓ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΖ ΔΗ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ. κα' (β'). Ἔστωσαν δὴ πάλιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τυχοῦσαι κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ, καὶ ἡ ΕΘΓ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΓΘ τῇ ΘΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ. Ἦχθω κάθετος ἡ ΘΚ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗΕ. ἐπεὶ παράλληλοι εἰσιν αἱ ΓΔ ΘΚ ΕΖ, καὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΓΕ τῆς ΕΘ, διπλῇ ἐστὶν καὶ ἡ μὲν ΓΔ τῆς ΘΗ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΗΚ, ὥστε καὶ συναμφοτέρος ἡ ΓΔ ΕΖ τῆς ΘΚ ἐστὶν διπλῇ. διὰ δὲ τὸ προδειχθὲν τὸ δις ὑπὸ ΚΘΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΚ. καὶ τὰ διπλάσια· τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΔΖ. κβ' (γ'). Ἔστω πάλιν τὸ ἡμικύκλιον καὶ τυχοῦσα ἡ ΓΕ καὶ κάθετοι αἱ ΓΔ ΕΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ΔΖ καὶ τῆς ὑποτείνουσας περιφέρειαν, ἥ ἐστὶν μετὰ τῆς ΓΕ ἡμικυκλίου. Προσαναγεγράφθω ὁ κύκλος, καὶ ἔστω διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΓΘ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΔ ἐπὶ τὸ Κ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΕΚ. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τὴν ΓΚ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΚ.

5.366 ἀλλὰ καὶ ἡ ΗΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· ἡ ΗΚ ἄρα συναμφοτέρῳ τῇ ΓΔ ΕΖ ἐστὶν ἴση [ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΗΕ]. ἡ δὲ τὴν λοιπὴν ὑποτείνουσα τοῦ ΓΕΘ ἡμικυκλίου ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Κ γωνία τῇ Θ, ἡ δὲ ὑπὸ ΘΕΓ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἴση ἐστὶν τῇ Η, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶν τὰ ΘΕΓ ΚΕΗ τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΘΕ καὶ τῆς ΕΗ, τουτέστιν τῆς ΔΖ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΗΚ ΓΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ ΕΖ καὶ τῆς ΓΕ. κγ' (δ'). Καὶ ἐκ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν ἡμικυκλίου τινὸς ὡς τοῦ ΑΒΓ περιφέρειά τις ὡς ἡ ΑΓΔ διαιρεθῇ εἰς ὅποσαοῦν ἴσα καὶ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, αἱ ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΕ ΕΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΑΒ στροφὴν γινόμεναι ἐπιφάνειαι ἴσαι εἰσὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται, ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΒ, τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΘ. Ἡ μὲν γὰρ ὑπὸ τῆς ΗΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΔΘ καὶ τῆς ΗΔ [ὥν μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εἰρημένου κύκλου]. λέγει γὰρ Ἀρχιμήδης ὅτι “ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις”. ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς ΗΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΚ ΔΘ καὶ τῆς ΗΔ, ὅπερ ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΕΒ ΚΘ ἴσον.

5.368 ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΓΗ ὁμοίως ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΚ [καὶ γὰρ τοῦ κύκλου προσαναπληρουμένου καὶ τῆς ἴσης τῇ ΕΒ εἰς τὸν κύκλον ἐναρμοζομένης διὰ τοῦ Η γίνεται τὸ ὑπ' αὐτῆς καὶ τῆς ΑΚ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΗΚ καὶ τῆς ΓΗ. ἡ δὲ ὑπὸ τῆς ΕΖ ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΜΝ· τοῦτο γὰρ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΝ ΖΜ καὶ τῆς ΕΖ], καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τὰ αὐτά. καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ἐσχάτης τῆς ΑΕ κωνικῇ ἐπιφάνειᾳ γινομένη ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΝ, ὅπερ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΝ (καὶ γὰρ ἰσογώνια ἐστὶν τὰ ΑΕΒ ΑΕΝ τρίγωνα, καὶ ἡ ὑπὸ τῆς ΑΕ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΕΝ· καὶ τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν). καὶ ἡ ὑπὸ πασῶν ἄρα τῶν ΔΗ ΗΓ ΓΖ ΖΕ ΕΑ γινομένη σύνθετος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒ ΑΘ. Δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἐὰν ἡ ὅλη τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια εἰς ἴσα διαιρεθῇ, ὧν μία ἐστὶν ἡ ΑΕ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐπιφάνεια κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΕΒΑ. κδ' (ε'), Διηρήσθω δὲ πάλιν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου περιφέρεια εἰς ἴσα ὅποσαοῦν, ἅφ' ὧν ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν, ὡς καταγράφεται·

ὅτι αἱ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινόμεναι ἐπιφάνειαι κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴσαι εἰσὶν κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ.

5.370 Κάθετοι ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ Ε Ζ Η ἐπὶ τὴν διάμετρον. διὰ δὴ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΞ τῇ ΞΔ καὶ καθέτους τὰς ΓΑ ΔΚ, τὸ ὑπὸ ΒΑΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ· τοῦτο γὰρ β' θεωρήματι προδεδεικται. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ τῆς ΓΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ διὰ τὸ αὐτὸ Ἀρχιμήδους ιζ' θεωρήμα· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΚ ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΓΔ γινομένη ἐπιφανείᾳ. ὁμοίως δὲ καὶ ὁ κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒ ΚΛ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι πάλιν τὴν ΔΟ τῇ ΟΕ, ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΔΕ γινομένη ἐπιφανείᾳ, καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τὰ αὐτά. καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ πασῶν τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινομένη ἐπιφανείᾳ.

5.372 κε'. Ὡς οὕτως τὸ αὐτό. ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓΔΕΖΗΘΒ πολύγωνον εἰς ἕτερον ἡμικύκλιον περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ ΡΣ, καὶ κάθετοι ὁμοίως ἤχθωσαν· γίνεται δὴ διπλῇ ἡ μὲν ΓΔ τῆς ΓΡ, ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΘΣ διὰ τὸ προκείμενον, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ μετὰ τῆς ΓΔΘ ἴση ἐστὶν τῇ ΡΘΣ. ὑποτείνει δὲ τὴν ΓΔΘ ἡ ἐπὶ τὰ Γ Θ ἐπιζευγνυμένη ἴση τῇ ΑΒ· ἔσται δὴ διὰ τὸ γ' θεωρήμα τὸ ὑπὸ ΘΓ ΑΚ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΑΚ, ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΔΚ καὶ τῆς ΓΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΑ ΚΛ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΚ ΕΛ καὶ τῆς ΔΕ. καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς τὰ αὐτά. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ ἴσος ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ΗΘ γινομέναις ἐπιφανείαις. κς' (ς'). Ἡμικύκλιον οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω τυχοῦσα ἡ ΑΗ, καὶ ἡ ΑΗ περιφέρεια διηρήσθω εἰς ἴσας ὅποσαςοῦν περιφερείας τοῖς Μ Ν Ξ σημείοις καὶ ἀπὸ τῶν Α Η καὶ τῶν διαιρέσεων ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ, καὶ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΗΘ καθέτου οὔσης τῆς ΗΡ· ὅτι, εἰ περὶ ἄξονα τὸν ΑΒ στραφέν τὸ ἡμικύκλιον ἀποκατασταίῃ, ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΗ μείζων ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ.

5.374 Ὡς οὕτως κάθετοι ἀπὸ τοῦ Ζ, ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ ἢ ΖΛ, ἐπὶ δὲ τὴν ΗΡ ἢ ΖΚ, τῆς ΖΚ καθέτου, ὀξείας μὲν οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, μεταξὺ τῶν Η Θ πιπτούσης, ἀμβλείας δὲ οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, ἐκτὸς τοῦ Η, ὡς ἔχουσιν αἱ καταγραφαί. ἐπεὶ οὖν τὸ δις ὑπὸ ΡΗΘ ἢ ΡΗΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΒ ΑΡ (τοῦτο γὰρ ἐν τῷ α' θεωρήματι δέδεικται), κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ ΑΡ καὶ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ τῷ τε δις ὑπὸ ΡΗΘ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΒΑΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ ΑΡ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΒΑΡ, ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ τῷ δις ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ καὶ τοῦ ὑπὸ ΒΑΛ. ἀλλὰ τῷ δις ὑπὸ ΡΗΘ καὶ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ (τοῦτο γὰρ ἐξῆς δειχθήσεται)· καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΑΛ καὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ.

5.376 ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων, καὶ ἐδείχθη πρὸ ἐνὸς τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΕ ΕΖ ἐφαπτομένων κωνικῶν ἐπιφανειῶν γινόμενον σχῆμα ἴσον κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΛ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΖΗ ἐν τῇ στροφῇ γινόμενον σχῆμα κωνικῆς ἐπιφανείας ἴσον κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ [ἔστιν Ἀρχιμήδους ιζ' θεωρήματι], τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ΓΑ γινόμενον σχῆμα κύκλος ἐστὶν οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ ΗΘ, οἱ τρεῖς ἄρα κύκλοι, τουτέστιν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ γινομένη ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΗΘΚ, τουτέστιν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ. (ζ'). Ὅτι δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΗΘΚ, δῆλον ἐντεῦθεν. ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς, ὀξείας οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, τὸ ἀπὸ ΖΘ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ ΖΗ ΗΘ, ὡς ἔστιν δευτέρῳ στοιχείων·

τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΗ (ἴση γάρ ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ). ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΘΗ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΗΚ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΗΘΚ· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ λοιπὸν ἄρα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΗΘΚ ἐστὶν ἴσον. ἀμβλείας δὲ οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΗΘ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, πάλιν τὸ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον γίνεται τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ οὕτως· ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ μεῖζόν ἐστὶν τῶν ἀπὸ ΖΗ ΗΘ τῷ δις ὑπὸ ΘΗΚ καὶ τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ τοῦ ἀπὸ ΗΘ μεῖζόν ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΘΗΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ.

5.378 τῷ δὲ ἀπὸ ΘΗ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΚΘΗ διὰ τὸ γ' τοῦ β' στοιχείων· καὶ τὸ ἥμισυ ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΘΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Ζ Θ ἔλασσόν ἐστὶν αἰεὶ τοῦ δις ἀπὸ Ζ Η, δῆλον ὡς ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΗ γινομένη ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΗ μετὰ δύο κύκλων, ὧν ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΖΗ, ἐλάσσων ἐστὶν. κζ' (η'). Ὅτι τὸ δις ὑπὸ ΡΗΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ. Κείσθω τῇ μὲν ΗΡ ἴση ἡ ΡΣ, τῇ δὲ ΘΡ ἡ ΡΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΣ τῇ ΘΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΡΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΡΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ ΡΗΘ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΡΘΗ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΗΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΗΡ τῇ ΡΣ, ἡ δὲ ΘΡ τῇ ΡΛ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΣΗΘ τῷ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΗΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΚΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΗΘ [τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΗΣΛ] μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΗΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ.

5.380 ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ τῷ ὑπὸ ΛΗΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τῷ ὑπὸ ΗΘ ΛΣ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΣΗΘ, ὅπερ ἐστὶν τὸ δις ὑπὸ ΡΗΘ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΘΗ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΗΡΚ καὶ τῆς ΗΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΘ. κη' (θ'). Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Γ Δ· ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ ΑΔ καὶ τῆς ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον τῷ δις ὑπὸ ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ. Τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, τῇ δὲ ΑΓ ἡ ΑΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ διὰ τὸ γ' θεωρήματα τοῦ β' στοιχείων, τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΓΒ. τῷ δὲ δις ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΖΓΒ (διπλὴ γάρ ἐστὶν ἡ ΖΓ τῆς ΓΑ)· καὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΒ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΓΒ ΕΖ, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓ ΓΒ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΕΓΒ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ (τὸ γὰρ ὑπὸ ΕΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΒΓ διὰ τὸ αὐτὸ στοιχείων)· καὶ τὸ ὑπὸ ΕΒΓ ἄρα, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ ΑΔ καὶ τῆς ΒΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ, ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ [ὥστε τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΔ καὶ τῆς ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΔ]. κθ' (ι').

5.382 Ἔστω τις κύκλου περιφέρεια ἡ ΚΑΒΓ καὶ εὐθεῖα ἡ Δ· ὅτι δυνατόν ἐστιν ἀπειραχῶς ἀπολαβεῖν τὴν ΚΑ περιφέρειαν μέρος οὔσαν τῆς ΚΒΓ, ὅπως, ἐφαπτομένων ἀχθειῶν τῶν ΚΕ ΑΕ, ἐλάσσονες ὦσιν αὗται τῆς Δ. Ἔστω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΚΗ ἴση τῇ Δ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ ΗΒΘ. τέμνοντες δὲ τὴν ΚΒΓ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες λείψομέν τινα περιφέρειαν ὡς τὴν ΚΑ ἐλάσσονα τῆς ΚΑΒ. καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος ἡ ΑΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΚΕ, καὶ ἔσται γεγενῶς τὸ ζητούμενον· ἡ γὰρ διὰ τῶν Θ Α ἐκβάλλεται ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ αἱ ΚΕΑ τῆς ΚΖ ἐλάσσονές εἰσιν διὰ τὸ μεῖζονα εἶναι τὴν ΖΕ ἑκατέρας τῶν ΑΕ ΕΚ, ὁρθῆς οὔσης τῆς ὑπὸ ΖΑΕ, καὶ πολὺ μᾶλλον τῆς Δ ἴσης ὑποκειμένης τῇ ΚΗ. λ' (ια'). Παντὸς τμήματος σφαίρας ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶν τῇ ἐκ τοῦ πόλου τοῦ τμήματος. Ἔστω γὰρ τμῆμα σφαίρας, οὗ πόλος μὲν ἐστὶν τὸ Κ σημεῖον, ἐκ πόλου δὲ ἡ ΚΒ, καὶ ὁ διὰ τῶν Κ Β μέγιστος, οὗ διάμετρος ἡ ΚΓ, ἐφ' ἣν κάθετος ἡ ΒΑ· λέγω ὅτι σφαιρικὴ

ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ AB, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον, ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ KB.

5.384 Ἐστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἄνισα ταῦτα, καὶ πρότερον μείζων ἢ τοῦ τμήματος ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν νοείσθω ἐλάσσων κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ Θ, ὥστε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος μείζονα εἶναι τῶν δύο κύκλων, οὗ ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ KB καὶ οὗ διάμετρος ἡ Θ, καὶ διηρήσθω ἡ KB περιφέρεια εἰς ἴσας ὅποσασοῦν, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν, ὡς καταγέγραπται, ὥστε ἐκάστην αὐτῶν ἐλάσσονα εἶναι τῆς δυναμένης τὸ η' τοῦ ἀπὸ Θ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν προγέγραπται. ἐπεὶ οὖν μείζον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Θ τοῦ οκτάκις ἀπὸ HB, καὶ ὁ περὶ διάμετρον ἄρα τὴν Θ κύκλος μείζων ἐστὶν δύο κύκλων ὧν ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ HB. οὗτοι δὲ οἱ δύο κύκλοι καὶ ὁ κύκλος οὗ ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ KB, ὡς προδεδείκται τῷ ζ' θεωρήματι, μείζονές εἰσιν τῆς γινομένης ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ἐπιφανείας, ἣτις περιγέγραπται περὶ τὸ τμήμα τῆς σφαίρας· ἔσται ἄρα αὕτη ἡ ἐπιφάνεια, καὶ πολὺ μᾶλλον ἢ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, ἐλάσσων κύκλων οὗ τε ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ KB καὶ οὗ διάμετρος ἐστὶν ἡ Θ. ἀλλὰ καὶ μείζων ὑπόκειται, ὅπερ ἄτοπον. λα' (ιβ'). Ἐστω δὲ μείζων ὁ κύκλος οὗ ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ KB τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος· καὶ ὁ κύκλος ἄρα οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΓKA μείζων ἐστὶν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. νοείσθω δὲ μεταξὺ αὐτῶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ Θ KA· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ KΓ τῆς Θ· ἔστω τῇ Θ ἴση ἡ ΓΟ, καὶ διηρήσθω ἡ KOB περιφέρεια εἰς περιφερείας ἴσας ὅσασδήποτε, ὧν ἐκάστη ἐλάσσων ἔστω τῆς KΛΟ, ὡς ἔστιν πρὸ ἐνός, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KΛ ΛΜ ΜΝ ΝΒ.

5.386 ἡ δὲ ὑπὸ τούτων γινομένη ἐπιφάνεια [κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν KA στροφῆς ἀποκατάστασιν] περιέχεται ὑπὸ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας [καὶ τὴν αὐτὴν αὐτῷ βάσιν ἔξει] καὶ ἔστιν ἴση μὲν κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται, ἐπιζευχθείσης τῆς ΓΛ, τὸ ὑπὸ ΛΓ KA διὰ τὸ δ' θεωρήμα, ἐλάσσων δὲ τῆς σφαιρικῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας· πολλῷ ἄρα ὁ κύκλος οὗ ἢ ἐκ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΟΓ KA ἢ τὸ ὑπὸ Θ KA ἐλάσσων ἐστὶν τῆς σφαιρικῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας. ἀλλὰ καὶ μείζων ὑπόκειται μεταξὺ ὧν τοῦ τμήματος καὶ τοῦ κύκλου οὗ ἢ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ KB, ὅπερ ἀδύνατον· ἴσα ἄρα ἐστὶν τὰ ζητούμενα. Καὶ δῆλον ὡς, ἐὰν τὸ A κέντρον ᾖ, γίνεται τὸ τμήμα ἡμισφαίριον, καὶ ἔσται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὅλης ἴση κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ KΓ, ἢ καὶ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τμημάτων, ὅποια ἂν ᾖ, τὸ αὐτὸ συναχθήσεται. λβ' (ιγ'). Ἐὰν ὦσιν γ' εὐθεῖαι ὡς αἱ A B Γ, ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ A B, ὕψος δὲ ἡ Γ, ἴσος ἐστὶν κῶνι οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ B Γ, ὕψος δὲ ἡ A.

5.388 Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κύκλοι οἱ E Z, καὶ τοῦ μὲν E ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ A B, τοῦ δὲ Z ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ ὑπὸ B Γ, ὕψος δὲ τοῦ μὲν E κῶνου ἔστω τὸ EH ἴσον τῇ Γ, τοῦ δὲ Z ὕψος τὸ ZΘ ἴσον ἔστω τῇ A. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς Γ, τουτέστιν ὡς ἡ ZΘ πρὸς τὴν EH, τὸ ὑπὸ A B πρὸς τὸ ὑπὸ B Γ [τουτέστιν ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ E πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Z], τουτέστιν ὁ E πρὸς τὸν Z, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ E κύκλος, ὕψος δὲ τὸ EH, τῷ κῶνι οὗ βάσις μὲν ὁ Z κύκλος, ὕψος δὲ τὸ ZΘ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. λγ' (ιδ'). Τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ μενούσης τῆς BΓ περιενοχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθεστάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κῶνι οὗ ἢ μὲν βάσις ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ τῆς AB ἐν τῇ στροφῇ γινομένη κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AB κάθετος. Ἦχθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰς AB BΓ κάθετοι ἀπὸ τῶν A Γ αἱ ΓΕ ΑΔ. ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ Δ ὀρθῇ τῇ E ἴση, κοινὴ δὲ ἡ B, ἰσογώνιον γίνεται τὸ ABA τρίγωνον τῷ BΓΕ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ BA πρὸς ΑΔ, ἡ BΓ πρὸς ΓΕ.

5.390 ὡς δὲ ἡ BA πρὸς ΑΔ, τὸ ὑπὸ BAA πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ὑπὸ BAA πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΕ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ

ὑπὸ ΒΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΓΕ, ἴσος ἐστὶν κώνω οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ (διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι πάλιν τὰς βάσεις αὐτῶν τοῖς ὕψεσιν). καὶ ἔστι τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐν τῇ στροφῇ στερεὸν ἴσον τῷ κώνω οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ ἡ ΒΓ· τὸ αὐτὸ ἄρα στερεὸν ἴσον ἐστὶν τῷ κώνω τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΒΑΔ, ὕψος δὲ τὴν ΓΕ κάθετον. ἀλλ' ὁ μὲν κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἐν τῇ στροφῇ γινομένη κωνικῇ ἐπιφανείᾳ διὰ τὸ ἰε' πάλιν Ἀρχιμήδους θεώρημα [παντὸς γὰρ κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια, χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον ἀνάλογον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κώνου]. ἐὰν ἄρα μενούσης τῆς ΒΓ περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἴση τῇ ὑπὸ τῆς ΑΒ ἐν τῇ στροφῇ γινομένη κωνικῇ ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος. λδ' (ιε'). Ἔστω πάλιν τρίγωνον τὸ ΑΓΖ καὶ τυχοῦσα διήχθω ἡ ΓΒ, ἥς μενούσης περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθεσάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος ἴσος τῇ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένη ἐπιφανείᾳ κατὰ τὴν στροφήν, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος.

5.392 Ἐκβεβλήσθω ἡ ΖΑ ἐπὶ τὸ Β· διὰ τὸ προδειχθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ βάσις μὲν ἴση ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ΒΖΓ γινόμενον ὁμοίως ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΒΖ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΓΖ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κολούρου κώνου ἣν ποιεῖ ἡ ΑΖ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό [ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΖ]. λε' (ιζ'). Ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΒΓ καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΓ ΑΔ· ὅτι τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ τριγώνου ἐν τῇ στροφῇ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ κέντρου ἐστὶν ἡ ΓΖ, ὕψος δὲ ἡ διπλῇ τῆς ΑΖ, τουτέστιν τῆς ΔΓ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ ΑΓ παραλληλογράμμου γινόμενος κύλινδρος ἴσος ἐστὶν κώνω βάσιν μὲν ἔχοντι κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΔ, ὕψος δὲ τὴν τριπλασίαν τῆς ΔΓ, ὁ δὲ ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου γινόμενος κώνος βάσιν μὲν ἔχει τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου μετὰ τοῦ ὑπὸ τοῦ ΑΔΓΖ παραλληλογράμμου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως ὕψος ἔχοντι τὴν ΒΔ μετὰ τριῶν τῶν ΔΓ.

5.394 κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ ὑπὸ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου γινόμενος ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως κώνος, ὕψος ἔχων τὴν τε ΒΔ καὶ ἅπαξ τὴν ΔΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ ἢ τῆς ΑΖ. Ἐτι δὲ καὶ τοῦτο φανερόν· ὅτι τῇ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένη ἐπιφανείᾳ, κυλινδρικῇ οὕσῃ, ἴσος ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως (τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν ἰδ' θεωρήματι περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου), ὥστε ἡ ὑπὸ τῆς ΑΖ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ δις ὑπὸ τῶν ΖΓΔ. λς' (ιζ'). Ἐὰν μέντοι τὸ Β μετὰ τὸν ἦ τῶν Δ Γ, εὐχερέστερον δείκνυται. ὁ γὰρ ὑπὸ τοῦ ΑΔΓΖ παραλληλογράμμου γινόμενος κύλινδρος, τοῖς ὑπὸ τῶν ΑΒΔ ΖΒΓ τριγώνων γινομένοις κώνοις τὴν αὐτήν ἔχων [αὐτοῖς] βάσιν καὶ ὕψος τὴν ΔΓ, ὑπερέχει αὐτῶν τῷ ἀπὸ τῆς αὐτῆς βάσεως κώνω ὕψος ἔχοντι τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΖ τριγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν τῷ αὐτῷ κώνω, ὅπερ ~ λζ' (ιη'). Ἔστω τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὰς ΑΔ ΔΓ κάθετοι ἴσαι, καὶ διήχθω τις ἡ ΒΕ, καὶ μενούσης αὐτῆς περιενεχθὲν τὸ τετράπλευρον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθεσάτω· ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ τετραπλεύρου στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνω οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ στροφῇ γινομέναις ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ

τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ κάθετος. Ἐπεξεύχθω ἡ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ τετραπλεύρου γινόμενον στερεὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΔ ΔΓΒ τριγώνων ἐστὶν γινόμενον.

5.396 καὶ δέδεικται πρὸ δυοῖν τὸ μὲν ὑπὸ τοῦ ΑΒΔ γινόμενον ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΑΔ γινομένη ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ κάθετος, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ ΔΒΓ τριγώνου ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῆς ΔΓ γινομένη ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραπλεύρου γινόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ γινομέναις κατὰ τὴν στροφὴν ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ μίαν τῶν ΑΔ ΔΓ. λη' (ιθ'). Κἂν ἀντὶ τοῦ τετραπλεύρου δὲ πεντάπλευρον ᾗ τὸ ΔΑΒΖΓ ἢ καὶ ὅποσασοῦν πλευρὰς ἔχον, ὥστε τὰς ἀπὸ τοῦ Β ἐφ' ἐκάστην τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΖ καθέτους ἴσας εἶναι, δειχθήσεται ὁμοίως τὸ ὑπὸ τοῦ πολυγώνου γινόμενον στερεὸν ἴσον κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶν ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ΓΖ γινομέναις ἐπιφανείαις, ὕψος δὲ μία τῶν εἰρημένων ἴσων καθέτων. καὶ οὐδὲν διαφέρει, ἂν ἡ ἐσχάτη ἐφαρμόζη τῇ ΕΒ. [ἐξῆς τὸ σχῆμα.] λθ' (κ'). Τὸ δ' αὐτό ἐστὶν τῷ εἰρημένῳ λέγειν ὅτι, ἐὰν περὶ ἡμικύκλιον οὗ κέντρον τὸ Σ, γραφῇ τι πολύγωνον ὅποσασοῦν ἔχον πλευρὰς, ὡς τὸ ΒΕΖΘΛΓ, μενούσης δὲ τῆς ΒΓ περιεγεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεόν, ὃ δὴ καὶ περιέγραπται περὶ τὴν σφαῖραν ἣν ποιεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ἡ ἐπιφάνειά ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν γινομένη κατὰ τὴν στροφὴν, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Σ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰς πλευρὰς κάθετοι, ὡς αἱ ΣΜ, ΣΚ ΣΗ ΣΑ ΣΔ, ἴσαι εἰσίν.

5.398 καὶ οὐ διαφέρει, ἐὰν τὸ Δ τῷ Ο, ἢ τὸ Μ τῷ Ξ ταυτὸν ᾗ. Δῆλον δ' ὅτι, κἂν περὶ τομέα κύκλου, οἷον τὸν ΞΣΑ ἢ ΜΣΑ περιγραφῇ τι πολύγωνον, τὰ αὐτὰ δειχθήσεται. μ' (κα'). Πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶν κώνῳ οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου. Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καί, εἰ δυνατόν, πρότερον ἔστω μείζων ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τουτέστιν ὁ κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, τουτέστιν ἐλάσσων μὲν τοῦ κώνου, μείζων δὲ τῆς σφαίρας, νοείσθω κῶνος ἄλλος, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ΒΔ, ἐλάσσων οὕσα τῆς ΓΒ, καὶ ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ ΑΕΒ ἤχθω ἡ ΑΚ δυναμένη τὸ δις ὑπὸ ΑΒ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ ΑΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Κ Β. καὶ τὰ ἡμίση· τὸ ὑπὸ ΑΒΔ ἴσον ἐστὶν ἡμίσει τῷ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὰ Β Κ [τὸ γὰρ δις ὑπὸ ΑΒΔ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΑΒ ΓΔ, τουτέστιν τὸ δις ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ ἀπὸ ΑΒ ἐστὶν ἴσον ὃν τοῖς ἀπὸ ΑΚΒ, ὁρθῆς οὔσης τῆς πρὸς τῷ Κ ἐν ἡμικυκλίῳ].

5.400 ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ ἡμικύκλιον πολύγωνον ἰσόπλευρον [ἄρτιόπλευρον] τὸ ΑΕΖΗΘΛΒ, ὥστε ἐλάσσονα εἶναι τὴν ΒΛ περιφέρειαν τῆς ΒΛΚ (δυνατὸν δὲ τοῦτο· τέμνοντες γὰρ τὸ ἡμικύκλιον δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν περιφέρειαν δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες λείψομέν τινα περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΒΛΚ, ὡς τὴν ΒΛ). καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΛ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΟ. ἐπεὶ οὖν ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΛΒ τρίγωνον τῷ ΓΟΒ τριγώνῳ καὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῆς ΓΟ, ἡ δὲ ΛΒ τῆς ΒΟ, καὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΒ τῆς ΑΛ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΛ ΓΟ μεῖζόν ἐστὶν ἡμίσεος τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΒ. διὰ ταῦτα δὴ κἂν μὲν τὴν ΚΒ ἐπιζεύζωμεν, παράλληλον δὲ διὰ τοῦ Γ μέχρι τῆς ΚΒ τῇ ΑΚ ἀγάγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς ἀγομένης παραλλήλου καὶ τῆς ΑΚ μεῖζόν ἐστὶν ἡμίσεος τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΒ εὐθείας· καὶ πολλῷ τὸ ὑπὸ ΑΛ ΓΟ ἡμίσεος τοῦ ἀπ' αὐτῆς, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΑΒΔ.

5.402 καὶ ὁ κῶνος ἄρα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΛ ΓΟ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒΔ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ. ἀλλ' ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΛ ΓΟ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ, ἴσος ἐστὶν κώνῳ οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΛ ΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΟ· καὶ ὁ κῶνος ἄρα οὗτος, τουτέστιν οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΛΑΒ, ὕψος δὲ ἡ ΓΟ, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου, οὗ ἡ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΑΒΔ, ὕψος δὲ ἡ ΑΒ, τουτέστιν τοῦ

ἴσου κώνου οὗ ἢ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ AB, ὕψος δὲ ἡ BD [ὥς γὰρ τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ὑπὸ ABD, οὕτως ἡ AB πρὸς BD]. καὶ δέδεικται τῷ δ' θεωρήματι ἡ γινομένη ὑπὸ πασῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐπιφάνεια κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἴση κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ AAB· καὶ ὁ κώνος ἄρα οὗ ἢ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ AAB, ὕψος δὲ ἡ GO, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ εἰς τὴν σφαῖραν στερεῷ σχήματι, μείζων ἐστὶν τοῦ κώνου οὗ ἢ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐστὶν ἡ AB, ὕψος δὲ ἡ BD, ὥστε καὶ τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα μείζον ἐστὶν τοῦ κώνου οὗ ἢ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐστὶν ἡ AB, ὕψος δὲ ἡ BD.

5.404 ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κώνος οὗτος μείζων τῆς σφαίρας· πολλῶν ἄρα μείζον ἐστὶν τῆς σφαίρας τὸ στερεὸν σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτήν, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν. μα' (κβ'). Ἐστω δὲ ἐλάσσων τῆς σφαίρας ὁ εἰρημένος κώνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ AB, ὕψος δὲ ἡ GB, τουτέστιν οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ABΓ, ὕψος δὲ ἡ AB [ὥς γὰρ ἡ AB πρὸς BΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ὑπὸ ABΓ], καὶ μεταξὺ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου νοεῖσθω κώνος οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ K μείζων τῆς AB, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ἡμικύκλιον πολύγωνον ἰσόπλευρον, ὥστε μίαν αὐτοῦ πλευρὰν τὴν ΔΕ τῆς ὑπεροχῆς τῶν K AB ἐλάσσονα εἶναι. καὶ ἔστιν μείζων ἡ ΔΕ τῶν ΔΑ BM, ἐπεὶ καὶ ἡ ΝΔ τῆς ΔΑ· καὶ ἡ ΔΜ ἄρα τῆς K ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ γινομένη ὑπὸ τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΔΜ στροφὴν διὰ τὸ δ' θεωρήμα ἴση ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ AB, δηλὸν ὡς καὶ τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτοῦ στερεόν, ὃ δὲ περιγέγραπται περὶ τὴν σφαῖραν ἣν ποιεῖ τὸ ἡμικύκλιον, ἴσον ἐστὶν κώνῳ, οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΔΜ AB, ὕψος δὲ ἡ GB ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διὰ τὸ κ' θεωρήμα, [τῷ δὲ κώνῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐστὶν ἡ AB, ὕψος δὲ ἡ BΓ, τουτέστι τῷ κώνῳ, οὗ ἢ μὲν βάσις ἐστὶν ἴση κύκλῳ οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ABΓ, ὕψος δὲ ἡ AB, ἴσος ἐστὶν κώνος, οὗ ἢ μὲν βάσις ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΔΜ AB, ὕψος δὲ ἡ BΓ, διὰ τὸ εἶναι πάλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΜ AB πρὸς τὸ ὑπὸ ABΓ, οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BΓ, καὶ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ τὸ γινόμενον ἄρα ὑπὸ τοῦ πολυγώνου στερεὸν κατὰ τὴν περὶ ἄξονα τὴν ΔΜ στροφὴν ἴσον ἐστὶν κώνῳ οὗ ἢ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΔΜ AB, ὕψος δὲ ἡ BΓ].

5.406 καὶ ἔστιν μείζων ἡ K τῆς ΔΜ, ὃ δὲ κώνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν κύκλος οὗ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ K AB, ὕψος δὲ ἡ BΓ, ἐλάσσων ἐστὶν τῆς σφαίρας· πολλῶν ἄρα [μᾶλλον] τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν ἑλάσσον ἐστὶν τῆς σφαίρας, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσος ἄρα ὁ κώνος τῇ σφαίρᾳ. μβ' (κγ'). Σφαίρας δοθείσης καὶ λόγου, τεμεῖν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπιπέδῳ τινί, ὥστε τὰς ἐπιφανείας τῶν τμημάτων πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. Ἐστω γὰρ σφαῖρα, ἥς μέγιστος κύκλος ὁ ADBE, καὶ διάμετρος ἡ AB, ὃ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Z πρὸς H, καὶ τετμήσθω ἡ AB κατὰ τὸ Γ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν AΓ πρὸς ΓB, οὕτως τὴν Z πρὸς H, καὶ διὰ τοῦ Γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ AB εὐθείᾳ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΔ BΔ, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ Θ K, ὁ μὲν Θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ AΔ, ὃ δὲ K τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ BΔ· ἔσται ἄρα ὁ μὲν Θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΔAE τμήματος, ὃ δὲ K τοῦ ΔBE τμήματος· τοῦτο γὰρ προδεδείκται.

5.408 καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ADB καὶ κάθετος ἡ ΔΓ, ἔστιν ὡς ἡ AΓ πρὸς ΓB, τουτέστιν ἡ Z πρὸς H, τὸ ἀπὸ AΔ πρὸς τὸ ἀπὸ BΔ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Θ κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ K κύκλου, τουτέστιν ὁ Θ κύκλος πρὸς τὸν K κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΔAE τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΔBE τμήματος τῆς σφαίρας. μγ'. Ὦντων δὲ τούτων φανερόν ὅτι καὶ πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστιν τῆς σφαίρας, καὶ ἡ

ἐπιφάνεια αὐτοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἡμικυκλίου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΕΓ, οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ, διχοτομία δὲ τὸ Ε, καὶ κέντρον τὸ Ζ, ὁπότεν τρεῖς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν Α Ε Γ, ὡς αἱ ΑΒ ΒΔ ΔΓ, μενούσης δὲ τῆς ΑΓ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ὁ γινόμενος ὑπὸ τοῦ ΑΒΔΓ παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου κύλινδρος πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ὑπὸ τοῦ ἡμικυκλίου γινομένην ἡμιόλιον λόγον ἔχει ὄνπερ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῆς ΒΔ γινομένη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἴση ἐστὶν κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου [μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῆς ΒΔ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΒ ΓΔ, τουτέστιν τῷ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου] ἐστὶν ἡ ΑΓ, οὗτος δὲ ὁ κύκλος ἴσος ἐστὶν τέσσαρσι μεγίστοις τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, δέδεικται δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια δ' μεγίστοις ἴση, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΒΔ γινομένη ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν τῇ τῆς σφαίρας ἐπιφανείᾳ· μετὰ δύο ἄρα κύκλων, οἳ εἰσὶν βάσεις τοῦ κυλίνδρου, λόγον ἔχει πρὸς τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν, ὃν ἔχει τὰ ζ' πρὸς τὰ δ'.

5.410 οὗτος δὲ ὁ λόγος ἡμιόλιός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας * * * ἔκτον μέρος ἐστὶν τοῦ παντός κυλίνδρου, ἡμιόλιος ἄρα καὶ ὁ κύλινδρος τῆς σφαίρας. [Ἐδείχθη δὲ ἀνώτερον, κἂν μὴ εἰς δύο ἴσα ἡ περιφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου τμηθῇ, ἀλλ' εἰς ὅποσαοῦν, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν, ὡς ἐκεῖ καταγέγραπται, ἡ ὑπὸ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων γινομένη κατὰ τὴν ὁμοίαν στροφὴν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶν ὁμοίως δ' μεγίστοις κύκλοις.] Καὶ τὰ μὲν περὶ τῶν ὑπὸ Ἀρχιμήδους δειχθέντων ἐν τῷ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου τοσαῦτ' ἐστίν, ἐξῆς δὲ τούτοις γράψομεν, ὡς ὑπεσχόμεθα, τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων πέντε σχημάτων, πυραμίδος τε καὶ κύβου καὶ ὀκταέδρου δωδεκαέδρου τε καὶ εἰκοσαέδρου [καὶ τὴν ἔφοδον τῶν ἀποδείξεων ἐχούσας], οὐ διὰ τῆς ἀναλυτικῆς λεγομένης θεωρίας, δι' ἧς ἔνιοι τῶν παλαιῶν ἐποιοῦντο τὰς ἀποδείξεις [τῶν προειρημένων σχημάτων], ἀλλὰ διὰ τῆς κατὰ σύνθεσιν ἀγωγῆς ἐπὶ τὸ σαφέστερον καὶ συντομώτερον ὑπ' ἐμοῦ διεσκευασμένης [ἐπεὶ καὶ τὰ λήμματα πάντα μικρά τε καὶ μεγάλα διὰ τοὺς πολλοὺς τῶν φιλομαθούντων κατέταξα τὸν ἀριθμὸν ἐκκαίδεκα, ὧν ἐστὶν ἐνταῦθα χρεία].

5.412 προγράφεται δὲ [τῶν συγκρίσεων] τάδε. μδ' (α'). Παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζον μὲν ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τετραπλάσιον. Ἐστω γὰρ τρίγωνον ἰσοπλευρον τὸ ΑΒΓ καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν ἡ ΑΘ (δίχα δηλονότι τέμνουσα τὴν ΒΓ), καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ (δήλον γὰρ ὅτι ὑπερπεσεῖται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον διὰ τὸ ἐλάσσονα εἶναι τὴν ΑΘ κάθετον τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου), καὶ διὰ τοῦ Α παράλληλος ἦχθω τῇ ΒΓ ἡ ΖΑΗ. ἐπεὶ οὖν τετραπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΘ δυνάμει, ἐπίτριτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΘ δυνάμει, τουτέστιν ἡ ΔΒ τῆς ΒΖ· ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΖ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῇ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ΒΕ τετράγωνον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ τὸ ΒΕ ἄρα τετράγωνον ἔλασσόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ΖΓ παραλληλογράμμου τουτέστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. τὸ ΒΕ ἄρα τετράγωνον ἔλασσον μὲν ἢ τετραπλάσιόν ἐστιν, μεῖζον δὲ ἢ διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. με' (β'). Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀκταέδρου κάθετος δυνάμει τρίτον μέρος ἐστὶν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἐστω τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου τὸ ΑΒΓ, ἐν τῇ σφαίρᾳ ὄν, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΔΕ· φανερόν δὴ ἐκ τῶν σφαιρικῶν ὅτι τὸ Ε κέντρον ἐστὶν τοῦ κύκλου.

5.414 ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΒ ΒΔ· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΔΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ὀκταέδρῳ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶν τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, ἔστιν δὲ καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας δυνάμει τετραπλασία,

διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ τοῦ ἀπὸ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ τοῦ μὲν ἀπὸ ΒΕ τριπλάσιόν ἐστιν διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων, τοῦ δὲ ἀπὸ ΒΔ [ἐστίν] διπλάσιον, τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΔ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἡμιόλιον. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ τοῖς ἀπὸ ΒΕΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΕΔ ἡμιόλια τοῦ ἀπὸ ΒΕ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΕ τοῦ ἀπὸ ΔΕ· τριπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΕ ΕΔ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΒΔ, τοῦ ἀπὸ ΔΕ. Ἄλλως τὸ αὐτό. μζ' (γ'). Ἐκκείσθω τετράγωνον, ἐφ' οὗ τὸ ἥμισυ τοῦ ὀκταέδρου ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ τε ΑΓ ΒΔ διάμετροι τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκ κέντρου ἐστὶν τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἀπὸ τοῦ Ζ κέντρου τοίνυν ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΗ (ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ), καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστιν τὸ ΑΒΕ τρίγωνον, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ, καὶ ἡ ΕΗ ἥξει διὰ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον κύκλου· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒΕ κύκλου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΕΗ πεσεῖται.

5.416 πιπτέτω ὡς ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΑΗ ἡμίους ὀρθῆς ἐστὶν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΑ ὀρθή· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΗ ἡμίους ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΖΗ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΕΖ· τριπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΕΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΗ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ ΕΖΗ ἴσα ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΗ διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ΕΖ πρὸς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον· καὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ ἄρα τριπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΕΖΗ ΕΖΘ τρίγωνα· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΘ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀκταέδρου. τριπλάσιόν ἐστιν. μζ' (δ'). Ἐστω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Δ, καὶ ἦχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὸ τοῦ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΔΕ (τὸ Ε ἄρα κέντρον ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον γραφομένου κύκλου, ὡς ἔστιν ἐν σφαιρικοῖς), καὶ ἐπιζυχεθεῖσα ἡ ΑΕ ἐκβεβλήσθω· ὅτι ἡ ΑΕ τῆς ΕΖ διπλῇ ἐστὶν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΕΓ· ἴσαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τρίτου μὲν ὀρθῆς ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ ΕΒΖ, διμοίρου δὲ ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΕΖ ΑΒΓ, ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΑΕ, πρὸς ΕΖ.

5.418 διπλῇ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΖ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΖ. μη' (ε'). Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρον τὴν ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἔστω ἡ ΗΝΒ πρὸς ὀρθὰς οὔσα τῇ ΑΓ διαμέτρῳ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἴση ἡ ΖΗ· ὅτι ἡ ΕΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ ΕΖ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΔ ΖΔ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ περιφέρεια δεκαγώνου ἐστὶν (πενταγώνου γὰρ ἡ ΔΓΒ), εἴη ἂν ἡ ὑπὸ ΔΕΓ γωνία δύο πέμπτων ὀρθῆς· ὥστε ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΓΔ ΕΔΓ τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς ἐστὶν. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΓ ἴση ἐστίν, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΓ, ἔστιν ἄρα καὶ ἡ ΔΖ εὐθεῖα τῇ ΔΓ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ἴση οὔσα τῇ ὑπὸ ΔΓΖ τεσσάρων πέμπτων ἐστὶν ὀρθῆς. δύο δὲ πέμπτων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ δύο πέμπτων ὀρθῆς ἐστὶν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΖ τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν, τουτέστιν τῇ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΔΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΔΓΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΓΔ. ἴση δὲ ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΖ· ἡ ΕΓ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ ΕΖ. μθ' (ς'). Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ δ' πρὸς γ'. Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω ἔλασσον αὐτῆς τμημα τὸ ΓΒ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ δ' πρὸς γ'.

5.420 Κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΓΔ· γίνεται ἄρα, διὰ τὸ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμησθαι τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ ΑΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ ἴσα τῷ τρις ἀπὸ ΑΓ, ὡς ἔστιν στοιχείοις δ' τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματι, τουτέστιν τῷ τρις ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ τὸ τρις ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τρις ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ τρις ἀπὸ ΓΒ

(ἐπεὶ καὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΓ, ὡς ἔστι στοιχείοις τὸ γ' θεώρημα τοῦ β')· τὰ ἄρα ἀπὸ ΑΒΓ ἴσα ἐστὶν τῷ τρις ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ τρις ἀπὸ ΓΒ· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΒΓ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τρις ὑπὸ ΑΓΒ καὶ τῷ δις ἀπὸ ΒΓ, τουτέστιν τῷ τρις ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ δις ἀπὸ ΓΔ. ἀλλὰ τὸ τρις ὑπὸ ΑΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τρις ἀπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ τρις ἀπὸ ΓΔ (ἐπεὶ καὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΓ διὰ τὸ αὐτὸ γ' τοῦ β' στοιχείων θεώρημα)· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τρις ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ πεντάκις ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τῷ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ. κείσθω δὴ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· φανερόν γάρ ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΔΑ τῆς ΓΔ, ἐπειδὴ περ καὶ ἡ ΓΑ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν τὸ ΔΓ. καθόλου γάρ, ἐὰν ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἡ ΑΒ, καὶ τὸ ἔλασσον τμημα οἷον τὸ ΓΒ, καὶ τῇ ΓΒ ἴση τεθῇ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν τὸ ΔΓ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ε, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΔΕ [καὶ γάρ, τῇ ΔΓ ἴσης τεθείσης τῆς ΓΒ, ἡ ὅλη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΓ ἐκατέρας τῶν ΑΔ ΔΕ, ἐπειδὴ περ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΕ.

5.422 καὶ διελόντι ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΓΔ, ἡ ΕΓ πρὸς ΔΕ. ἐλάσσων δὲ ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΕΓ τῆς ΔΕ]· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ μείζον ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΔΓΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΓΕ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΓΕ, τουτέστιν τὸ τετράκις ἀπὸ ΔΕ, μείζον τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τετράκις ὑπὸ ΓΔΕ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ ΓΔΕ μείζον τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ πεντάκις ὑπὸ ΓΔΕ· τὸ ἄρα ἐννάκις ὑπὸ ΓΔΕ μείζον ἐστὶν τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΓΔΕ καὶ τοῦ πεντάκις ὑπὸ ΔΓΕ, τουτέστιν τοῦ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ· τὸ ἄρα τρις ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸ ἐννάκις ὑπὸ ΑΔΓ. λόγος δὲ τοῦ τρις ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἐννάκις ὑπὸ ΑΔΓ, ὃν α' πρὸς γ'· τὸ ἄρα τρις ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ α' πρὸς γ'· συνθέντι τὸ ἄρα τρις ὑπὸ ΑΔΓ καὶ πεντάκις ἀπὸ ΔΓ, τουτέστιν τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ δ' πρὸς γ'. ἐδείχθη δὲ τὸ τρις ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ δ' πρὸς γ'. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ πεντάκις ἀπὸ τῆς ΒΓ μείζον ἐστὶν. ν' (ζ'). Τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ εἰκοσαέδρον ἐφ' ἑν ἐπίπεδον τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου καθέτου τὸ δυνάμει δωδεκαπλάσιον μείζον ἐστὶν τοῦ δυνάμει πενταπλασίου τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΑΒΓ ὁ δεχόμενος τὸ πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου, ὡς ἐν στοιχείοις, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΓ διάμετρος τοῦ κύκλου, τὸ δὲ Ε κέντρον, ἡ δὲ ΔΚΒ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν διάμετρον [αὕτη δὲ ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις], καὶ ἀπὸ τῶν Ε Γ ἀνεστάτωσαν ὀρθαὶ τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου αἱ ΖΗ ΓΛ, καὶ ἐκατέρα μὲν τῶν ΕΘ ΓΛ ἐξαγώνου, ἐκατέρα δὲ τῶν ΕΖ ΗΘ δεκαγώνου, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΘ δίχα κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶν τῆς σφαίρας, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ις' θεώρημα τοῦ ιγ'.

5.424 ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛΔ ΒΒ ΑΚ ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἐξαγώνου ἐστὶν ἡ ΓΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΒΓ, καὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΛ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ διὰ τὸ ι' θεώρημα τοῦ ιγ'· ὁμοίως καὶ ἡ ΛΔ. ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΔ· τὸ ἄρα ΒΛΔ τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστὶν τῶν περιεχόντων τὸ εἰκοσαέδρον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν, καὶ τὸ διὰ τῶν ΑΓ ΚΛ ἄρα ἐπίπεδον, ὅπερ ἐστὶν τὸ διὰ τῶν ΕΗ ΓΛ παραλλήλων, ὀρθόν ἐστὶν πρὸς τὴν ΒΔ [καὶ ἡ ΒΔ ἄρα ὀρθή ἐστὶν πρὸς αὐτό· ταῦτα γὰρ ἐν τοῖς στερεοῖς τῶν στοιχείων ἐδείχθη]· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΒΔ ἐπίπεδα, ὧν ἐστὶν καὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον, ὀρθὰ ἐστὶν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΕΗ ΓΛ παραλλήλων ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν καὶ τὸ ΓΚΛ τρίγωνον· ὥστε καὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον ὀρθόν ἐστὶν πρὸς τὸ ΓΚΛ. ἤχθω ἐπὶ τὴν ΚΛ κάθετος ἡ ΟΝ·

δύο οὖν ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ ἀλλήλοις τό τε ΓΚΛ καὶ τὸ ΒΔΛ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΚΛ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπίπεδων ὀρθή ἐστιν ἡ ΟΝ· καὶ ἡ ΟΝ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον.

5.426

καὶ διπλῇ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΚ· ὥστε διπλῇ ἐστιν ἡ ΑΝ τῆς ΝΚ διὰ τὸ δ'. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΓΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΟΜ· ἔσται δὲ παράλληλος ἡ ΟΜ τῇ ΕΓ (ἴση γὰρ ἡ ΕΟ τῇ ΓΜ, ἐπεὶ καὶ αἱ ΓΛ ΕΘ διπλαῖ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν), καὶ ἡ ΛΙ τῇ ΙΚ ἴση (τριγώνου γὰρ τοῦ ΓΚΛ παρὰ τὴν ΓΚ ἦκται ἡ ΙΜ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΜ τῇ ΜΛ). καὶ διπλῇ ἐστιν ἡ ΑΝ τῆς ΝΚ· οἶων ἄρα ἡ ΚΛ ζ', ἡ ΑΝ δ' καὶ ἡ ΚΝ β', καὶ ἑκατέρα τῶν ΛΙ ΙΚ τριῶν, καὶ λοιπὴ ἡ ΙΝ ἑνός· τριπλῇ ἄρα ἡ ΛΙ τῆς ΙΝ· λέγω οὖν ὅτι δώδεκα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονά ἐστιν ε' τῶν ἀπὸ ΒΔ. Κείσθω τῇ ΚΓ ἴση ἡ ΚΞ· διὰ μὲν οὖν τὸ ε' θεώρημα τῶν προγεγραμμένων ἡ ΕΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστιν ἡ ΕΞ, διὰ δὲ τὸ ζ' τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τοῦ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΞΓ μείζον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ τοῦ μὲν ἀπὸ τῆς ΞΓ μείζον ἐστιν ἡ πενταπλάσιον, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΓ μείζον ἡ εἰκοσαπλάσιον. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΓ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΚ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΟΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΙ (ἰσογώνια γὰρ τὰ ΟΝΙ ΛΙΜ ΛΚΓ τρίγωνα)· τὸ ἄρα ἀπὸ ΟΝ εἴκοσι τῶν ἀπὸ ΝΙ μείζον ἐστιν. καὶ λς' ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ ψκ' τῶν ἀπὸ ΝΙ μείζονά ἐστιν. ψκ' δὲ τὰ ἀπὸ ΝΙ ὀγδοήκοντά ἐστιν τὰ ἀπὸ ΛΙ (ἐδείχθη γὰρ τριπλῇ ἡ ΛΙ τῆς ΙΝ). ὀγδοήκοντα δὲ τὰ ἀπὸ ΙΛ εἴκοσι ἐστιν τὰ ἀπὸ ΑΚ (διπλῇ γὰρ ἡ ΑΚ τῆς ΛΙ). εἴκοσι δὲ τὰ ἀπὸ ΚΛ ιε' ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΒΔ (ἰσόπλευρον γὰρ ἐστιν τὸ ΔΒΛ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἡ ΑΚ, καὶ ἐπίτριτος δυνάμει ἡ ΒΔ τῆς ΚΛ)· ὥστε λς' τὰ ἀπὸ ΟΝ δεκαπέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ, καὶ δώδεκα ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονα πέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.428

να' (η'). Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶν τῇ ὑποκειμένῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμήμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΑΓ, οὕτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ συνθέντι ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶν τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ διὰ τὸ η' θεώρημα τοῦ β' στοιχείων, τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶν τῆς ΔΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒΓ πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΔΕΖ πρὸς ΔΖ. καὶ συνθέντι ὡς συναμφότεραι αἱ ΑΒ ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ, τουτέστιν δύο αἱ ΑΒ, πρὸς ΑΓ, οὕτως συναμφότεραι αἱ ΔΕ ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ, τουτέστιν δύο αἱ ΔΕ, πρὸς ΔΖ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΔΖ. Ἐκ δὲ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν ὥσιν δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ὡς αἱ ΑΒ ΔΕ, καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ κατὰ τὰ Γ Ζ, ἔσται τὰ μείζονα τμήματα αὐτῶν ἴσα καὶ τὰ ἐλάσσονα ὁμοίως ἴσα.

5.430

ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἐδείχθη, ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· ~ νβ' (θ'). Ἐστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ τριπλῇ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, καὶ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ· ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΒΓ δυνάμει τριπλασίων ἐστίν (ὡς γὰρ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓ ΒΔΓ τριγώνων). τετμήσθω δ' ἡ ΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τῷ Θ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστω ἡ ΒΘ, καὶ γεγενήσθω ἡ ΓΕ τῆς ΕΖ δυνάμει πενταπλῇ (δυνατὸν δὲ τοῦτο· ἡ γὰρ ΕΓ τῆς ΕΔ [μήκει] τριπλῇ [δυνάμει ἐνναπλῇ])· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶν τῆς ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ δυνάμει ὃν ε' πρὸς γ'. Κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΖΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Κ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΓΕ αὐτῆς τμήματος

τῆς ΕΖ πενταπλάσιον δύναται, καὶ ἡ διπλὴ τῆς ΕΖ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Κ, ἡ ΚΖ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ΖΓ διὰ τὸ β' θεώρημα τοῦ ιγ' στοιχείων· ὥστε καὶ ἡ ΓΗ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ζ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΖΗ.

5.432 ἀλλὰ διὰ τὸ προδειχθέν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΘ, ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΖΓ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ, ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΓΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ τῆς μὲν ΒΓ δυνάμει τριπλὴ ἐστὶν, τῆς δὲ ΗΖ πενταπλῆ, οἷων ἄρα δυνάμει ἡ ΑΓ ιε', τοιούτων ἡ μὲν ΒΓ ε', ἡ δὲ ΖΗ γ'· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΖΗ λόγον ἔχει δυνάμει ὃν ε' πρὸς γ'· ὥστε καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει δυνάμει ὃν ε' πρὸς γ'· νγ' (ι'). Πάλιν ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ οὗ κέντρον τὸ Ζ, καὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΓΖ τοῦ ἀπὸ ΕΖ, καὶ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Δ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΒΔ· ὅτι τὰ ἀπὸ ΓΒ ΒΔ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΕ. Κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΖΗ· ἡ ΗΓ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Ε, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΕΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΗΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΗ, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΑΗ (ὅτι καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ), ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΓ τῷ ἀπὸ ΕΗ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΗ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΕΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ (ἐπεὶ καὶ ὡς ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως πρὸς ΒΔ). ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΕΓ [τοῦτο γὰρ δείκνυται διὰ τοῦ α' τοῦ ζ' στοιχείων, τετραγώνου ἀναγραφέντος ἀπὸ τῆς ΕΓ καὶ συμπληρωθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΕ παραλληλογράμμου]· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. συνθέντι ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ ΓΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

5.434 ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, τὰ ἀπὸ ΓΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΗΕ· πενταπλάσια ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ ΓΒΔ τοῦ ἀπὸ ΓΕ, ὅπερ· ~ νδ' (ια'). Τῆς δὲ τοῦ ἐξαγώνου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ τοῦ δεκαγώνου πλευρά. Ἐξαγώνου γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΔΓ· λέγω ὅτι ἡ ΔΓ δεκαγώνου ἐστίν. Προσκέισθω ἡ ΔΑ δεκαγώνου οὔσα· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται τῷ Δ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΒ τῷ Γ· διὰ ἄρα τὸ η' λήμμὰ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΑΔ· δεκαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΔΓ. νε' (ιβ'). Τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει. Ἐκκείσθω γὰρ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΕ τῆς ΕΒ, καὶ ὀρθὴ ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΛΒ ΖΒ· ἡ ΖΒ ἄρα κύβου ἐστὶν πλευρά, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' τῶν στοιχείων ἐπὶ τοῦ κύβου.

5.436 τετμήσθω ἡ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τῷ Η, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΖΗ· ἡ ΖΗ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶν πλευρὰ διὰ τὸ ἐν τῷ ιγ' στοιχείων ἐπιλεγόμενον τῷ δωδεκαέδρῳ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΑΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ κάθετος μὲν ἡ ΚΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΚΒ. ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Μ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ διπλῆ, ἡ δὲ ΑΕ τῆς ΕΒ διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ λοιπῆς τῆς ΓΕ διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ΒΕ τῇ ΕΛ ἐστὶν ἴση διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς ΔΓ, τὴν ΒΕ πρὸς ΕΛ· καὶ ἡ ΛΕ ἄρα τῆς ΕΓ ἐστὶν διπλῆ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΘ τῆς ΘΓ διπλῆ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΚ τοῦ ἀπὸ ΓΘ πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΓ τοῦ ἀπὸ ΓΘ· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐστὶν πενταπλάσιον· ἡ ΚΒ ἄρα εἰκοσαέδρου ἐστὶν πλευρά· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ιγ' στοιχείων. ἐπεὶ οὖν ἐν μὲν τῷ θ' λήμματι δέδεικται λόγος τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ ὃν ἔχει τὰ ε' πρὸς τὰ γ', ἐν δὲ τῷ δεκάτῳ τὰ ἀπὸ ΒΚ ΚΜ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΒΘ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΚ ΚΜ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ ΖΗ.

5.438 ἐκκείσθω οὖν κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τυχοῦσα διηγμένη ἡ ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω τῷ Ο, καὶ μείζων ἔστω τμημὰ τὸ ΟΝ·

δεκαγώνου ἄρα ἡ NO διὰ τὸ προδειχθέν. καὶ ἐπεὶ ἡ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν κύκλον οὗ κέντρον τὸ N γραφομένου τριπλασία ἐστὶν δυνάμει τῆς NE ἐκ κέντρου, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' βιβλίῳ στοιχείων, ἣν δὲ ἡ τοῦ τριγώνου ἡ KB, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς KB τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ NE. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημέναι· διὰ τὸ ἐν ἀρχῇ τοίνυν ἐστὶν ὡς ἡ BK πρὸς NE, ἡ KM πρὸς NO. καὶ τὰ τετράγωνα. καὶ ὡς ἐν πρὸς ἕν, πάντα πρὸς πάντα· τὰ ἄρα ἀπὸ BKM τῶν ἀπὸ ENO ἐστὶν τριπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τοῦ ἀπὸ ZH τὰ ἀπὸ τῶν BKM τριπλάσια· ἴσα ἄρα τὰ ἀπὸ ENO τῷ ἀπὸ ZH. καὶ ἔστιν ἡ μὲν NE ἑξαγώνου, ἡ δὲ NO δεκαγώνου· ἡ ZH ἄρα πενταγώνου ἐστὶν πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ N, γραφομένου (δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ' στοιχείων καὶ τοῦτο). ἡ δὲ ZH πενταγώνου οὕσα πλευρὰ καὶ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἐστὶν· ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου. νζ' (ιγ'). Ἄλλως ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον. Ἐκκείσθω τις σφαῖρα καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὴν δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω τοῦ μὲν δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλῳ περιεχόμενον τῷ ΓΔΕ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον ἐν κύκλῳ τῷ ΠΡΣ· λέγω ὅτι οἱ κύκλοι ἴσοι εἰσὶν, τουτέστιν ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ πεντάγωνον καὶ τὸ τρίγωνον.

5.440 Ἐπεξεύχθω ἡ ΕΓ· κύβου ἄρα τοῦ ὑπὸ τὴν αὐτὴν σφαῖραν τῷ δωδεκαέδρῳ πλευρὰ ἐστὶν ἡ ΓΕ· τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ιγ' στοιχείων. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ κάθετος ἀπ' αὐτοῦ ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Γ Θ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΘ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστιν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕΘ τετραπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΕ ΕΘ ΘΚ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ ΕΘ ΘΚ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ (ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων)· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΕ ΕΖ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἐκκείσθω δὴ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ εὐθεῖα τις ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ, ὡς ἔστιν λῆμμα ιγ' στοιχείων. ἔστιν δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσια τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων· ἐκ τοῦ κέντρου ἄρα ἐστὶν τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἡ ΜΝ.

5.442 τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΜΞ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ διὰ τὸ ια' λῆμμα. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ πενταπλάσιον, ἔστιν δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΓΕ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου τριπλάσιον, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΓΕ ἴσα ἐστὶν ε' τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ (τῆς γὰρ ΓΕ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζων τμημὰ ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ὡς ἔστιν ιγ' στοιχείων)· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΓΕ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΖΕ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ἀπὸ ΡΣ, ὡς ἐν τῷ εἰκοσαέδρῳ ιγ' στοιχείων δείκνυται· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΡΣ ἴσα ἐστὶν τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΕ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ.

5.444 ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΡΣ ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περὶ τὸ ΠΡΣ γραφομένου διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων. τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΓΕ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΖΕ ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραφομένου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ πεντάπλευρον (ἐδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΓΕΖ τοῦ ἀπὸ ΘΚ πενταπλάσια)· δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΠΡΣ τρίγωνον κύκλου ἴσα ἐστὶν δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου· ὥστε καὶ τὸ ἐν τῷ ἐνὶ ἴσον· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση τῇ διαμέτρῳ, καὶ ὁ κύκλος τῷ κύκλῳ· ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. νζ' (ιδ'). Τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων τὰ δώδεκα πεντάγωνα μείζονά ἐστὶν εἴκοσι τριγώνων. Ἐστω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ τε τρίγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τὸ πεντάγωνον

τοῦ δωδεκαέδρου ὁ ΒΓΔΕ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν τριγώνου μὲν πλευρὰ ἡ ΒΕ, πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Α, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους ἡ ΑΖΗΘ, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ ΑΔ ΑΕ ΒΘ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΕ τριγώνου πλευρὰ ἐστίν, ἡ ΒΘ ἄρα ἐξαγώνου ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΓΔ πενταγώνου ἐστίν, ἡ ΓΘ ἄρα δεκαγώνου ἐστίν.

5.446 καὶ κάθετοί εἰσιν αἱ ΒΖ ΓΗ· μείζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΗΑ τοῦ ὑπὸ ΒΖΑ διὰ τὸ ἐξῆς· μείζον ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τοῦ ΑΒΕ τριγώνου· καὶ ξ' ἄρα τρίγωνα τὰ ΓΔΑ ξ' τριγώνων τῶν ΒΑΕ μείζονά ἐστίν. ἀλλὰ ξ' μὲν τὰ ΓΔΑ τρίγωνα τὸ δωδεκάεδρόν ἐστιν (ἕκαστον γὰρ πεντάγωνον πέντε ἔχει τρίγωνα ὅμοια τῷ ΓΔΑ), ξ' δὲ τὰ ΒΑΕ τὸ εἰκοσάεδρόν ἐστιν (ἕκαστον γὰρ τρίγωνον τρία ἔχει ὅμοια τῷ ΒΑΕ)· μείζονα ἄρα τὰ δώδεκα πεντάγωνα εἴκοσι τριγώνων τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. νη' (ιε'). Τὸ ὑπερτεθέν. ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ ἐξαγώνου μὲν περιφέρεια ἡ ΔΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΔΖ, καὶ αἱ ΕΘ ΖΗ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΔ διάμετρον· ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΚ μείζον ἐστίν τοῦ ὑπὸ ΕΘΚ. Ἔστω γὰρ ὀκταγώνου ἡ ΔΟ· οἷων ἄρα ὁ κύκλος τξ', τοιούτων ἡ μὲν ΔΕ ξ', ἡ δὲ ΔΖ λς', ἡ δὲ ΟΔ με'· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΟ θ', ἡ δὲ ΟΕ ιε'. κείσθω οὖν τῇ ΖΟ ἴση ἡ ΟΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΡ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπιζευχθεῖσαι δὲ αἱ ΖΕ ΖΡ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ ἔστωσαν ὡς αἱ ΝΕΞΕ ΑΡΖΜ εὐθεῖαι· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΚΟ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμεῖ τὴν ΖΡ.

5.448 τεμνέτω κατὰ τὸ Σ. καὶ ἐπεὶ ἡμίους ὀρθῆς ἐστίν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΟΚΑ ΟΚΜ, ἴση ἄρα καὶ ἡ μὲν ΚΜ τῇ ΚΛ, μείζων δὲ ἡ ΚΞ πολλῷ τῆς ΚΝ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΞ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΞ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΗΞ. ἀλλὰ ἡ ΖΗ μείζων ἐστίν τῆς ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΚ καθέτου, τουτέστιν τῆς ΘΚ (τῇ γὰρ ἀπὸ τοῦ Ρ καθέτω ἴση ἐστίν ἡ ΖΗ)· ἡ ΗΘ ἄρα πρὸς ΘΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὴν ΗΞ. καὶ συνθέντι ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΞ πρὸς τὴν ΞΗ, τουτέστιν ἢ περ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΚ μείζον ἐστίν τοῦ ὑπὸ ΕΘΚ. νθ' (ις'). Ἐὰν τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς καὶ ἰσόπλευρον αὐτῷ ἴσον ᾗ, δείκνυται τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου πρὸς τὸ ἀπὸ μιᾶς [πλευρᾶς] τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς ἐλάσσονα λόγον ἔχον ἢ περ εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος. Ἔστω γὰρ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΒΔΕ ἔχον τεσσάρων πέμπτων τὴν πρὸς τῷ Ε περιειλημμένην κύκλῳ οὗ κέντρον τὸ Ε καὶ διάμετρος ἡ ΑΕΖΓ κάθετος οὕσα ἐπὶ τὴν ΒΔ· πενταγώνου ἄρα ἐστίν ἡ ΒΖΔ πλευρὰ. ἐὰν δὲ ἀπολάβωμεν ἐκατέραν τῶν ΓΗ ΓΘ περιφερειῶν δωδεκαγώνου, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΗΘ καὶ τὰς ΕΗ ΕΘ, ἔσται ἰσόπλευρον τὸ ΕΗΘ.

5.450 καὶ ἐὰν ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην τὴν ΚΓΛ, ἔσται καὶ τὸ ΕΚΛ τρίγωνον ἰσόπλευρον. καὶ ἐὰν θέλωμεν ἀρμόσαι ἴσον τῷ ΒΔΕ τριγώνῳ, δείκνυται ὅτι μεταξὺ πίπτει τῶν ΘΕΗ ΚΕΛ, τουτέστιν τοῦ μὲν ΕΗΘ μείζον ἔσται τοῦ δὲ ΚΕΛ ἔλασσον. Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστίν τοῦ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ ὃν δ' πρὸς γ', ἴση δὲ ἡ ΘΕ τῇ ΕΓ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ ὃν δ' πρὸς γ'. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΜ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τουτέστιν τὸ ΚΕΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΗΘ τρίγωνον. καὶ τὰ ἐξαπλᾶ· τὸ περιγεγραμμένον ἐξαγώνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον λόγον ἔχει ὃν δ' πρὸς γ', τουτέστιν ὃν ιβ' πρὸς θ'. τοῦ δὲ περιγεγραμμένου ἐξαγώνου πρὸς ε' τρίγωνα τὰ ΚΕΛ λόγος ἐστίν ὃν ιβ' πρὸς ι'· καὶ πέντε ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΕΛ μείζονά ἐστίν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐξαγώνου· πολλῷ ἄρα τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου μείζονά ἐστίν (ἐν γὰρ κύκλῳ τὸ ἐγγεγραμμένον πεντάγωνον ἰσόπλευρον τοῦ ἐγγραφομένου ἐξαγώνου ἔλασσόν ἐστιν)· ἔλασσον ἄρα τὸ ΔΕΒ τοῦ ΚΕΛ. Λέγω δὲ ὅτι καὶ τοῦ ΕΗΘ μείζον ἐστίν. εἰλήφθω γὰρ ἡ ΓΝ περιφέρεια ἐξαγώνου καὶ κάθετος ἡ ΝΞ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ πρὸ τούτου τὸ ὑπὸ ΔΖΕ μείζον ἐστίν τοῦ ὑπὸ ΝΞΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ ΝΞΕ τὸ ὑπὸ ΘΜΕ (πάντα γὰρ πᾶσιν ἐστίν ἴσα), καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἄρα μείζον ἐστίν τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ, ὥστε καὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον μείζον ἐστίν τοῦ ΘΕΗ τριγώνου. Τὸ

ἄρα τῷ ΒΔΕ ἴσον συνιστάμενον ἰσόπλευρον, ὥστε τὴν βάσιν αὐτοῦ παράλληλον εἶναι τῇ ΗΘ ἢ τῇ ΚΛ, μεταξύ τῶν Κ Θ πίπτει.

5.452 ἐπεὶ οὖν δέδεικται ἐν τῷ ζ' λήμματι ὅτι εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ δ' πρὸς γ', ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, λόγον ὃν δ' πρὸς γ', πολλῶ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης εὐθείας πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ τῆς μεταξύ τῶν ΚΕ ΘΕ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, τουτέστιν τῆς ΕΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς. ξ'. Τὰ μὲν οὖν λαμβανόμενα εἰς τὰς συγκρίσεις τῶν ἴσην ἐπιφάνειαν ἐχόντων πέντε σχημάτων ἐδείχθη καθ' αὐτά, δεικτέον δ' ἐφεξῆς ὅτι τὸ μὲν εἰκοσάεδρον μέγιστόν ἐστιν, μετὰ δὲ τοῦτο τὸ δωδεκάεδρον, εἴτα τὸ ὀκτάεδρον, μετὰ δὲ τὸ ὀκτάεδρον ὁ κύβος, ἐλάχιστον δὲ τὸ τῆς πυραμίδος. Ἔστω δὲ πρῶτον ἐπὶ τοῦ κύβου καὶ τῆς πυραμίδος ὁ λόγος, καὶ ἔστω κύβου μὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓ, πυραμίδος δὲ τρίγωνον τὸ ΔΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσαι ὑπόκεινται τῶν σχημάτων αἱ ἐπιφάνειαι, ἔξ ἄρα τετράγωνα τὰ ΑΒ ἴσα ἐστὶν τέσσαρσι τριγώνοις τοῖς ΔΕΖ· λόγος ἄρα τοῦ ΔΕΖ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον ὃν γ' πρὸς β'. ἦχθω δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΘ· φανερόν δὲ ὅτι τὸ Θ κέντρον ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον γραφομένου κύκλου· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΕΗ, τοῦ ἀπὸ ΕΘ.

5.454 καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΘΗ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ ὃν γ' πρὸς β', τουτέστιν ὃν νδ' πρὸς λζ'. τοῦ δὲ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ γ' τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν λζ' πρὸς δ'· καὶ τοῦ ἀπὸ ΗΕ ἄρα, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΕΖ, πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν νδ' πρὸς δ'. καὶ ἐπεὶ παντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον ἔλασσον ἢ τετραπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τέσσαρα ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΕΖ, ἅπερ ἐστὶν ἔξ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ΑΓ, μείζονά ἐστιν τοῦ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν α' πρὸς ζ', τουτέστιν ἢ ὃν θ' πρὸς νδ'. τοῦ δὲ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ λόγος ἐστὶν ὃν νδ' πρὸς δ', ὡς ἐδείχθη, καὶ δι' ἴσου τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὰ θ' πρὸς τὰ δ'· καὶ μήκει ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὰ γ' πρὸς τὰ β'. ἐδείχθη δὲ λόγος τοῦ ΔΕΖ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον, ὃν γ' πρὸς β'· τὸ ΔΕΖ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΓ πρὸς τὸ γ' τῆς ΗΘ. καὶ ἀνάπαλιν ἡ ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒ τετράγωνον. ἔαν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν ΑΓ πρὸς τὸ τρίτον τῆς ΗΘ, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον χωρίον τοῦ ΑΒ τετραγώνου· καὶ ἔστιν ὁ μὲν κύβος τὸ ΑΒ τετράγωνον ἐφ' ὕψος τὴν ΑΓ, ἡ δὲ πυραμὶς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφ' ὕψος τὸ τρίτον τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀγομένης καθέτου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· μείζων ἄρα ὁ κύβος τῆς πυραμίδος. ξα'.

5.456 Τὸ ὀκτάεδρον τοῦ κύβου μείζον ἐστὶν. Ἔστω γὰρ ὀκτάεδρου μὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, κύβου δὲ τετράγωνον τὸ ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιλαμβανούσης τὸ ὀκτάεδρον σφαίρας ἔστω κάθετος ἡγμένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ὀκτῶ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἴσα ἔξ τετραγώνοις τοῖς ΖΗ, λόγος ἄρα τοῦ ΖΗ τετραγώνου πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὃν δ' πρὸς γ'. καὶ ἔστιν διὰ τὸ α' λῆμμα καθόλου παντὸς τριγώνου ἰσοπλεύρου τὸ ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς τετράγωνον μείζον ἢ διπλάσιον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα μείζον ἐστὶν ἢ ζ' οἴων τὸ ἀπὸ ΖΘ δ'. τέσσαρα ἄρα πρὸς ζ', τουτέστιν λζ' πρὸς νδ', μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ β' λῆμμα λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ ὃν γ' πρὸς α', ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ τοῖς ἀπὸ ΒΕΔ, λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ ὃν α' πρὸς β'. τοῦ δὲ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ ὃν ζ' πρὸς β' διὰ τὸ ιβ' τοῦ ιγ' στοιχείων· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ ὃν α' πρὸς ζ', τουτέστιν ὃν θ' πρὸς νδ'. τοῦ δὲ ἀπὸ τοῦ γ' τῆς ΔΕ πρὸς τὸ

ἀπὸ ΔΕ λόγος ἐστὶν ὃν α' πρὸς θ' (τὰ γὰρ μήκει τριπλάσια δυνάμει ἐνναπλάσια [καὶ τὰ μήκει ἐπίτριτα δυνάμει ἔννατά] ἐστίν)· καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου οὖν τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ λόγος ἐστὶν ὃν α' πρὸς νδ'. ἐδείχθη δὲ ὅτι λζ' πρὸς νδ' μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· δι' ἴσου ἄρα λζ' πρὸς α' μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ γ' τῆς ΔΕ· καὶ μήκει ἄρα ζ' πρὸς α' μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὸ γ' τῆς ΔΕ. λόγος δὲ ζ' τετραγώνων τῶν ΖΗ πρὸς α' ὃν ζ' πρὸς α'. καὶ ἔστιν τὰ ζ' τετράγωνα ἴσα ἢ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ· καὶ ἢ ἄρα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΖΗ τετράγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὸ γ' τῆς ΔΕ.

5.458 καὶ ἔστιν ὀκτάεδρον ὀκτὼ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἐφ' ὕψος τὸ γ' τῆς ΔΕ, κύβος δὲ τὸ ΖΗ τετράγωνον ἐφ' ὕψος τὴν ΘΖ· μείζον ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τοῦ κύβου. ξβ'. Ἔστω δεῖξαι ὅτι τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ ὀκταέδρου μείζον ἐστίν. Καὶ ἔστω ὀκταέδρου μὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, εἰκοσάεδρου δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν περιλαμβανουσῶν τὰ στερεὰ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν στερεῶν κάθετοι αἱ ΗΘ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἐν τῷ ζ' θεωρήματι τῶν προγραφομένων ὅτι δώδεκα τὰ ἀπὸ ΗΘ μείζονά ἐστιν πέντε τῶν ἀπὸ ΕΖ, πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΕΖ δύο ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΒΓ (ἐπεὶπερ καὶ πέντε τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἴσα ἐστὶν δυσὶ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ· καὶ γὰρ τετραπλάσια κ' τρίγωνα τοῖς ἢ ἴσα ἐστίν, καὶ ὥς τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως τὸ τετράγωνον πρὸς τὸ τετράγωνον τῶν ὁμοίων σχημάτων πρὸς ἄλληλα διπλασίονα λόγον ἐχόντων ἥπερ τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν), δύο δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ δώδεκά ἐστιν τὰ ἀπὸ ΚΛ (προδεδείκται γὰρ λόγος τοῦ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ ὃν ζ' πρὸς α'), δώδεκα ἄρα τὰ ἀπὸ ΗΘ μείζονά ἐστιν δώδεκα τῶν ἀπὸ ΚΛ· μείζων ἄρα ἡ ΘΗ τῆς ΚΛ. καὶ τὸ γ' τῆς ΘΗ τοῦ γ' τῆς ΚΛ μείζον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν εἰκοσάεδρον ἐστὶν εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἐφ' ὕψος τὸ γ' τῆς ΗΘ, τὸ δὲ ὀκτάεδρον ὀκτὼ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ἐφ' ὕψος τὸ γ' τῆς ΚΛ, καὶ ἔστιν κ' τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἴσα ὀκτὼ τριγώνοις τοῖς ΑΒΓ διὰ τὴν ὑπόθεσιν, μείζον ἄρα τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ ὀκταέδρου. ξγ'.

5.460 Τὸ εἰκοσάεδρον τοῦ δωδεκαέδρου μείζον ἐστίν. Ἔστω γὰρ πεντάγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ ἐν τῶν τοῦ δωδεκαέδρου, τρίγωνον δὲ τὸ ΔΕΖ ἐν τῶν τοῦ εἰκοσάεδρου, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰ στερεὰ σχήματα ἐπὶ τὰ ΔΕΖ ΑΒΓ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΘ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΔ ΘΔ ΚΑ ΑΛ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἐν τῷ ιβ' θεωρήματι τῶν προγραφομένων ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τὸ τε πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσάεδρου τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου τῷ δωδεκαέδρῳ, ὥστε ἡ ΑΛ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσάεδρου, ἡ δὲ ΚΛ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ' αὐτὸν κάθετος, ἡ δὲ ΚΑ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἀλλὰ καὶ τὸ ΗΘΔ τρίγωνον ὁμοίως ἐστὶν λαμβανόμενον [διὸ δὴ καὶ ὁμοίον ἐστὶν τῷ ΚΛΑ τριγώνῳ]. ὥς γὰρ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς περιλαμβανούσης τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ εἰκοσάεδρον πρὸς τὴν ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὥς ἡ τοῦ τριγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον τὸν δεχόμενον τὸ τρίγωνον τοῦ εἰκοσάεδρου καὶ τὸ πεντάγωνον τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΚΑ ἐκ κέντρου σφαίρας πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ΗΔ ἐκ κέντρου σφαίρας πρὸς ΔΘ. καὶ ὁρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Λ Θ γωνίαι· ὁμοίον ἄρα τὸ ΑΚΛ τρίγωνον τῷ ΔΗΘ τριγώνῳ], καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἐν τῷ ιδ' θεωρήματι τῶν προγραφομένων ὅτι εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ, τουτέστιν δώδεκα πεντάγωνα τὰ ΑΒΓ, μείζονά ἐστιν εἴκοσι τριγώνων τῶν ἐγγραφομένων εἰς τὸν κύκλον τὸν περιλαμβάνοντα τὸ ΑΒΓ πεντάγωνον, φανερόν ὥς καὶ ὁ περὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον κύκλος μείζων ἐστὶν τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ πεντάγωνον· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ μείζων ἐστὶν τῆς ΑΛ.

5.462 καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ ΔΗΘ ΑΚΛ τρίγωνα· ὥς ἄρα ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς ΛΚ, καὶ ἐναλλάξ ὥς ἡ ΔΘ πρὸς ΑΛ, ἡ ΗΘ πρὸς ΚΛ. μείζων δὲ ἡ ΔΘ τῆς ΑΛ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῆς ΚΛ. καὶ τὸ τρίτον ἄρα τῆς ΗΘ τοῦ τρίτου τῆς ΚΛ μείζον ἐστίν. καὶ ἔστιν τὸ μὲν εἰκοσάεδρον εἴκοσι τρίγωνα τὰ ΔΕΖ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ΗΘ, τὸ δὲ δωδεκάεδρον ἐστὶν δώδεκα πεντάγωνα τὰ ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον

τῆς ΚΛ. καὶ ὑπόκειται κ' τρίγωνον τὰ ΔΕΖ ἰβ' πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓ ἴσα· μείζον ἄρα τὸ εἰκοσαέδρον τοῦ δωδεκαέδρου. ξδ'. Τὸ δωδεκαέδρον τοῦ ὀκταέδρου μείζον ἐστίν. Ἔστω δωδεκαέδρου μὲν πεντάγωνον τὸ ΦρΤ καὶ κάθετος ἡ ΥΩ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸ δωδεκαέδρον ἐπὶ τὸ ΦρΤ πεντάγωνον ἡγμένη, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΩΦ Ωρ ΩΤ ΥΦ, ὀκταέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΣΡΠ ἔστω, καὶ ὁμοίως ἡ ΧΨ κάθετος, ἣν δεῖ ἐλάσσονα δεῖξαι τῆς ΥΩ καθέτου.

5.464 Ἐκκείσθω δὲ καὶ τὸ ληφθὲν θεωρήμα εἰς τὴν σύγκρισιν τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ὀκταέδρου [οὗ σημεῖον ἀστήρ], δι' οὗ ἐδείχθη δώδεκα τὰ ἀπὸ ΟΝ μείζονα πέντε τῶν ἀπὸ ΒΔ. ἔστω δὲ καὶ τὸ , Δ , Β , Γ τρίγωνον εἰκοσαέδρου, καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ , Δ ἡ , Δ , Ε, ὡς ἐν τῷ προκειμένῳ θεωρήματι ὅμοιον ἄρα τὸ ΥΦΩ τῷ τε , Δ , Α , Ε τριγώνῳ καὶ τῷ ΟΝΛ [καὶ ἰβ' τὰ ἀπὸ , Δ , Ε μείζονα ε' τῶν ἀπὸ , Β , Γ, τουτέστιν ἰβ' τὰ ἀπὸ ΥΩ μείζονα ε' τῶν ἀπὸ ρΤ.] ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ ις' λημματίου ἐδείχθη ὅτι, ἐὰν ἡ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ὡς τὸ ρΩΤ ἔχον τὴν πρὸς τῷ Ω γωνίαν τεσσάρων πέμπτων ὀρθῆς καὶ ἰσοπλευρον ἴσον αὐτῷ ὡς τὸ Μ α Μ β Μ Γ , τὸ ἀπὸ Μ α Μ β πρὸς τὸ ἀπὸ ρΩ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, καὶ ἡ ΕΓ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ Μ α Μ β πρὸς τὸ ἀπὸ ρΩ, τουτέστιν τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ Μ α Μ β πρὸς τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ ρΩ.

5.466 καὶ ἐπεὶ ἔχομεν ἡ' τρίγωνον τὰ ΣΡΠ ἴσα ἰβ' πενταγώνοις τοῖς ΦρΤ, τουτέστιν ξ' τριγώνοις τοῖς ρΩΤ, ὥστε καὶ δύο τρίγωνον τὰ ΣΡΠ ἴσα ἐστὶν ιε' τριγώνοις τοῖς ρΩΤ, τουτέστιν ιε' τοῖς Μ α Μ β Μ Γ ὥστε καὶ τὸ δις ἀπὸ ΣΠ ἴσον ἐστὶν τῷ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ Μ β Μ Γ , τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ τῆς ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ δύο τὰ ἀπὸ ΣΠ πρὸς τὸ πεντεκαιδεκάκις ἀπὸ ΩΦ (ἴση γάρ ἐστίν ἡ Ωρ τῇ ΩΦ). δύο δὲ τὰ ἀπὸ ΣΠ ἰβ' ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΧΨ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῇ συγκρίσει τοῦ κύβου καὶ ὀκταέδρου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ πεντάκις ἀπὸ ΞΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΞΚ τῇ ΚΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ εἰκοσάκις ἀπὸ τῆς ΚΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ· ὥστε καὶ λς' τὰ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν λς' τὰ ἀπὸ ΓΛ, πρὸς ψκ' τὰ ἀπὸ ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΛ πρὸς ΓΚ, ἡ ΑΜ πρὸς ΙΜ, ὡς δὲ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΙ, ἡ ΟΝ πρὸς ΝΙ· ὥστε καὶ λς' τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ψκ' τὰ ἀπὸ ΝΙ, τουτέστιν π' τὰ ἀπὸ ΙΛ (τριπλασία γὰρ ἐν τῷ ζ' λήμματι ἐδείχθη ἡ ΙΛ τῇ ΙΝ), τουτέστιν κ' τὰ ἀπὸ ΚΔ, τουτέστιν ιε' τὰ ἀπὸ ΒΔ (ἐπίτριτος γὰρ ἡ ΒΔ τῆς ΚΛ δυνάμει), μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ· ὥστε καὶ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ε' τὰ ἀπὸ ΒΔ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ.

5.468 πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΒΔ ιε' ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΝΛ, ὡς ἔστιν ἐν τῷ ιγ' τῶν στοιχείων (τὸ γὰρ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΒΔΛ τρίγωνον κύκλου τὸ Ν σημεῖόν ἐστιν)· καὶ ἰβ' ἄρα τὰ ἀπὸ ΟΝ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστιν ἰβ' τὰ ἀπὸ , Δ , Ε πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ , Ε , Α, μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ , Δ , Α , Ε τρίγωνον τῷ ΥΦΩ τριγώνῳ· καὶ ἰβ' ἄρα τὰ ἀπὸ ΥΩ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἰβ' τὰ ἀπὸ ΧΨ πρὸς ιε' τὰ ἀπὸ ΩΦ· μείζων ἄρα ἡ ΥΩ κάθετος τῆς ΧΨ καθέτου. καὶ ὑπόκεινται αἱ ἐπιφάνειαι ἴσαι τῶν στερεῶν σχημάτων· μείζον ἄρα τὸ δωδεκαέδρον τοῦ ὀκταέδρου. ξε'. Ὅτι μὲν οὖν τῶν ε' σχημάτων τούτων ἃ δὴ καὶ πολυέδρα καλεῖται τὸ πολυεδρότερον αἰεὶ μείζον ἐστὶν φανερόν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι δὲ πλείω τῶν πέντε τούτων ἀδύνατόν ἐστιν εὐρεῖν ἄλλα σχήματα ἴσοις καὶ ὁμοίοις ἰσοπλεύροις πολυγώνοις περιεχόμενα μάθοι τις ἂν καὶ οὕτως. Πᾶσαν στερεὰν γωνίαν ἐκ τριῶν ἐλαχίστων συνεστάναι γωνιῶν ἐπιπέδων ἀναγκαῖον, καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτάς, ἐὰν τε τρεῖς ᾧσιν ἐὰν τε πλείους, τῶν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν πάντως.

5.470 ὑπὸ μὲν οὖν ἐξαγώνου γωνιῶν ἡ τινος εὐθυγράμμου πολυγωνοτέρου περισχεθῆναι στερεὰν γωνίαν ἀδύνατον (αἱ γὰρ ἐλάχισται δυνάμεναι περιλαβεῖν αὐτὴν τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν οὐκ

εἰσὶν ἐλάττους), ὑπὸ δὲ πενταγώνου τριῶν μόνων δυνατόν, ὥς καὶ συνέστηκεν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου. πάλιν δὲ τέσσαρες μὲν ἢ πλείους τετραγώνου γωνίαί περιέχουν στερεὰν γωνίαν οὐ δύναται (τεσσάρων γὰρ ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττους), τρεῖς δὲ περιέχουσιν τὴν τοῦ κύβου. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἕξ μὲν ἢ πλείους γωνίαί τεσσάρων ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττους, καὶ διὰ τοῦτο στερεὰν γωνίαν οὐ περιέχουσι, πέντε δὲ καὶ τέσσαρες καὶ τρεῖς δύναται, καὶ περιέχεται ὑπὸ μὲν πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ τριῶν ἢ τῆς πυραμίδος. δῆλον οὖν ἐκ τῶν εἰρημένων ὅτι παρὰ ταύτας οὐκ ἔστιν ἄλλη στερεὰ γωνία ἕξ ἴσων καὶ τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου συνεστηκυῖα γωνιῶν, ὥστε οὐδὲ πολυέδρον εὔρεῖν ἄλλο παρὰ τὰ προειρημένα πέντε δυνατόν ἐστὶν ὑπὸ ἴσων καὶ ὁμοίων πολυγώνων περιεχόμενον. ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ ζ.

6.474. (1τ) Περιέχει δὲ ἀποριῶν λύσεις τῶν ἐν τῷ μικρῷ ἀστρονομουμένῳ. Πολλοὶ τῶν τὸν ἀστρονομούμενον τόπον διδασκόντων ἀμελέστερον τῶν προτάσεων ἀκούοντες τὰ μὲν προστιθέασιν ὡς ἀναγκαῖα, τὰ δὲ παραλείπουσιν ὡς οὐκ ἀναγκαῖα. λέγουσιν γὰρ ἐπὶ τοῦ ἔκτου θεωρήματος τοῦ τρίτου τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν, ὅτι δεῖ τῶν δύο μεγίστων κύκλων ἑκάτερον ὑπὸ τοῦ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας τέμνεσθαι πρὸς ὀρθάς· τοῦτο δὲ οὐ πάντως. ὁμοίως δὲ παραλείπουσιν ἐν τῷ β' θεωρήματι τῶν φαινομένων Εὐκλείδου, ποσάκις ὁ ζῳδιακὸς [δὶς] ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα. κἀν τῷ δ' θεωρήματι τοῦ περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν ψευδογραφοῦσι τὸν Θεοδόσιον, καὶ ἄλλα δέ τινα τῶν ἐξῆς ὡς οὐκ ἀναγκαῖα παραλείπουσιν, ὧν ἕκαστον ἐπιδείξομεν ἡμεῖς. α'. Ἐὰν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας τρεῖς περιφέρειαι μεγίστων κύκλων τέμνωσιν ἀλλήλας, ὧν ἑκάστη ἐλάττων ἐστὶν ἡμικυκλίου, δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶν πάντη μεταλαμβανόμεναι. Τεμνέτωσαν γὰρ ἀλλήλας μεγίστων κύκλων περιφέρειαι κατὰ τὰ Α Β Γ σημεία· λέγω ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶν πάντη μεταλαμβανόμεναι.

6.476 Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, τὸ δ' αὐτὸ καὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ περιφερειῶν, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΔΒ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Δ ὑπὸ γ' γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΔΒ ΒΔΓ ΓΔΑ περιέχεται, δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶν πάντη μεταλαμβανόμεναι. καὶ βεβήκασιν αἱ ὑπὸ ΑΔΒ ΒΔΓ ΓΔΑ γωνίαί ἐπὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ περιφερειῶν· αἱ δύο ἄρα τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶν πάντη μεταλαμβανόμεναι. Καλεῖ δὲ τὸ τοιοῦτο σχῆμα Μενέλαος ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τρίπλευρον. β'. Ἐὰν τριπλεύρου ἐπὶ μιᾷ πλευρᾷ δύο κύκλων μεγίστων περιφέρειαι συσταθῶσιν ἐντός, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριπλεύρου δύο πλευρῶν ἐλάττονες ἔσονται. Τριπλεύρου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾷ πλευρᾷ τῆς ΒΓ δύο μεγίστων κύκλων περιφέρειαι συνεστάτωσαν ἐντός αἱ ΒΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔΓ τῶν ΒΑΓ ἐλάττονες εἰσιν. Ἐπεὶ παντὸς τριπλεύρου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ ἄρα ΓΕ ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονες εἰσιν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΓΕΒ τῶν ΓΔΒ μείζονες εἰσιν. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριπλεύρου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ ἄρα ΒΑΕ τῆς ΕΒ μείζονες εἰσιν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑΓ τῶν ΒΕΓ μείζονες εἰσιν. ἀλλ' αἱ ΒΕΓ τῶν ΒΔΓ μείζονες εἰσιν· πολλῶν ἄρα αἱ ΒΑΓ τῶν ΒΔΓ μείζονες εἰσιν. γ'.

6.478 Τριῶν κύκλων μεγίστων περιφέρειαι αἱ ΑΒ ΑΓ ΑΔ μεγίστου κύκλου περιφέρειαν τὴν ΒΔ τεμνέτωσαν, καὶ ἔστω ἑκάστη μὲν τῶν ΑΒ ΑΓ ΑΔ ἐλάσσων τεταρτημορίου, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ· δεῖξαι ὅτι συναμφοτέρος ἡ ΒΑΔ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ. Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΓΕ. ἐπεὶ ἐλάσσων τεταρτημορίου ἡ ΑΓ, ἐλάσσων ἄρα τεταρτημορίου καὶ ἡ ΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡμικυκλίου ἡ ΑΕ· οὐκ ἄρα ὁ ΑΔ κύκλος προσαναπληρούμενος ἤξει διὰ τοῦ Ε. γεγράφθω οὖν διὰ τῶν Ε Δ μέγιστος κύκλος ὁ ΕΔΖ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΒ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ. ἐπεὶ δὲ παντὸς τριπλεύρου αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΓ τῇ ΓΑ, συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΒΑΔ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ. δ'. Τεσσάρων κύκλων μεγίστων

περιφέρειαι αὐτὰς AB AG AD AE μεγίστου κύκλου περιφέρειαν τὴν BE τεμνέτωσαν, καὶ ἔστω ἡ μὲν BG ἴση τῇ ΔΕ, ἐκάστη δὲ τῶν AB AG AD AE ἐλάσσων τεταρτημορίου· δεῖξαι ὅτι συναμφοτέρος ἡ BAE συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ ἐστὶ μείζων. Τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ζ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Α Ζ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΖΗ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω διὰ μὲν τῶν Η Ε μέγιστος κύκλος ὁ ΗΕΚ, διὰ δὲ τῶν Η Δ μέγιστος κύκλος ὁ ΗΔΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΖΑ, ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΖΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΓΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΒΑ ἐστὶν ἴση.

6.480 ἐπεὶ δὲ τριπλεύρου τοῦ ΗΕΑ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΗΑ δύο συνεστᾶσιν ἐντὸς αὐτῶν ΑΔ ΔΗ, αὐτὰς ΑΔΗ ἄρα τῶν ΑΕΗ ἐλάσσονες εἰσιν, ὥστε αὐτὰς ΑΕΗ τῶν ΑΔΗ μείζονες εἰσιν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΗ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΗΔ τῇ ΑΓ· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΒΑΕ συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ μείζων ἐστίν, ὅπερ ~ ε'. Τούτων προδεδειγμένων ἔστω τὸ ε' θεώρημα τοῦ γ' τῶν Θεοδοσίου σφαιρικῶν ἄλλως δεῖξαι. Ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων ὁ Α, καὶ τοῦτον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν ΒΓ τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΕΖ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ ΕΖ ἴσαι περιφέρειαι ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αὐτῶν ΗΘΚ, καὶ γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν Η Θ Κ σημείων παράλληλοι τῷ ΒΓ οἱ ΜΝ ΕΟ ΠΡ· δεῖξαι ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΠΞ τῆς ΜΞ. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τοῦ Α καὶ ἐκάστου τῶν Κ Η Θ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΚ ΑΘ ΑΗ· φανερόν δὴ ὅτι ἐκάστη τῶν ΑΚ ΑΘ ΑΗ περιφερειῶν ἐλάσσων ἐστὶν τεταρτημορίου (ἐπειδὴ τεταρτημορίου ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἕως τοῦ ΒΓ μεγίστου κύκλου). ἐπεὶ οὖν τριῶν μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αὐτὰς ΑΚ ΑΘ ΑΗ μεγίστου κύκλου τοῦ ΕΖ περιφέρειαν τέμνουσιν, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΚΘ τῇ ΘΗ, ἐκάστη δὲ τῶν ΑΚ ΑΘ ΑΗ ἐλάσσων ἐστὶν τεταρτημορίου, διὰ ἄρα τὸ προδεδειγμένον συναμφοτέρος ἡ ΚΑΗ τῆς ΑΘ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ, ὧν συναμφοτέρος ἡ ΚΑΤ τῆς ΑΣ ἐστὶν διπλῇ (αὐτὰ γὰρ τρεῖς αὐτῶν ΑΣ ΑΚ ΑΤ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν διὰ τοῦ πόλου)· λοιπὴ ἄρα ἡ ΤΗ τῆς ΣΘ μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ.

6.482 ἴση δὲ ἡ ΣΘ τῇ ΤΥ· ἡ ΗΥ ἄρα τῆς ΤΥ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΗΥ τῇ ΠΞ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΞΜ· μείζων ἄρα ἡ ΠΞ τῆς ΞΜ, ὅπερ ~ ζ'. Ἔστω δὴ δεῖξαι μὴ οὐσῶν συνεχῶν τῶν ἴσων περιφερειῶν (τοῦτο γὰρ οὐκ ἔδειξεν Θεοδόσιος), καὶ ἔστω τὸ αὐτὸ σχῆμα, αὐτὰς δὲ ἴσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αὐτῶν ΗΘ ΚΛ, καὶ ἔστωσαν οἱ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΜΝ ΕΟ ΠΡ ΣΤ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τοῦ Α καὶ ἐκάστου τῶν Η Θ Κ Λ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΗ ΑΘ ΑΚ ΑΛ· ἔσονται δὴ ἐλάσσονες τεταρτημορίου. καὶ ἔσται διὰ τὸ ἐπάνω δ' θεώρημα συναμφοτέρος ἡ ΛΑΗ συναμφοτέρου τῆς ΚΑΘ μείζων, συναμφοτέρος δὲ ἡ ΛΑΧ συναμφοτέρῳ τῇ ΥΑΦ ἴση ἐστίν (ἐκ πόλου γὰρ εἰσιν τοῦ ΜΝ κύκλου)· λοιπὴ ἄρα ἡ ΧΗ συναμφοτέρου τῆς ΦΘ ΥΚ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΦΘ τῇ ΧΨ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΨΗ τῆς ΥΚ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΨΗ τῇ ΣΠ, ἡ δὲ ΥΚ τῇ ΜΞ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΣΠ τῆς ΜΞ, ὅπερ ~ ζ'. Ἔστω νῦν ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἐπὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓ ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, καὶ τοῦτον τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΕ ΒΓ πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν ΒΓ ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, καὶ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἴσαι περιφέρειαι αὐτῶν ΖΗ ΘΚ, καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι οἱ ΛΜ ΝΞ ΟΠ ΡΣ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΟΡ τῆς ΝΛ. Ἡ γὰρ ΖΗ τῇ ΗΘ ἥτοι σύμμετρος ἐστὶν ἢ οὐ.

6.484 ἔστω πρότερον σύμμετρος. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΘΚ· καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΘΗ ἄρα σύμμετρος ἐστίν· αὐτὰς τρεῖς ἄρα αὐτὰς ΖΗ ΗΘ ΘΚ σύμμετροι ἀλλήλαις εἰσιν. διηρήσθωσαν οὖν εἰς τὰ μέτρα τοῖς Τ Υ Φ Χ Ψ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τῶν Τ Υ Φ Χ Ψ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΩΤ, ΑΥ Φ, ΒΧ, ΓΨ, Δ. καὶ ἐπεὶ αὐτὰς ΖΤ ΤΥ ΥΗ ΗΦ ΦΘ ΘΧ ΧΨ ΨΚ περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσιν, αὐτὰς ἄρα ΡΩ Ω, Α, ΑΟ Ο, Β, ΒΝ Ν, Γ, Γ, Δ, ΔΛ ἄνισοι εἰσιν ἐξ ἀρχῆς ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΡΩ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΡΩ Ω, Α, ΑΟ τῷ πλῆθει τῶν Ν, Γ, Γ, Δ, ΔΛ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΡΟ τῆς ΝΛ. ἢ. Ἀλλὰ δὴ τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων μὴ ἔστω σύμμετρος ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· λέγω ὅτι καὶ οὕτως μείζων ἐστὶν ἡ ΡΟ τῆς ΝΛ. Εἰ γὰρ μή, ἥτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων, καὶ κείσθω τῇ ΡΟ ἴση ἡ Ν, Γ, καὶ τριῶν γραμμῶν ὁμογενῶν τῶν ΛΝ Ν, Γ ΝΟ εἰλήφθω τῇ μὲν ΝΟ σύμμετρος, τῆς δὲ Ν, Γ μείζων,

τῆς δὲ ΝΛ ἐλάσσων, καὶ ἔστω ἡ Ν, Δ, καὶ ἔστωσαν οἱ παράλληλοι κύκλοι οἱ Χ, ΓΨ, Δ, καὶ κείσθω τῇ ΨΘ ἴση ἡ ΗΤ, καὶ ἔστω ὁ παράλληλος κύκλος ὁ ΤΩ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ΨΘ ΗΤ τῇ ΗΘ, μείζων ἐστὶν καὶ ἡ ΩΟ τῆς Ν, Δ· πολλῶ ἄρα ἡ ΡΟ τῆς Ν, Δ μείζων ἐστίν.

6.486 ἀλλὰ ἡ ΡΟ ἴση ἐστὶν τῇ Ν, Γ· ἡ Ν, Γ ἄρα τῆς Ν, Δ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάσσων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΡΟ τῆς ΝΛ. Θ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω ὅτι οὐδὲ ἴση. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΗΖ ΘΚ δίχα τοῖς ΤΨ, καὶ ἔστωσαν οἱ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΤΩ Ψ, Δ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΤΖ ΤΗ ἴσαι εἰσίν, ἄνισοι ἄρα εἰσίν αἱ ΡΩ ΩΟ ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΡΩ. πάλιν ἐπεὶ αἱ ΘΨΚ ἴσαι εἰσίν, ἄνισοι ἄρα εἰσίν αἱ Ν, Δ, ΔΛ ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς Ν, Δ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΡΩ τῆς ΩΟ, ἡ δὲ Ν, Δ τῆς, ΔΛ, μείζων ἄρα ἡ διπλῇ ἡ ΡΟ τῆς Ν, Δ, ὅπερ ἀδύνατον (προδεδεικται * * *)· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΡΟ τῇ ΝΛ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΡΟ τῆς ΝΛ. ι'. Πάλιν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, καὶ αὐτὸν τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς οἱ ΒΓ ΔΕ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι οἱ ΚΛ ΜΝ ΞΟ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΞΜ τῇ ΜΚ· λέγω ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ. Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ μείζων.

6.488 ἴση μὲν οὖν οὐκ ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· μείζων γὰρ ἂν ἦν ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ, οὐκ ἔστιν δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ. λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ κείσθω τῇ ΘΗ ἴση ἡ ΗΠ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΗΠ τῇ ΗΘ, μείζων ἄρα ἡ ΡΜ τῆς ΜΚ· πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἴση· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ, ὅπερ ~ ια'. Δέδεικται μὲν οὖν ὅτι ἐὰν ἦ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τέμνωσιν αὐτὸν δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΒΓ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς καὶ ἀποληφθῶσιν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΖΗ ΗΘ, καὶ γραφῶσιν παράλληλοι κύκλοι οἱ ΚΛ ΜΝ ΞΟ, γίνεται μείζων ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ. ἔστω δὲ μείζων ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ· λέγω ὅτι πολλῶ μείζων ἐστὶν ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ, κείσθω τῇ ΗΘ ἴση ἡ ΗΠ, καὶ γεγράθω παράλληλος κύκλος ὁ ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΠ τῇ ΗΘ, μείζων ἐστὶν ἡ ΡΜ τῆς ΜΚ· πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ, ὥστε, ἐὰν μείζων ἡ ΖΗ τῆς ΘΗ, γίνεται καὶ ἡ ΞΜ τῆς ΜΚ μείζων, ὅπερ ~ Περι τῆς εἰς τὸ ζ' θεώρημα ἐνστάσεως τοῦ γ' λήμματα. ιβ'. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ δύο διήχθωσαν αἱ ΔΑ ΑΕ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ ΕΑΓ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. Περιγεγράθω περὶ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΒΓ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ περιφέρειαν τῇ ΕΗ περιφερείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ΑΓ πρὸς ΓΗ, ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ.

6.490 ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΓΗ τῷ ὑπὸ ΔΓΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΔ· καὶ ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, τὸ ὑπὸ ΔΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΔ. ιγ'. Ἐχέτω δὲ τὸ ὑπὸ ΔΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΔ μείζονα λόγον, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἥπερ τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ· ὅτι μείζων ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, ἐναλλάξ τὸ ὑπὸ ΑΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΑΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΑΓ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΑΒ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς ΓΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΖ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν ΑΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ΒΖ. ἔστω πρὸς τὴν ΒΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ περιφέρεια τῇ ΔΘ περιφερείᾳ· μείζων ἄρα ἡ ΕΗ τῆς ΔΖ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, ὅπερ ~ ιδ'.

6.492

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΒΕΓ, καὶ ἔστω τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος ὁ Δ, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΖ ΔΘ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΒΕ περιφέρεια τῇ ΓΗ περιφερείᾳ· δεῖξαι ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Η. Τετμήσθω ἡ ΕΗ δίχα τῷ Κ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Δ Κ μέγιστος κύκλος ὁ ΔΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΗΓ, ἡ δὲ ΕΚ τῇ ΚΗ, ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν διὰ τῆς τοῦ ΒΓ διχοτομίας καὶ τῶν τοῦ ΑΒΓ πόλων γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΔΚΛ, ὁ ΔΚΛ ἄρα ἥξει διὰ τῶν τοῦ ΒΕΗ πόλων καὶ ὀρθὸς ἔσται πρὸς αὐτόν. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΚΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ἀπὸ τοῦ Κ ὀρθὸν τμήμα κύκλου ἐφέστηκεν τὸ ΚΔ, καὶ διήρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΕΚ τῇ ΚΗ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Η, ὅπερ ~ ιε'. Ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΒΕΗΓ, καὶ ἔστω τοῦ ΑΒΓ πόλος τὸ Δ, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΕΖ ΔΚΛ ΔΗΘ διχοτομίας οὔσης τοῦ Κ τῆς ΗΚΕ περιφερείας· λέγω ὅτι, εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΖΛ τῇ ΛΘ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΗΓ, μείζων ἐστὶν καὶ ἡ ΖΛ τῆς ΛΘ, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΗΓ, ἐλάσσων ἐστὶν καὶ ἡ ΖΛ τῆς ΛΘ.

6.494 Ἔστω γὰρ πρότερον ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ ἴση· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΖΛ τῇ ΛΘ ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Η· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΔΕ ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ σημείου. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΗΜΕ· ἔσται δὴ παράλληλος τῷ ΑΒΓ. ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι οἱ ΗΜΕ ΕΚΗ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἐνὸς πόλων καὶ τῆς διχοτομίας τῆς Κ γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΔΚΛ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ περιφέρεια τῇ ΜΗ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ μὲν ΕΜ τῇ ΖΛ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΜΗ τῇ ΛΘ· καὶ ἡ ΖΛ ἄρα τῇ ΛΘ ἐστὶν ὁμοία. καὶ εἰσὶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΛΘ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ις'. Ὑποκείσθω δὴ τὸ αὐτὸ σχῆμα, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΒΕ τῆς ΗΓ, ἴση δὲ ἡ ΕΚ τῇ ΚΞ· λέγω ὅτι ἡ ΖΛ τῆς ΛΘ μείζων. Κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΓΜ, καὶ γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ΔΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΜΓ, ἴση ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Μ· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ ΔΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ σημείου.

6.496 ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὁ ΣΕΜ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΔ· ἔσται δὴ κάθετος ἐπὶ τὸ τοῦ ΣΜΕ κύκλου ἐπίπεδον (πόλος γὰρ ἐστὶν τὸ Δ τοῦ κύκλου), καὶ ἔσται τὸ κέντρον τοῦ ΜΣΕ ἐπὶ τῆς ΔΟ. ἔστω τὸ Π, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΜ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Τ, καὶ ἡ ΟΞ ἐπὶ τὸ Τ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ ΟΡΚ ΠΡ ΡΣ ΠΗ ΗΤ. καὶ ἐπεὶ τὸ Π σημεῖον ἐν τῷ τοῦ ΜΣΕ ἐστὶν κύκλου ἐπιπέδῳ, ἔστιν δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Ρ Σ ἐν τῷ τοῦ ΜΣΕ κύκλου ἐπιπέδῳ, τὰ τρία ἄρα σημεῖα ἐν τῷ κύκλῳ ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΟΔ ἐν τῷ τοῦ ΔΚΛ ἐπιπέδῳ ἐστίν, καὶ τὸ Π ἄρα ἐν τῷ τοῦ ΔΚΛ ἐπιπέδῳ ἐστίν. καὶ ἡ ΟΡΚ εὐθεῖα· καὶ τὸ Ρ ἄρα ἐν τῷ τοῦ ΔΚΛ κύκλου ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἔστιν δ' ἐν αὐτῷ καὶ τὸ Σ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΡΣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΗΤ εὐθεῖα ἐστὶν (τὰ γὰρ Π Τ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶν τοῦ ΕΣΜ κύκλου· ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΔΗΞΘ κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ τὸ Η δὲ κατ' αὐτήν ἐστὶν τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων τοῦ ΕΣΜ καὶ τοῦ ΔΞΘ κύκλου· εὐθεῖα ἄρα ἡ ΠΗΤ). καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΚ περιφέρεια τῇ ΚΞ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΟΚ τῇ ὑπὸ ΚΟΞ· ὁ ἄρα τῆς ΕΟ πρὸς ΟΤ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ. ἐπεὶ δὲ ζητῶ τίς ἡ ΖΛ περιφέρεια τῇ ΛΘ, τουτέστιν ἡ ΕΣ τῇ ΣΗ, ζητήσω ἄρα τίς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΠΡ τῇ ὑπὸ ΡΠΤ.

6.498 τίς ἄρα ὁ τῆς ΕΠ πρὸς ΠΤ τῷ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ; ἀλλ' ὁ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΕΟ πρὸς ΟΤ· ζητήσω ἄρα τίς ὁ τῆς ΕΟ πρὸς ΟΤ λόγος τῷ τῆς ΕΠ πρὸς ΠΤ λόγῳ· ζητήσω ἄρα τίς ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΤ λόγος τῷ τοῦ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΤ λόγῳ, καὶ ἐναλλάξ τίς ὁ τοῦ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ τῷ τοῦ ἀπὸ ΟΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΠ, καὶ διελόντι τίς ὁ τοῦ ἀπὸ ΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΕ τῷ τοῦ ἀπὸ ΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΠ. τίς ἄρα τὸ ἀπὸ ΤΠ τῷ ἀπὸ ΠΕ; τίς ἄρα ἡ ΤΠ τῇ ΠΕ; ἀλλ' ἡ ΠΕ τῇ ΠΗ ἴση· ἔχει δὴ σύγκρισιν· ἔστιν γὰρ μείζων. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΤΠ τῆς ΠΗ, τουτέστιν τῆς ΠΕ, ἡ ΠΟ ἄρα πρὸς ΠΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΟΠ πρὸς ΠΤ· καὶ τὸ ἀπὸ ΟΠ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΤ. καὶ ἔστιν τὸ μὲν ἀπὸ ΕΟ ἴσον τοῖς

ἀπὸ ΕΠ ΠΟ (ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΠΟ γωνία), τὸ δὲ ἀπὸ ΤΟ τοῖς ἀπὸ ΤΠ ΠΟ (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΤΠΟ)· καὶ τὸ ἀπὸ ΟΕ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΠ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΟΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΠ. καὶ ἐναλλάξ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΤ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΠ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΤ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΠ, καὶ ἡ ΕΟ ἄρα πρὸς ΟΤ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΠ πρὸς ΠΤ.

6.500 ἀλλ' ὥς ἡ ΕΟ πρὸς ΟΤ, οὕτως ἡ ΕΡ πρὸς ΡΤ· ἡ ΕΡ ἄρα πρὸς ΡΤ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΠ πρὸς ΠΤ. διὰ δὲ τοῦτο μείζων γωνία ἡ ὑπὸ ΕΠΣ τῆς ὑπὸ ΣΠΤ· μείζων ἄρα ἡ ΕΣ περιφέρεια τῆς ΣΗ περιφερείας. ἀλλ' ἡ μὲν ΕΣ τῇ ΖΑ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΣΗ τῇ ΛΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ τῆς ΛΘ, ὅπερ ~ ιζ'. Ἀλλ' ἔστω ἡ ΖΑ ἴση τῇ ΛΘ· λέγω ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΚ τῆς ΚΞ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΛΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΠΣ τῇ ὑπὸ ΣΠΤ· ὁ ἄρα τῆς ΕΠ πρὸς ΠΤ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ. ἐπεὶ δὲ ζητῶ τίς περιφέρεια ἡ ΕΚ τῇ ΚΞ, ζητήσω ἄρα τίς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΟΚ τῇ ὑπὸ ΚΟΤ· ζητήσω ἄρα τίς ὁ τῆς ΕΟ πρὸς ΟΤ λόγος τῷ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ λόγῳ. ἀλλ' ὁ τῆς ΕΡ πρὸς ΡΤ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΕΠ πρὸς ΠΤ· ζητήσω ἄρα τίς ὁ τῆς ΕΠ πρὸς ΠΤ τῷ τῆς ΕΟ πρὸς ΟΤ· ἔχει δὲ σύγκρισιν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΟ πρὸς ΟΤ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΠ πρὸς ΠΤ (τοῦτο γὰρ προδεδείκται), ἀλλ' ὥς ἡ ΕΠ πρὸς ΠΤ, οὕτως ἡ ΕΡ πρὸς ΡΤ, ἡ ΕΡ ἄρα πρὸς ΡΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΟ πρὸς ΟΤ. διὰ δὲ τοῦτο ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΟΚ τῆς ὑπὸ ΚΟΤ· ἐλάσσων ἄρα περιφέρεια ἡ ΕΚ τῆς ΚΞ, ὅπερ ~ ιη'. Τεμνέτωσαν ἀλλήλους δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΒΡΓ, καὶ ἔστω ὁ πόλος τοῦ ΑΒΓ κύκλου ὁ Δ, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΔΖ ΔΘ ΔΛ ΔΝ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΕΞ τῇ ΠΜ· λέγω ὅτι, εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΜΓ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΛΝ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΜΓ, μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΛΝ, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΜΓ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΛΝ.

6.502 Ὑποκείσθω ἴση ἡ ΒΕ τῇ ΜΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Μ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε· ὁ ἄρα πόλῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΕ ΔΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ λοιποῦ σημείου. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΕΤΜ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΞΠ τῷ Ρ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Δ Ρ μέγιστος κύκλος ὁ ΔΡΣ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΞ τῇ ΠΜ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΜΓ ἴση ἐστίν, ὅλη ἄρα ἡ ΒΞ τῇ ΓΠ ἴση ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ξ τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Π. πόλῳ οὖν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΔΞ ΔΠ κύκλος γεγράφθω ὁ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΞΟ τῇ ΟΠ, ἀλλ' ἡ μὲν ΞΟ τῇ ΘΣ ἐστὶν ὁμοία, ἡ δὲ ΟΠ τῇ ΣΛ ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἡ ΘΣ ἄρα τῇ ΣΛ ἐστὶν ὁμοία. καὶ εἰσὶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΣ τῇ ΣΛ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΓΜ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΖΣ τῇ ΣΝ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ λοιπὴ τῇ ΝΛ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ~ Ἀλλὰ δὴ υποκείσθω τὸ αὐτὸ σχῆμα, ἔστω δὲ μείζων ἡ ΒΕ τῆς ΓΞ, ἴση δὲ ἡ ΕΥ τῇ ΨΞ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Δ Ψ κύκλος μέγιστος ὁ ΔΨΚΛ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΛΟ. Κατεσκευάσθω γὰρ τὸ σχῆμα ὁμοίως τοῖς ἐπάνω, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΠΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΧΠΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΡΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΤΡΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΤ.

6.504 καὶ ἐπεὶ ζητῶ τίς ἡ ΖΘ περιφέρεια τῇ ΛΟ, τουτέστιν ἡ ΕΗ τῇ ΚΦ, ζητήσω ἄρα τίς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΣΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΧΣΡ· ζητήσω ἄρα τίς ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ λόγος τῷ τοῦ ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ. ἔχει δὲ σύγκρισιν. καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ μείζων τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ. ὁμοίως γὰρ τῷ ἐπάνω δείξομεν. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ. διὰ δὲ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΣΤ τῆς ὑπὸ ΧΣΡ. μείζων ἄρα ἡ ΖΘ περιφέρεια τῆς ΛΟ περιφερείας. Ἐστω δὲ ἴση ἡ ΛΟ τῇ ΖΘ· λέγω ὅτι ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΕΥ τῆς ΨΞ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν περιφέρεια ἡ ΖΘ τῇ ΛΟ, ἴση ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΕΗ περιφέρεια τῇ ΚΦ (ὁμοία γὰρ ἡ μὲν ΖΘ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΛΟ τῇ ΚΦ), ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΣΤ τῇ ὑπὸ ΧΣΡ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΣΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς

τὸ ὑπὸ ΤΡΧ. ἐπεὶ δὲ ζητῶ τίς ἡ ΕΥ τῇ ΨΞ, ζητήσω ἄρα τίς ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ λόγος τῷ τοῦ ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ, τουτέστιν τῷ τοῦ ἀπὸ ΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ.

6.506 ἔχει δὲ σύγκρισιν. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΡ, τουτέστιν ἢ περ τὸ ὑπὸ ΧΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ, καὶ τὸ ὑπὸ ΧΕΤ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ ΤΡΧ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΕΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΡ. διὰ δὲ τοῦτο ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΠΤ τῆς ὑπὸ ΧΠΡ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΕΥ τῆς ΞΨ, ὅπερ· ~ ιθ'. Δεδειγμένων δὲ τούτων ἐξῆς ἀποδείξομεν εἰς ὃ ταῦτα ἐλήφθη. “ἐὰν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ἦ τῶν παραλλήλων καὶ τοῦτον τέμνωσιν δύο μέγιστοι κύκλοι, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἐξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γενομένων σημείων καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐξ ἀρχῆς τῆς ἀπώτερον”. Ἐνθάδε οἶονταί τινες προσκεῖσθαι τὸ πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ καὶ εἰς τὸ πρὸ αὐτοῦ ἀποδείκνυται ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικά λαμβανομένοις ὅτι δεῖ προσκεῖσθαι τὸ πρὸς ὀρθάς. Ἐὰν γὰρ ἐκθώμεθα τὸν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας τὸν ΑΒΓΔ καὶ τοὺς τέμνοντας αὐτὸν δύο μέγιστους κύκλους τοὺς ΒΕΔ ΑΕΓ, ὧν τὸν μὲν ΒΕΔ τῶν παραλλήλων, τὸν δὲ ΑΕΓ λοξὸν πρὸς τοὺς παραλλήλους, καὶ ἀπολάβωμεν ἀπὸ τοῦ ΑΕΓ ἴσας τὰς ΖΗ ΗΘ, καὶ γράψωμεν διὰ τῶν Ζ Η Θ παραλλήλους τῷ ΒΕΔ, οὐ πάντως τέμνουσιν τὴν ΑΒ περιφέρειαν (ἐὰν δὲ ἦ ἡ ΑΕ μὴ μείζων τετραγώνου).

6.508 εἴτα ἀποδείκνυται ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικά ὅτι τὸ πρὸς ὀρθάς κεῖται, ἵνα ἦ τετραγώνου. εἴτα τὸ αὐτὸ οἶονταί προσκεῖσθαι τῷ ζ' θεωρηματι, διότι διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, φασιν, δείκνυται [ἐκεῖ δὲ χρησίμῳ ἐστὶν τὸ πρὸς ὀρθάς]. ἔστιν δὲ τοῦτο σφόδρα εὐηθες· ἐρεῖ γάρ τις “οὐχὶ διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ, ὅπου χρήσιμον ἦν αὐτοὺς προσθεῖναι, τοῦτο δεικνύεις πάντως οὖν καὶ ἑτέρα δεῖξις ἢ μὴ προσχρησαμένη τῷ πρὸ αὐτοῦ δείξει τὸ προκείμενον”. ἔνιοι δὲ οἶονταί διὰ τοῦτο προσκεῖσθαι· γράψαντες γὰρ παραλλήλους κύκλους καὶ θέντες τῇ ΚΗ ἴσην τὴν ΗΛ καὶ διὰ τοῦ Λ γράψαντες παράλληλον κύκλον τὸν ΛΞ λέγουσιν “ἐπεὶ οἱ ΑΕΓ ΔΕΒ τὸν ΑΒΓΔ πρὸς ὀρθάς τέμνουσιν, τετραγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ· ἐλάσσων ἄρα τετραγώνου ἡ ΛΞ τοῦ ἰδίου κύκλου”, ἵνα εἴπωσιν “ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΞΘ ἐπὶ εὐθείας τῆς ἀπὸ Ξ ὀρθὸν τμήμα ἐφέστηκε τὸ ΞΛ καὶ τὸ συνεχὲς αὐτῷ, καὶ διήρηται ἡ τοῦ ἐφεστῶτος περιφέρεια εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἢ ἡμίσεια ἡ ΛΞ, ἢ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὸ Λ ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν”.

6.510 εἰς τοῦτ' οἶονταί χρήσιμον εἶναι τὸ πρὸς ὀρθάς, ἵνα ἡ ΞΛ ἐλάσσων ἦ ἢ ἡμίσεια τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος. ἔστιν δὲ τοῦτο εἰκαῖον. ἐάν τε γὰρ μείζων ἦ ἢ ἡμίσεια ἐάν τε ἐλάττων ἦ ἡμίσεια, γίνεται τὸ προκείμενον. ἐὰν γὰρ εἰς κύκλον, ὡς τὸν ΠΘ, διαχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ τῇ ἀπὸ τοῦ Θ, ὥσπερ ἡ ἀπὸ τοῦ Ξ, κοινὴ τομὴ τῶν ΠΞ ΛΞ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμήμα ἐπισταθῇ, ὡς τὸ ΞΛ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον ληφθῇ, ὡς τὸ Λ, ἢ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Ξ ἐλάσσων ἐστὶν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Λ πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τε διαμέτρου καὶ τῆς παραλλήλου αὐτῇ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ὡς ἐξῆς δείξομεν· ὥστε οὐδὲ διὰ τοῦτο προσετέθη ἂν τὸ πρὸς ὀρθάς [ἀλλ' ἐπειδὴ συμβαίνει, ὅταν μὲν ἡ ΑΕ τετραγώνου ἦ, μείζονα πάντως γίνεσθαι τὴν ΟΠ τῆς ΠΡ, ὅταν δὲ μείζων ἢ ἐλάττων ἦ, ποτὲ μὲν ἡ ΟΠ τῆς ΡΠ μείζων, ποτὲ δὲ ἐλάσσων ἔσται, ποτὲ δὲ ἴση αὐτῇ· τοῦτο γὰρ ἐξῆς]. κ'. Ἐστω δὲ νῦν δεῖξαι τὸ λημμάτιον τὸ λαμβανόμενον εἰς αὐτό. Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΓ, καὶ ταύτη παράλληλος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΕ εὐθείας τμήμα ἐφεστάτω τὸ ΔΖΕ ὀρθὸν πρὸς τὸν ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΖΔ οὐ μόνον ἐλαχίστη ἐστὶν τῶν πρὸς τὴν ΔΒ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν, ἀλλὰ καί, ἐὰν διάμετροι ἀχθῶσιν αἱ ΕΘΚ ΔΘΛ, τῶν πρὸς τὴν ΔΚ περιφέρειαν προσπιπτουσῶν.

6.512

Διήχθω γάρ τις ἡ ΖΝ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· πεσεῖται ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν. πιπτέτω ἡ ΖΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ ζητῶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΖΝ τῆς ΖΔ, ζητήσω ἄρα εἰ τὸ ἀπὸ ΝΖ τοῦ ἀπὸ ΖΔ μείζον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΝΖ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ ΝΜΖ, τῷ δὲ ἀπὸ ΔΖ τὰ ἀπὸ ΔΜΖ· ὅτι ἄρα ἡ ΝΜ τῆς ΔΜ ἐστὶν μείζων. ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ξ Α· ἔσται δὲ διάμετρος ἡ ΑΞ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔσται ἡ μὲν ΜΞ μεγίστη, ἡ δὲ ΜΑ ἐλαχίστη, ἡ δὲ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῆς ΜΔ, ὅπερ ~ κα'. Τούτων δὲ προδεδειγμένων ἔστω δεῖξαι τὸ θεώρημα, ὅπου διὰ τοῦ πόλου καὶ τῶν ἀποτεμνομένων ἀπὸ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσων περιφερειῶν οἱ κύκλοι γράφονται. Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστον κύκλον τὸν ΑΒΓ δύο κύκλοι μέγιστοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς οἱ ΒΓ ΔΕ, ὧν ὁ μὲν ΒΓ τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΔΕ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΖΗΘ, πόλος δὲ ἔστω τῶν παραλλήλων ὁ Α, καὶ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΜ ΑΝ ΑΞ· δεῖξαι ὅτι μείζων ἡ ΜΝ τῆς ΝΞ [πρόσκειται δὲ τὸ πρὸς ὀρθάς, ἵνα γένηται τὸ πρόβλημα]. Προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ ΒΓ ΔΕ κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεὶ τετραγώνου ἡ ΔΚ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΛ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΘ τῆς ΖΚ.

6.514 ἐπεὶ οὖν δύο κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ ΒΓΛ ΕΔΛ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΒΓΛ πόλος τὸ Α, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΜ ΑΝ ΑΞ, καὶ ἔστιν μείζων ἡ ΛΘ τῆς ΖΚ, ἴση δὲ ἡ ΘΗ τῇ ΗΖ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΜΝ τῆς ΝΞ διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅπερ ~ κβ'. Λέγω δὲ ὅτι, ἐὰν μὴ πρόσκειται τὸ πρὸς ὀρθάς, οὐ πάντοτε γίνεται τὰ κατὰ τὴν πρότασιν. Ὑποκείσθω δὴ τὰ αὐτὰ, καὶ ἔστω ἐλάσσων τετραγώνου ἡ ΚΔ· λέγω ὅτι καὶ οὕτως γίνεται τὸ πρόβλημα. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΖΗΘ, καὶ γεγράφθωσαν οἱ κύκλοι οἱ ΑΜ ΑΝ ΑΞ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν τετραγώνου ἡ ΚΔ, ἡμικυκλίου δὲ ἡ ΚΛ, μείζων ἄρα τετραγώνου ἡ ΛΔ· μείζων ἄρα ἡ ΛΘ τῆς ΚΖ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΜΝ τῆς ΝΞ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. [Ἀλλὰ δὲ ὑποκείσθω ἡ ΚΔ ἐλάσσων τετραγώνου, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΖΗ ΘΘ· μείζων ἄρα ἡ ΛΘ τῆς ΚΖ καὶ ἡ ΜΝ τῆς ΝΞ.] κγ'. Ἀλλὰ δὲ ὑποκείσθω τὸ αὐτὸ σχῆμα, καὶ ἔστω μείζων τετραγώνου ἡ ΚΔ, καὶ ἀπειλήφθω τετραγώνου ἡ ΚΖ· ἔσονται δὲ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἴσαι ἥτοι ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ζ ἢ ἐπὶ τὰ Ζ Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Ζ Κ μέρη. Ἀπειλήφθω ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ζ, καὶ ἔστωσαν αἱ ΖΗ ΘΖ, καὶ γεγράφθωσαν οἱ μέγιστοι κύκλοι [καὶ προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ ΓΒ ΕΔ κύκλοι]. καὶ ἐπεὶ ἡμικυκλίου ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἥς ἡ ΚΖ τεταρτημορίου ἐστίν, λοιπὴ ἡ ΛΖ τεταρτημορίου ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῇ ΖΚ.

6.516 ὧν ἡ ΗΖ τῇ ΘΖ ἴση ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΗ τῇ ΘΚ ἴση ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΝΞ τῇ ΞΜ· ὥστε, ἐὰν μείζων ἦ τετραγώνου ἡ ΚΔ, καὶ ἀποληφθῇ τετραγώνου ἡ ΚΖ, ἔτι δὲ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Ζ ἀποληφθῶσιν ἴσαι, οὐ γίνεται τὸ πρόβλημα. κδ'. Ἀλλὰ δὲ ὑποκείσθω τὸ αὐτὸ σχῆμα, καὶ ἔστω τετραγώνου ἡ ΚΖ, καὶ ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ Δ μέρη αἱ ΖΗ ΘΘ, καὶ γεγράφθωσαν οἱ μέγιστοι κύκλοι. ἐπειδὴ τετραγώνου ἡ ΚΖ, μείζων ἄρα ἡ ΚΖ τῆς ΘΛ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΞΜ τῆς ΝΞ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κε'. Ἀλλὰ δὲ ὑποκείσθω τὸ αὐτὸ σχῆμα, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι ἐπὶ τὰ Ζ Κ μέρη αἱ ΖΗ ΘΘ, καὶ γεγράφθωσαν οἱ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΘΜ ΑΖΝ ΑΗΞ. καὶ ἐπεὶ τετραγώνου ἐστὶν ἡ ΚΖ, ἀλλὰ καὶ ἡμικυκλίου ἡ ΚΛ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΛ τετραγώνου ἐστίν· ἡ ΖΛ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ΖΚ [ὧν ἡ ΘΗ τῇ ΗΖ ἴση ἐστίν]· λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΘ τῆς ΖΛ ἐστὶν ἐλάσσων· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΜΞ τῆς ΝΞ, ὅπερ ~ κς'. Ὡστε ἀποδέδεικται ὅτι, ἐὰν μὲν ὀρθοὶ τέμνωσι, πάντοτε γίνεται τὸ κατὰ τὴν πρότασιν, ἐὰν δὲ μὴ ὀρθοὶ τέμνωσι, ἐὰν μὲν ἡ ΚΔ ἐλάσσων ἦ [τῆς τοῦ] τετραγώνου [πλευρᾶς], πάντοτε πάλιν γίνεται τὸ κατὰ τὴν πρότασιν [τοῦ στοιχείου], ἐὰν δὲ ἡ ΚΔ μείζων ἦ [τῆς τοῦ] τετραγώνου [πλευρᾶς], οὐ πάντοτε γίνεται.

6.518 ἀλλὰ ἐὰν ἀπολάβω τὴν ΚΖ τετραγώνου, ἐὰν μὲν αἱ ἀπολαμβανόμεναι περιφέρειαι ἴσον ἀπέχωσιν τοῦ Ζ, οἱ γραφόμενοι κύκλοι μέγιστοι ἴσας ἀπολήψονται τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἐὰν δὲ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἴσαι ἐπὶ τῆς ΖΔ ἀπολαμβάνωνται, οἱ γραφόμενοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων ἐλάσσονα ἀπολήψονται τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς ἀπώτερον, ἐὰν δὲ αἱ

περιφέρειαι ἐπὶ τῆς ΖΚ ἀπολαμβάνονται, συμβαίνει τὸ κατὰ τὴν πρότασιν, τουτέστιν οἱ διὰ τῶν πόλων γραφόμενοι ἀπολήφονται μείζονα τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς ἀπώτερον· ὥστε, ἐὰν μὴ ὀρθοὶ τέμνωσιν, γίνεται μὲν τὸ κατὰ τὴν πρότασιν, οὐ πάντοτε δέ (ἐὰν μὴ αἱ ἀπολαμβάνόμεναι ἐπὶ τῆς ΖΚ ἀπολαμβάνονται). κζ'. Ἐπειδὴ τρεῖς μόναι διαφοραὶ τῆς θέσεως τῶν μεγίστων κύκλων θεωροῦνται ἐν τῇ σφαίρᾳ (ἡ γὰρ ὀρθοὺς εἶναι δεῖ αὐτοὺς πρὸς τὸν ἄξονα ἢ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας ἢ κεκλιμένους πρὸς τὸν ἄξονα), ἐπὶ τῶν τριῶν τὰς ἀποδείξεις ποιεῖται ὁ Αὐτόλυκος. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν α' καὶ β' καὶ γ' θεώρημα ἐπὶ τῶν προειρημένων τριῶν θέσεων τῶν κύκλων θεωρεῖται, διὰ τοῦτο καθολικῶς καὶ περιληπτικῶς ἐπ' αὐτῶν τὴν ὅλην σφαῖραν παραλαμβάνει. ἐάν τε γὰρ τὸν μέγιστον κύκλον ὀρθὸν πρὸς τὸν ἄξονα ὑποθώμεθα, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖα στρεφομένης τῆς σφαίρας κύκλους γράψει παραλλήλους τοὺς αὐτοὺς πόλους ἔχοντας τῇ σφαίρᾳ, καὶ πάλιν ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὰς ὁμοίας περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰ σημεῖα διεξέρχεται, καὶ [ἐπὶ τὰς περιφερείας] ἄς διεξέρχεται ἐν ἴσῳ χρόνῳ ὁμοιαὶ εἰσιν αἱ περιφέρειαι, ἐάν τε αὐτὸν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας ἢ λοξὸν πρὸς τὸν ἄξονα ὑποθώμεθα, ταῦτα συμβήσεται.

6.520 ἔνεκα οὖν τούτου ἐπὶ τῆς ὅλης σφαίρας ἐποιήσατο τὰς ἀποδείξεις ἐπὶ τούτων τῶν θεωρημάτων. Τὸ δὲ δ' θεώρημα ἐπὶ μόνῃς τῆς μιᾶς θέσεως ἀρμόζει, ὅταν ὁ μέγιστος κύκλος ὀρθὸς ἢ πρὸς τὸν ἄξονα, ὥστε πάντα τὰ λαμβανόμενα σημεῖα ἐπὶ τῆς σφαίρας μήτε ἀνατέλλειν μήτε δύνην, ὃ καὶ χαρακτηριστικὸν καὶ ἰδιὸν ἐστὶν ταύτης τῆς θέσεως. Τὸ δὲ ε' καὶ αὐτὸ χαρακτηριστικὸν ἐστὶν καὶ ἰδιὸν τῆς διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας ἐπ' οὐδεμιᾶς γὰρ ἄλλῃς τῶν δυεῖν θέσεων πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖα καὶ δύνει καὶ ἀνατέλλει, ἀλλ' ἐπὶ μόνῃς ταύτης. Τὸ δὲ ζ' θεώρημα χαρακτηριστικὸν ἐστὶν καὶ αὐτὸ τῆς λοιπῆς θέσεως τῆς λοξῆς πρὸς τὸν ἄξονα· οὐδεμία γὰρ τῶν ἄλλων θέσεων ἔχει τὸν μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, καὶ τούτων τὸν μὲν ὄντα ἐν τῷ φανερῷ ἡμισφαίριῳ διὰ παντὸς ὄντα φανερόν, τὸν δὲ ἐν τῷ ἀφανεῖ διὰ παντὸς ἀφανῆ· ἐφάπτεται μὲν γὰρ πᾶς μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, ἀλλ' οὐκ αἰὶ φανερῶν οὐδὲ αἰὶ ἀφανῶν. Πάνυ οὖν καλῶς καὶ κατὰ λόγον πρότερον τὰ καθολικὰ θεωρήματα προειπῶν [ἐν τοῖς ἐφεξῆς τρισὶ πρώτοις θεωρήμασι θεωρεῖται] μετὰ ταῦτα τὰ ἴδια καὶ χαρακτηριστικὰ τῶν εἰρημένων θέσεων ἐκτίθεται ἃ συμβαίνει γίνεσθαι ἐφ' ἐκάστης θέσεως [ἴδια], καὶ τὰ λοιπὰ ἅπερ ἐπὶ κοινῷ πάντα ἐστὶν θεωρήματα καὶ σωζόμενα ἐπὶ μιᾶς μόνῃς θέσεως (ἀλλὰ καὶ ἐπὶ δευτέρας) ἐξῆς τῇ τάξει τίθησιν. Εὐθέως γοῦν τὸ ζ' αὐτῷ θεώρημα σώζεται ἐπὶ τε ὀρθῆς τῆς διὰ τῶν πόλων θέσεως καὶ ἐπὶ τῆς λοξῆς πρὸς τὸν ἄξονα· ἐδείξαμεν γὰρ ἡμεῖς πῶς δύναται σώζεσθαι ἐπὶ τῆς διὰ τῶν πόλων θέσεως τὸ θεώρημα.

6.522 ἐπὶ μέντοι τῆς λοιπῆς θέσεως οὐ δύναται σώζεσθαι· οὔτε γὰρ ἀνατέλλει τι ἐκεῖ οὔτε δύνει. Τὸ δὲ η' λέγεται θεώρημα ἐπὶ μόνῃς τῆς λοξῆς πρὸς τὸν ἄξονα θέσεως ἐπὶ γὰρ τῆς θέσεως τῆς διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας τὰ ἅμα ἀνατέλλοντα σημεῖα ἅμα καὶ δύνει, καὶ τὰ ἅμα δύνοντα ἅμα καὶ ἀνατέλλει· πάντες γὰρ ἐκεῖ οἱ κύκλοι οἱ τέμνοντες τὸν ὀρίζοντα δίχα τέμνονται ὑπ' αὐτοῦ, καὶ ἡμικύκλια ὑπὲρ τε τὸν ὀρίζοντα ἔχουσιν καὶ ὑπὸ τὸν ὀρίζοντα, καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν τὰ ἅμα ἀνατέλλοντα ἅμα καὶ δύνει, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. Ὀμοίως δὲ καὶ τὸ θ' αὐτῷ ἐπὶ τῆς αὐτῆς θέσεως μόνῃς παραλαμβάνεται· βούλεται γὰρ τοὺς τοῦ αὐτοῦ ἐφαπτομένους μὴ ἄλλου τινὸς ἐφάπτεσθαι ἢ μόνου τοῦ αἰὶ φανεροῦ. Τὸ δὲ ι' ἐπὶ τε τῆς διὰ τῶν πόλων θέσεως σώζεται καὶ ἐπὶ τῆς λοξῆς πρὸς τὸν ἄξονα, μόνῃς δὲ αὐτὸς τῆς ἐπὶ τῆς λοξῆς θέσεως ἀποδείξεως ἐμνήσθη. ἡμεῖς δὲ προσαπεδείξαμεν σωζόμενον τοῦτο καὶ ἐπ' ἐκείνης τῆς θέσεως· ἐπὶ μέντοι τῆς ὀρθῆς πρὸς τὸν ἄξονα ἔφαμεν πῶς δις μὲν οὐκ ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας, αἰὶ δέ. Ἐπὶ δὲ τοῦ ια' θεωρήματος τὴν χαλεπωτέραν εἴληφε θέσιν τὴν λοξὴν πρὸς τὸν ἄξονα ἐν τῷ λέγειν “λοξὸς ὢν πρὸς τὸν ἄξονα” καὶ “μειζόνων ἐφάπτεται ἢ ὢν ὁ ἐξ ἀρχῆς

ἐφήπτετο”, ἐπιστάμενος τῆς διὰ τῶν πόλων θέσεως ὑπολειπομένης ῥαδίαν εἶναι τὴν ἀπόδειξιν· ἐδείξαμεν γὰρ ἡμεῖς πῶς καὶ ἐπ’ ἐκείνης τῆς θέσεως κατὰ πάντα τόπον τοῦ ὀρίζοντος τοῦ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ὧν ἐφάπτεται τὰς τε ἀνατολάς καὶ τὰς δύσεις ποιεῖται. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιβ’ θεωρήματος φανερόν ὅτι ἐπὶ μόνῃς τῆς λοξῆς θέσεως συμβαίνει τε καὶ ἀρμόζει.

6.524 [Δεῖ μέντοι καὶ τοῦτο μὴ ἀγνοεῖν ὅτι ὀρθοὶ μὲν πρὸς τὸν ἄξονα μέγιστοι κύκλοι πολλοὶ οὐ δύνανται ὑποστῆναι, εἷς δὲ μόνος καὶ μονογενής, διὰ δὲ τῶν πόλων τῆς σφαίρας καὶ λοξοὶ πρὸς τὸν ἄξονα ἄπειροι. καὶ οἱ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας πάντες στρεφομένης τῆς σφαίρας ἐφαρμόζουσιν ἑαυτοῖς, οἱ δὲ λοξοὶ πάντες μὲν οὐκέτι, ἐκεῖνοι δὲ μόνοι οἵτινες τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτονται (ὅς παράλληλος περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ καὶ ἔτι ὀρθὸς πρὸς τὸν ἄξονα). μήποτ’ οὖν διὰ τοῦτο καὶ ὁ Αὐτόλυκος, ἀρχόμενος τὰ παρακολουθοῦντα ἴδια καὶ χαρακτηριστικὰ ἐκάστη θέσει ἐκτίθεσθαι, ἀπὸ τῆς ἀπλουστάτης καὶ πρώτης ἤρξατο θέσεως. αὕτη δὲ ἐστὶν ἡ τὸν μέγιστον κύκλον ἔχουσα ὀρθὸν πρὸς τὸν ἄξονα· μονογενής δὲ αὕτη ἐστὶν ἡ θέσις, ὡς ἔφημεν, καὶ μετακίνησιν οὐδ’ ἠντινοῦν ἐπιδεχομένη. μετὰ δὲ ταύτην τὴν τῇ τάξει ἀπλουστέραν. αὕτη δὲ ἐστὶν ἡ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας, καθ’ ἣν, ἔφημεν, ἄπειροι μὲν δύνανται κύκλοι γράφεσθαι διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας, πάντες δ’ ἑαυτοῖς ἐφαρμόζοντες διὰ τὸ τοὺς πόλους ἐσθηκέναι καὶ μὴ μεταγίνεσθαι. ἡ δ’ ἄλλη θέσις ἔχει μὲν ἐπὶ τινων τοῦτο, ὡς ἔφημεν, ἐπὶ δὲ τινων οὐκ ἔχει· ταύτη οὖν ταύτην μὲν τρίτην τῇ τάξει ἔθηκεν, τὴν δὲ ἑτέραν ἐν δευτέρᾳ χώρᾳ κατέταξεν.] κη’. Ταῦτα μὲν οὖν εἴρηται λόγῳ περιοχῆς, ζητεῖται δ’ ἐν τῷ βιβλίῳ, ὅπερ ἀναγκαῖον παραμυθῆσασθαι, πῶς τὰ μὴ ἔσω τοῦ ἄξονος ὄντα σημεῖα, ἀλλ’ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, κύκλους γράφει συμπεριαγόμενα τῇ σφαίρᾳ. εἰ μὲν γὰρ τὰ σημεῖα εἰστέκει καὶ μὴ συμπεριήγεται τῇ σφαίρᾳ, πιθανὸν ἦν τὸ λέγειν ὅτι ἡ γραμμὴ ἡ γινομένη ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας ὑπὸ τινος σημείου κύκλου ἐστὶν περιφέρεια, εἰ δ’ αὖ πάλιν ἢ τε σφαῖρα ἐστρέφετο καὶ τὸ σημεῖον ὁμαλῶς ἐφέρετο κατ’ αὐτῆς συμπεριαγόμενον αὐτῇ, ὑπολειπόμενον μέντοι ἢ ὑπεκτρέχον κατὰ τὰ αὐτὰ τῆς σφαίρας, καὶ οὕτως ἂν εἶχε τινα λόγον.

6.526 ὑπολειπόμενον τε γὰρ τῆς σφαίρας ἐξ ἀνάγκης τόπους μεταμεῖβον κατὰ συνέχειαν ἂν γραμμὴν τινα ἐγέννα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὑπεκτρέχον δὲ τῷ αὐτῷ λόγῳ [κύκλον γράψειεν ἂν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας], μήτε δὲ ὑπολειπόμενον μήτε ὑπεκτρέχον, αἰεὶ δὲ τὸν αὐτὸν τόπον ἐπέχον ἐν τῇ σφαίρᾳ στρεφομένης αὐτῆς, θαυμαστὸν ἴσως ἂν δόξειεν πῶς κύκλον γράψειεν· ὀφείλει γὰρ τὸ γράφον περὶ τι γράφειν ἐστός, εἰ δὲ περὶ ὃ γράφει οὐχ ἔστηκεν, πῶς γράφει τὸ γράφον; πάντα μὲν οὖν τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ στρεφομένης αὐτῆς οὐχ ἔστηκεν, μόνος δὲ ὁ ἄξων ἔστηκεν, καὶ ἐπὶ τὸν ἐστῶτα ἀπὸ τοῦ φερομένου αἰεὶ σημείου κάθετος ἄγεται καὶ συμβάλλει τῷ ἄξονι δῆλον ὅτι κατὰ τι σημεῖον· δεῖ ἄρα τὸ σημεῖον καθ’ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐσθηκέναι, ἐπεὶ καὶ ὁ ἄξων ἔστηκεν. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν σημεῖον ἐν τῷ ἄξονί ἐστίν, ἡ δὲ ἀχθεῖσα κάθετος ἐν τῇ σφαίρᾳ, στρεφομένης τῆς σφαίρας συμπεριάγεται μὲν ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ἑτέρου πέρατος τοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἔστηκεν δὲ τὸ ἐπὶ τοῦ ἄξονος. ἀνάγκη οὖν συμπεριφερομένην ταύτην τὴν εὐθεῖαν σὺν τῇ σφαίρᾳ, καθ’ ὃ μὲν φέρεται ἡ σφαῖρα κινουμένης αὐτῆς, καθ’ ὃ δὲ πεπεράτῳ ἐστῶσης, καὶ μὴ μεταμειβούσης τὰ πέρατα, κατ’ ἐπιπέδου φέρεσθαι. ἔστηκεν δ’ ἐκεῖνο τὸ ἐπίπεδον, καθ’ οὗ φέρεται [τοῦτο δὲ τὸ ἐπίπεδον οὐκ ἀλλαχόσε ἐστὶν ἢ ἐν τῇ σφαίρᾳ]. ἐπεὶ οὖν ἐπίπεδον ἐστός ὑπόκειται, καθ’ οὗ φέρεται ἡ εἰρημένη εὐθεῖα, καὶ ἔστιν εἰλημμένα ἐπ’ αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα [τὰ πέρατα τῆς φερομένης εὐθείας τό τε πρὸς τῷ ἄξονι καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας], δυνατόν δὲ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφειν, δῆλον ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ἐπὶ τοῦ ἄξονος σημείῳ διαστήματι δὲ τῷ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημείῳ κύκλος γραφόμενος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γραφήσεται, ἐφ’ οὗ ἡ εἰρημένη εὐθεῖα ἐφέρετο· τὸ ἄρα σημεῖον τὸ ἐπὶ τοῦ

ἄξονος ἐστὸς αἷτιον ἐγένετο τοῦ κύκλον γραφῆναι ὑπὸ τοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημείου [ἀδύνατον γὰρ μὴ ἐστῶτός τινος αὐτὸν γραφῆναι]· οὐκ ἄρα δυνατόν ἦν τὸ πρόβλημα γενέσθαι, εἰ μὴ κάθετος ἦν ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸν ἐστῶτα ἄξονα.

6.528 [Καὶ τοῦτο δὲ δεῖ εἰδέναι ὅτι, ὅτε κάθετον ἄγει ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἐκβάλλει τὸ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς καθέτου ἐπίπεδον, ὡς ἐπὶ ἐστηκυίας τῆς σφαίρας τοῦτο ποιεῖ. ἀμήχανον γὰρ ἐστὶν στρεφομένης τῆς σφαίρας κάθετον ἄξαι ἐπὶ τὸν ἄξονα· δεῖ γὰρ προϋποκεῖσθαι ἐπίπεδον, ἵνα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὑπαρχούσης εὐθείας τε καὶ σημείου τυχόντος ἀπὸ τοῦ σημείου κάθετον ἀγάγωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. φερομένου δὲ τοῦ σημείου ἐν τῷ στρέφεσθαι τὴν σφαῖραν καὶ παριόντος ἀμύθητα ἐπίπεδα, τῆς δὲ εὐθείας ἐστῶσης, οὐ δύναται κάθετος ἄγεσθαι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ὅταν δὲ καὶ τὸ σημεῖον στῇ καὶ ἡ εὐθεῖα, τότε νοουμένων αὐτῶν ἐν ἐπιπέδῳ δυνατόν ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν κάθετον ἀγαγεῖν.] καθ'. 'Ὅτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετος ἀγομένη ἐντὸς τῆς σφαίρας αὐτῷ συμπίπτει οὕτως δειχθήσεται. Ἔστω γὰρ σφαῖρα, ἥς ἄξων ὁ AB, πόλοι δὲ αὐτῆς τὰ A B σημεία, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν AB· λέγω ὅτι ἐντὸς τῆς σφαίρας τῇ AB συμπίπτει. Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, συμπίπτέτω αὐτῇ ἐκτὸς κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὴν AB κάθετος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς σφαίρας τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶν τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΑ· μείζων ἄρα ἡ ΕΔ τῆς ΕΓ.

6.530 καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστὶν τὸ ΕΓΔ καὶ μείζων ἡ ΕΔ τῆς ΕΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΓ μείζων ἐστίν. ὀρθὴ δ' ἡ ὑπὸ ΕΔΓ· μείζων ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΕΓΔ· τριγώνου ἄρα τοῦ ΕΓΔ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζους εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς τῆς σφαίρας αὐτῇ συμπίπτει. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ κατὰ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος τὰ A B· ἐντὸς ἄρα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἀγομένη ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λ'. 'Ἐν τῷ δ' θεωρήματι ὁ Θεοδόσιος ψευδογραφεῖται. ἀποδείξας γὰρ τὴν ΝΘ ἡμέραν μείζονα τῆς ΜΠ ἡμέρας ὑπενοήθη ὡσαύτως ἀποδείξαι ὅτι καὶ ἡ προγεγενημένη νύξ τῆς ΝΘ ἡμέρας τῆς ἐπιγινομένης νυκτὸς τῇ ΜΠ ἡμέρᾳ ἐλάσσων ἐστίν. Ἔστω γὰρ ἡ πρὸ τῆς Ν ἀνατολῆς δύσις ἡ Ρ, καὶ κείσθω τῇ ΡΝ ἴση ἡ ΠΣ [καθ' ὑπόθεσιν, καὶ ἔστω ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου σχήματος γινόμενος ὁ λόγος]. εἰ μὲν οὖν ἐλάσσων ἦν [καὶ] ἡ ΝΘ τῆς ΜΠ, ἐγένετο ἂν αὐτῷ καὶ ὅλη ἡ. ΝΔ ὅλης τῆς ΔΠ ἐλάσσων, καὶ αἱ παραλλαγαὶ τῶν ἴσων περιφερειῶν αἱ ΝΡ ΠΣ ὡσαύτως ἐπεραίνοντο. νυνὶ δέ, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΘΔ τῆς ΔΜ μείζων δὲ ἡ ΘΝ τῆς ΜΠ, οὐκ ἔστιν φανερόν ὅτι καὶ ὅλη ἡ ΔΝ ὅλης τῆς ΔΠ ἐλάσσων ἐστίν· δυνατόν γὰρ ἐστὶν καὶ ἴσην γίνεσθαι καὶ μείζονα. μὴ οὔσης δὲ ἐλάσσονος τῆς ΔΝ οὐκέτι δυνησόμεθα λέγειν διότι ἡ ΝΡ περιφέρεια ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ παραλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἢ περ ἡ ΠΣ. ἔδει οὖν προδείξαντα τὸν Θεοδόσιον ὅτι αἰεὶ αἱ συντιθέμεναι περιφέρειαι τῶν νυκτῶν καὶ τῶν ἡμερῶν ἐπὶ τοῦ ΔΓ μέρους τῶν συντιθεμένων περιφερειῶν ἐπὶ τοῦ ΔΕ μέρους ἐλάσσονές εἰσιν, οὕτως ἐπιλέγειν ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ δειχθήσεται ὁμοίως [ταῦτα ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου σχήματος].

6.532 λα'. 'Ἡμεῖς δὲ τὸ παραλελειμμένον ὑπὸ τοῦ Θεοδοσίου ἀπεδείξαμεν ἀστρονομικώτατα τοῦτον τὸν τρόπον. Ἀνατελλέτω γὰρ ὁ ἥλιος πρὸς τῷ Ζ, δυνέτω δὲ πρὸς τῷ Η, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ ΔΖ τῆς ΔΗ, καὶ πάλιν ἔστω ἡ μὲν προγεγενημένη δύσις τῆς Ζ ἀνατολῆς ἡ Θ, ἡ δὲ προγεγενημένη ἀνατολὴ τῆς Θ δύσεως ἡ Ν, ἔτι δὲ ἔστω ἡ μὲν μετὰ τὴν Η δύσιν ἀνατολὴ ἡ Κ, ἡ δὲ μετὰ τὴν Κ ἀνατολὴν δύσις ἡ Λ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΖΘ νύξ ἐλάσσων τῆς ΗΚ νυκτός, ἡ δὲ ΘΝ ἡμέρα μείζων τῆς ΚΛ ἡμέρας· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΔΝ ὅλης τῆς ΔΛ ἐλάσσων ἐστίν. Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ μὲν ΔΖ τῆς ΔΗ ἡ δὲ ΖΘ τῆς ΗΚ, ὅλη ἄρα ἡ ΔΘ ὅλης τῆς ΔΚ ἐλάσσων ἐστίν. ἔστω οὖν αὐτῇ ἴση ἡ ΔΜ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΝΔ ὅλη τῇ ΔΛ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΝ λοιπῇ τῇ ΜΛ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὁ ἥλιος ἀνατείλας μὲν πρὸς τῷ Ν ἔδυνε πρὸς

τῷ Θ, ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΘΝ διαπορεύεται, ἡ ΘΝ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν ΝΘ διαπορεύεται καὶ τὴν ἴσην τὴν ΜΛ· ἐν ἴσῳ ἄρα ὁ ἥλιος τὴν ΜΛ διαπορεύεται καὶ ἡ ΘΝ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον. ἐν ἴσῳ δὲ ἡ ΘΝ παραλλάσσει τὸ φανερόν καὶ ἡ ΛΜ (ἴσαι γὰρ οὖσαι ἴσον ἀπέχουσιν τῆς θερινῆς συναφῆς)· ἐν ἴσῳ ἄρα ὁ ἥλιος τὴν ΜΛ διαπορεύεται καὶ ἡ ΜΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν. ἀλλ' ὁ μὲν ἥλιος τὴν ΜΛ διαπορεύεται ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἑκατέραν τῶν ΜΚ ΚΛ διαπορεύεται, ἡ δὲ ΜΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἐν ᾧ ἡ μὲν ΜΚ ἀνατέλλει ἡ δὲ ΚΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος ἑκατέραν τῶν ΜΚ ΚΛ διαπορεύεται καὶ ἡ μὲν ΜΚ ἀνατέλλει ἡ δὲ ΚΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν.

6.534 ὦν ἴσος ὁ χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΚΛ διαπορεύεται καὶ ἡ ΚΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν [ἀνατέλλει μὲν γὰρ πρὸς τῷ Κ, δύνει δὲ πρὸς τῷ Λ]· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΜΚ διαπορεύεται ἴσος ἐστὶν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει. τοῦτο δὲ ἐστὶν ἀδύνατον· πᾶσαν γὰρ περιφέρειαν ὁ ἥλιος ἐν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἢ περὶ αὐτὴν ἡ περιφέρεια ἀνατέλλει ἢ πάλιν δύνει (τοῦτο γὰρ δείξομεν ἐχομένως)· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΝΔ τῇ ΔΛ. Ἔστω δὲ πάλιν μείζων ἡ ΝΔ τῆς ΔΛ, καὶ κείσθω τῇ ΔΝ ἴση ἡ ΔΞ, ἐτέθη δὲ καὶ ἡ ΔΘ ἴση τῇ ΔΜ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΝ λοιπὴ τῇ ΜΞ ἴση ἐστίν, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν ΘΝ διαπορεύεται καὶ ἡ ΘΝ παραλλάσσει τὸ φανερόν. ἐν ᾧ δὲ ὁ ἥλιος τὴν ΘΝ ἐν τούτῳ καὶ τὴν ΜΞ, καὶ ἐν ᾧ ἡ ΘΝ παραλλάσσει τὸ φανερόν, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΜΞ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν ΜΞ διαπορεύεται καὶ ἡ ΜΞ παραλλάσσει τὸ φανερόν. ἀλλ' ὁ μὲν ἥλιος διαπορεύεται τὴν ΜΞ περιφέρειαν ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ [ὁ ἥλιος] ἐκάστην τῶν ΜΚ ΚΛ ΛΞ διαπορεύεται, ἡ δὲ ΜΞ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ μὲν ΜΚ ἀνατέλλει ἡ δὲ ΚΛ παραλλάσσει ἡ δὲ ΛΞ δύνει [τὴν δὲ ΛΞ διαπορεύεται]. ἀλλ' ὁ χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΚΛ διαπορεύεται ἴσος ἐστὶν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΚΛ παραλλάσσει τὸ φανερόν· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΜΚ διαπορεύεται ἴσος ἐστὶν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει, καὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ καὶ ὁ ἥλιος τὴν ΛΞ διαπορεύεται ἴσος τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΛΞ δύνει. τοῦτο δὲ ἐστὶν ἀδύνατον (πᾶσαν γὰρ περιφέρειαν ὁ ἥλιος ἐν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἢ περὶ αὐτὴν ἀνατέλλει ἢ πάλιν δύνει), ὥστε οὐκ ἂν εἴη μείζων ἡ ΝΔ τῆς ΔΛ.

6.536 ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΔ τῆς ΔΛ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς δειχθήσεται. τούτων οὖν προδεδειγμένων προβήσεται καὶ ἡ τοῦ Θεοδοσίου ἀποδείξεις κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον. λβ'. Ὅτι δὲ πᾶσαν περιφέρειαν ὁ ἥλιος ἐν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἢ περὶ ἐκείνην ἡ περιφέρεια ἀνατέλλει ἢ πάλιν δύνει, νῦν δείξομεν. δόξει δὲ τισι φανερόν εἶναι τοῦτο καὶ μὴ προσδεόμενον ἀποδείξεως· “ἐπεὶ γὰρ ὁ μὲν ἥλιος ἐνιαυτῷ τὸν κύκλον διαπορεύεται, αὐτὸς δὲ ὁ κύκλος ἐν νυκτὶ καὶ ἡμέρᾳ ἀνατέλλει, γίνεται ὁ χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὸν κύκλον διαπορεύεται πολλαπλάσιος τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ὁ κύκλος ἀνατέλλει. ἐπεὶ οὖν ἐν μείζονι χρόνῳ ὁ ἥλιος τὸν ὅλον κύκλον διαπορεύεται ἢ περὶ αὐτὸς ὁ κύκλος ἀνατέλλει, καὶ τὰς κατὰ μέρος τοῦ κύκλου περιφερείας ἐν μείζονι χρόνῳ ὁ ἥλιος διελεύσεται ἢ περὶ ἐκεῖναι αἱ περιφερείαι ἀνατελοῦσιν ἢ δύσονται. ὥστε φανερόν τὸ προκείμενον καὶ οὐ προσδεόμενον πλείονος ἐπισκέψεως”. πρὸς οὐς ῥητέον διότι, εἰ μὲν αἱ κατὰ μέρος ἴσαι περιφερείαι τοῦ ζωδιακοῦ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλουσιν ἢ πάλιν δύνουσιν, συμφανὲς ἂν ἡμῖν ὑπῆρχεν τὸ λεγόμενον· αὐτὸς τε γὰρ ὁ κύκλος ὁμαλῶς ἂν ἀνέτελλεν καὶ οὕτως οἱ χρόνοι πρὸς ἀλλήλους συνεκρίνοντο, ἐπειδὴ καὶ ὁ ἥλιος ὁμαλῶς κινούμενος ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὰς ἴσας περιφερείας διέρχεται. νυνὶ δὲ τοῦ μὲν ἡλίου ὁμαλῶς διαπορευομένου τὸν κύκλον, αὐτοῦ δὲ τοῦ κύκλου ἀνωμάλως τὰς ἀνατολάς καὶ τὰς δύσεις ποιουμένου οὐκ ἐξέσται ἡμῖν λέγειν ὅτι, πλείονος ὄντος τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὸν κύκλον διαπορεύεται ἢ περὶ αὐτὸς ὁ κύκλος ἀνατέλλει, πλείων ἔσται ὁ κατὰ μέρος χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τινὰ περιφέρειαν διαπορεύεται ἐκείνου τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἐκείνη ἡ περιφέρεια ἀνατέλλει τε καὶ δύνει. τούτων δὲ τοιούτων ὑπαρχόντων οὐκέτι πρόδηλον καθέστηκεν διότι

πάσαν περιφέρειαν ὁ ἥλιος ἐν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἢ περὶ ἢ περιφέρειαν ἀνατέλλει ἢ πάλιν δύνει.

6.538 πόθεν δὲ ὅτι οὐχὶ τὸν μὲν ὅλον κύκλον ἐν πλείονι χρόνῳ διέρχεται ἢ περὶ αὐτὸς ὁ κύκλος ἀνατέλλει, οἱ δὲ κατὰ μέρος χρόνοι ἐν οἷς ὁ ἥλιος ἐκάστην περιφέρειαν τοῦ κύκλου διέρχεται, ἐλάττονές εἰσιν τῶν κατὰ μέρος χρόνων, ἐν οἷς ἐκάστη τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν ἀνατέλλει; ὅτι γὰρ δυνατόν ἐστιν ἐπὶ τινων κινήσεων γίνεσθαι τοῦτο, φανερόν ἐκ τούτου. Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Delta$ ὀρθὴν ἔχον τὴν B γωνίαν, καὶ ἑκατονταπλασία συναμφοτέρως ἢ ΔA AB τῆς AB , καὶ γεγράφθω περὶ κέντρον τὸ A κύκλος, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεΐα ἢ $N\Theta$ ἴση τῇ $B\Delta$, καὶ διαπορευέσθω τὸ μὲν N σημεῖον ὁμαλῶς φερόμενον τὴν $N\Theta$ ἐν ὥραις δέκα, ἢ δὲ B συμβολή, καθ' ὃ συμβάλλει ἢ AB τῇ $B\Delta$, διαπορευέσθω τὴν $B\Delta$ ἐν ὥρᾳ μιᾷ, καὶ τετμήσθω ἢ EH περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἢ $AZ\Gamma$. ἐπεὶ οὖν ἐν $\tilde{\omega}$ χρόνῳ τὸ E σημεῖον τὴν EH διαπορεύεται ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ B τὴν $B\Delta$ διαπορεύεται, ἐν $\tilde{\omega}$ δὲ τὸ E τὴν EZ ἐν τούτῳ τὸ B τὴν $B\Gamma$, καὶ ἔστιν ὁ χρόνος ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ E τὴν EH διαπορεύεται τοῦ χρόνου ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ E τὴν EZ διαπορεύεται διπλάσιος, καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ B τὴν $B\Delta$ διαπορεύεται τοῦ χρόνου ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ B τὴν $B\Gamma$ διαπορεύεται διπλάσιος. ἀλλὰ τὸ B τὴν $B\Delta$ διέρχεται ἐν ὥρᾳ μιᾷ· τὸ B ἄρα τὴν $B\Gamma$ διελεύσεται ἐν ἡμιωρίῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ EZ περιφέρεια τῇ ZH , ἴση ἐστὶν ἢ ὑπὸ EAZ γωνία τῇ ὑπὸ ZAH · ὥς ἄρα συναμφοτέρως ἢ ΔA AB πρὸς τὴν AB , οὕτως ἢ ΔB πρὸς τὴν $B\Gamma$.

6.540 ἑκατονταπλασία δὲ συναμφοτέρως ἢ ΔA AB τῆς AB · ἑκατονταπλασία ἄρα καὶ ἢ ΔB τῆς $B\Gamma$. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὥς τὴν ΔB πρὸς $B\Gamma$, οὕτως τὴν ΘN πρὸς $N\Xi$, ἔσται οὖν καὶ ἢ $N\Theta$ τῆς $N\Xi$ ἑκατονταπλασία. καὶ ἔστιν ἴση ἢ $B\Delta$ τῇ $N\Theta$ · ἴση ἄρα καὶ ἢ $B\Gamma$ τῇ $N\Xi$. ἐπεὶ οὖν τὸ N ὁμαλῶς κινούμενον διαπορεύεται τὴν $N\Theta$ ἐν ὥραις δέκα, τὸ ἄρα ἑκατοστὸν αὐτῆς μέρος ἐν ὥρᾳ δεκάτῳ διελεύσεται, τὸ δὲ B ἀνωμάλως κινούμενον διέρχεται τὴν $B\Gamma$ ἐν ὥρᾳ ἡμίσει. δύο οὖν ὑπαρχουσῶν κινήσεων καὶ τῆς μὲν ἀνωμάλου τῆς δὲ ὁμαλῆς, ὁ μὲν ὅλος χρόνος ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ N τὴν $N\Theta$ διέρχεται ὁμαλῶς τοῦ ὅλου χρόνου τοῦ ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ B τὴν $B\Delta$ διέρχεται ἀνωμάλως πλείων ἐστίν, ὁ δὲ κατὰ μέρος χρόνος ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ N τὴν $N\Xi$ διέρχεται τοῦ κατὰ μέρος χρόνου ἐν $\tilde{\omega}$ τὸ B τὴν $B\Gamma$ διέρχεται ἐλάσσων ἐστίν. ὥστε οὐθὲν ἀπέχει καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ ἡλίου κινήσεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου ἀνατολῆς τὸ αὐτὸ γίνεσθαι, τὸν μὲν ἥλιον ἐν μείζονι χρόνῳ διαπορεύεσθαι τὸν κύκλον, αὐτὸν δὲ τὸν κύκλον ἐν ἐλάσσονι ἀνατέλλειν, πάλιν δὲ ἐκ τῶν ἐναντίων τινὰς μὲν περιφερείας τοῦ κύκλου ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλειν, τὸν δὲ ἥλιον αὐτὰς ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ διέρχεσθαι· μειουμένου γὰρ τοῦ τάχους τῆς ἀνατολῆς τοῦ κύκλου, πόθεν ὅτι οὐχὶ μειοῦται ἐπὶ τοσοῦτον ὥστε τινὰ περιφέρειαν αὐτοῦ ἐν μείζονι χρόνῳ ἀνατέλλειν ἢ περὶ ὁ ἥλιος ἐκείνην τὴν περιφέρειαν διέρχεται; λγ'. Δεῖ οὖν ἡμᾶς ἐπισκέψασθαι πότερόν ποτε τοῦ ζωδιακοῦ τὸ τάχος τῶν ἐπ' ἄπειρον αὐξομένων καὶ ἐπ' ἄπειρον μειουμένων ἐστίν, ἢ τῶν ἐπ' ἄπειρον μὲν αὐξομένων οὐκ ἐπ' ἄπειρον δὲ μειουμένων, ἢ τῶν ἐπ' ἄπειρον μὲν μειουμένων οὐκ ἐπ' ἄπειρον δὲ αὐξομένων, ἢ οὔτε τῶν ἐπ' ἄπειρον μειουμένων οὔτε τῶν ἐπ' ἄπειρον αὐξομένων. ὅτι γὰρ περί τινα μεγέθη ταῦτα γίνεσθαι συμβαίνει, φανερόν ἐκ τούτων. Παντὸς γὰρ τοῦ προτεθέντος μεγέθους μείζονα γίνεται καὶ πάλιν ἐλάττονα πάντα τὰ ἐπὶ τῶν ἀδιορίστων προβλημάτων γινόμενα.

6.542 Δυνατὸν γὰρ ἐστὶν περὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεΐαν παντὸς τοῦ παραβεβλημένου ἤδη χωρίου ὑπερβάλλοντος τετραγώνῳ μείζον χωρίον παραβάλλειν ὑπερβάλλον τετραγώνῳ καὶ πάλιν ἔλασσον, καὶ τοῦτο γίνεται ἐπ' ἄπειρον. [ἐπὶ ταύτης οὖν τὸ μέγεθος τῆς παραβολῆς αὖξεται ἐπ' ἄπειρον καὶ πάλιν μειοῦται.] Τῶν δὲ ἐπ' ἄπειρον αὐξομένων οὐκ ἐπ' ἄπειρον δὲ μειουμένων ἐστὶν τὸ ἐπὶ τοῦ προγεγραμμένου τριγώνου γινόμενον. Ἐὰν γὰρ ἢ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τηθῇ δίχα ἢ $A\Gamma$ κατὰ τὸ E , καὶ διαχθῇ ἀπὸ τοῦ E εὐθεΐα ἢ $ZE\eta$, ἔστι μείζον τὸ $Z\eta B$ τρίγωνον τοῦ $AB\Gamma$

τριγώνου. καὶ πάλιν ἐὰν διαχθῇ ἡ ΘΕΚ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΒΘΚ τοῦ ΖΒΗ τριγώνου. καὶ αἰεὶ διαγομένων ἐπ' ἄπειρον τῶν εὐθειῶν αὐξηθήσεται τὸ τρίγωνον. οὐδέποτε δὲ ἡ διαχθεῖσα εὐθεῖα ποιήσει τρίγωνον ἔλασσον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. [τοῦτο οὖν τὸ μέγεθος αὐξεται μὲν ἐπ' ἄπειρον, μειοῦται δὲ οὐκέτι, ἀλλ' ἐστι τι μέγεθος τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἔλασσον ὃ οὐκ ἔσται τρίγωνον.] λδ'. Τῶν δὲ ἐπ' ἄπειρον μὲν μὴ αὐξομένων ἐπ' ἄπειρον δὲ μειουμένων ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἐναρμοζομένης εἰς τὸν κύκλον.

6.544

οὐ γὰρ πάσης τῆς προτεθείσης δυνατόν ἐστὶν μεῖζονα εἰς τὸν κύκλον ἐναρμόσαι. ἐπειδὴ γὰρ ἐστὶν ὠρισμένον μέγεθος τὸ τῆς διαμέτρου, ταύτης μεῖζονα εὐθεῖαν οὐ δυνατόν ἐναρμόσαι· ἐπὶ μέντοι γε τὸ ἔλασσον δυνατόν ἐστὶν γίνεσθαι ἐπ' ἄπειρον [πάσης γὰρ εὐθείας δυνατόν ἐστὶν ἐλάσσονα ἐναρμόσαι]. Φανερόν δὲ γίνεται τὸ λεγόμενον καὶ ἐκ τοῦ μὴ πᾶν τὸ δοθὲν παρὰ τὴν δοθεῖσαν παραβάλλεσθαι ἐλλεῖπον τετραγώνῳ· τὸ γὰρ παραβαλλόμενον χωρίον οὐκ ἐπ' ἄπειρον δυνησόμεθα αὐξοντες παραβάλλειν, ἐπειδὴ ἐστὶν τι χωρίον, οὗ μεῖζον οὐκέτι δυνατόν ἐστὶν παραβάλλειν· μειοῦντες μέντοι γε δυνησόμεθα παντὸς τοῦ προτεθέντος ἔλασσον παραβάλλειν. [θεωρεῖται γοῦν τοῦτο τὸ μέγεθος τῆς παραβολῆς ἐπ' ἄπειρον μὴ αὐξόμενον μειούμενον δὲ ἐπ' ἄπειρον.] Τῶν δὲ μήτε ἐπ' ἄπειρον δυναμένων αὐξεσθαι μήτε ἐπ' ἄπειρον μειουμένων [ἀλλ' ἐπὶ τινα μεγέθη ὠρισμένα, κατὰ πάντων τούτων] ἐστὶν τὸ ὑπογεγραμμένον. Ἐὰν γὰρ ᾧσι δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Α, ἄλλος δέ τις κύκλος τοῦ μὲν ἐνὸς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β, τὸν δὲ ἕτερον τέμνῃ κατὰ τὰ Γ Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ Δ πρὸς τὰς ἀφὰς τῶν κύκλων κλασθῶσιν εὐθεῖαι αἱ ΑΔ ΓΑ ΒΓ ΒΔ, ἔστιν πασῶν τῶν κλωμένων γωνιῶν πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ ΒΕΑΖ κύκλου μεγίστη μὲν ἡ ὑπὸ ΓΑΔ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ὑπὸ ΓΒΔ. [ἐπὶ τούτου οὖν τὸ μέγεθος τῆς γωνίας μειούμενον οὐκ ἐπ' ἄπειρον μειοῦται, ἀλλ' ἐστὶν μέγεθος γωνίας ἧς ἔλασσον οὐκέτι δύναται γενέσθαι. καὶ πάλιν αὐξομένη ἡ γωνία οὐκ ἐπ' ἄπειρον αὐξεται, ἀλλ' ἐστὶ τι μέγεθος γωνίας ὠρισμένον, ἧς μεῖζον οὐκέτι δύναται γενέσθαι.]

6.546

] λε'. Τούτων οὖν προειρημένων ἀποδείξομεν νῦν ὅτι τοῦ ζωδιακοῦ τὸ τάχος μειούμενον οὐδέποτε ἔλασσόν ἐστιν τοῦ τάχους τοῦ ἡλίου, ἀλλ' αἰεὶ τὴν τυχοῦσαν περιφέρειαν τοῦ ζωδιακοῦ ὃ ἡλῖος ἐν μεῖζονι χρόνῳ διέρχεται ἢ περ ἐκείνη ἀνατέλλει ἢ πάλιν δύνει. Ἔστω γὰρ ὀρίζων μὲν ὁ ΑΒ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΕΔ, ζωδιακὸς δὲ ὁ ΔΘΛ, μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ὁ ΚΝΜ, καὶ ἔστω ἡ ἀρχὴ τοῦ καρκίνου ἐπὶ τῆς δύσεως, καὶ ἀπειλήφθω τυχοῦσά τις περιφέρεια τοῦ ζωδιακοῦ ἡ ΔΘ· λέγω ὅτι ἐν μεῖζονι χρόνῳ ὃ ἡλῖος τὴν ΔΘ περιφέρειαν διέρχεται ἢ περ ἡ ΔΘ δύνει. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Θ μέγιστος κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ ἀρκτικοῦ ὁ ΘΞ, καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ θερινοῦ κύκλου διάμετρον λόγον ἔχει δυνάμει ὃν τὰ χκθ' πρὸς τὰ φκθ' (ἐπεὶ περ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ τροπικοῦ λόγον ἔχει μήκει πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τροπικοῦ ὃν τὰ ι' πρὸς τὰ κγ'), ἐλάσσων ἄρα ἡ διπλασία ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος τῆς τοῦ τροπικοῦ διαμέτρου· ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν ἡ τετραπλασία τῆς τοῦ τροπικοῦ διαμέτρου. ἡ δὲ διπλασία τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ΒΕΔ κύκλου διάμετρον μεῖζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΝ περιφέρεια πρὸς τὴν ΔΘ περιφέρειαν, ὥς ἔστι τῶν σφαιρικῶν τοῦ γ' βιβλίου θεωρήματι ιβ'. πολλῶν ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ τετραπλασία ἡ ΜΝ περιφέρεια τῆς ΔΘ περιφερείας. καὶ ἐπεὶ τὸ τοῦ κόσμου τάχος τοῦ τοῦ ἡλίου τάχους μεῖζόν ἐστιν ἡ τετραπλάσιον, καὶ ὁ μὲν κόσμος διὰ τοῦ ΚΝΜ κύκλου φέρεται ὁ δὲ ἡλῖος διὰ τοῦ ΔΘΛ, ἐν ᾧ ἄρα ὁ ἡλῖος τὴν ΘΔ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ Ν μεῖζονα τῆς ΝΜ περιφέρειαν διέρχεται (ἐπειδὴ τὸ Ν ἰσοταχῶς φέρεται τῷ κόσμῳ)· ἐν μεῖζονι ἄρα χρόνῳ ὃ ἡλῖος τὴν ΔΘ περιφέρειαν διαπορεύεται ἢ περ τὸ Ν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται.

6.548

γεγράφθω δὲ διὰ τοῦ Θ παράλληλος κύκλος ὁ ΗΘΖ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ Ν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται καὶ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Η (ὅμοιαι γὰρ εἰσιν αἱ ΝΜ ΘΗ περιφέρειαι)· ἐν μεῖζονι ἄρα χρόνῳ ὃ ἡλῖος τὴν

ΔΘ περιφέρειαν διαπορεύεται ἥπερ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται. ἐν ᾧ δὲ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ἡ ΔΘ δύνει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν ΔΘ περιφέρειαν διαπορεύεται ἥπερ ἡ ΔΘ δύνει. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἡ ΔΘ δύνει καὶ ἴση καὶ ἀπεναντίον ἡ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἀνατέλλει. καὶ ἴσας οὔσας αὐτὰς ὁ ἥλιος ἐν ἴσῳ χρόνῳ διαπορεύεται· ὥστε καὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν μετὰ τὸν αἰγόκερω περιφέρειαν δίδεισιν ἥπερ ἐκείνη ἀνατέλλει. πεποίημαι δὲ τὸν λόγον ἐπὶ τούτων τῶν ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ περιφερειῶν, ἐπειδὴ ἡ μὲν δοκεῖ ἐν πλείστῳ χρόνῳ δύνειν, ἡ δὲ ἐν πλείστῳ ἀνατέλλειν. ἐπεὶ δ' ἡ ἀπὸ τῆς συναφῆς τοῦ καρκίνου ἐν πλείστῳ χρόνῳ δύνουσα πασῶν τῶν λοιπῶν περιφερειῶν τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου δέδεικται, αὕτη δὲ δέδεικται ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ δύνουσα ἥπερ ὁ ἥλιος αὐτὴν δίδεισιν, πολὺ μᾶλλον οὖν αἱ λοιπαὶ ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ δύσσονται ἥπερ ὁ ἥλιος αὐτὰς δίδεισιν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τῆς συναφῆς τοῦ αἰγόκερω περιφέρεια ἐν πλείστῳ χρόνῳ ἀνατέλλει πασῶν τῶν λοιπῶν περιφερειῶν τοῦ ζωδιακοῦ, δέδεικται δὲ ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ ἀνατέλλουσα ἥπερ ὁ ἥλιος αὐτὴν διέρχεται, πολὺ μᾶλλον ἄρα αἱ λοιπαὶ τοῦ ζωδιακοῦ περιφέρεια ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ ἀνατελοῦσιν ἥπερ ὁ ἥλιος αὐτὰς διέρχεται, ὅπερ ~ λς'.

6.550 Ἐὰν δὲ τὸ μὲν Ζ ἦ δύσις, ἦ δὲ τὸ Η ἀνατολή, ἔσται ὁ τῆς ΖΗ περιφερείας χρόνος, ἐν ᾧ αὐτὴν ὁ ἥλιος διέρχεται, νυκτός. ὅτι δὲ ἀνίσων οὐσῶν τῶν ΖΔ ΔΗ οὐ γίνεται μέσης νυκτός ἡ τροπὴ, δῆλον [διότι ἄνισός ἐστι καὶ ὁ χρόνος τῆς ΖΔ ἢν δίδεισιν ὁ ἥλιος]. ὅτι δὲ καὶ μεγίστη ἐστὶν ἡ ΖΔΗ [περιφέρεια] νύξ πασῶν τῶν ἐν τῷ ἐνιαυτῷ οὗ ἀρχὴ ἡ θερινὴ τροπὴ, δῆλον, ἐπεὶ ἐν πλείστῳ ἡ ΖΔΗ παραλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον. ἔστω δὲ δεῖξαι καὶ τὰ ἐφ' ἐκάτερα, καὶ ἔστω πρῶτον μείζων ἡ ΖΔ τῆς ΔΗ, καὶ ἔστω ἀνατολὴ ἡ πρὸ τῆς Ζ δύσεως τὸ Θ, καὶ τῇ ΖΘ ἴση ἡ ΚΗ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος τὰς ΖΘ ΚΗ διαπορεύεται. ἀλλ' ἐν ᾧ τὴν ΖΘ διαπορεύεται, ἡ ΖΘ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον, ἐν ἐλάσσονι δὲ χρόνῳ ἡ ΖΘ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον τῆς ΚΗ· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος τὴν ΚΗ δίδεισιν ἥπερ ἡ ΚΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα ἡ ΚΗ παραλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον, ὁ ἥλιος μείζονα τῆς ΚΗ περιφερείας περιφέρειαν διελεύσεται. διεληλυθέτω τὴν ΗΛ· τοῦ ἄρα Κ σημείου ὄντος ἐπὶ δυσμᾶς ὁ ἥλιος πρὸς τῷ Λ ὦν ἐστὶν ὑπὲρ γῆν. ἴν' οὖν ἐπὶ τῆς δύσεως γένηται, προσδιελεύσεται τινα περιφέρειαν. προσδιερχέσθω τὴν ΛΜ· ἐν ᾧ ἄρα ἡ ΗΜ ἐξαλλάσσει τὸ φανερόν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ὁ ἥλιος τὴν ΗΜ διέρχεται.

6.552 καὶ ἔστι μείζων ἡ ΜΗ τῆς ΖΘ, ὥστε μείζονές εἰσιν αἱ ἡμέραι αἱ ἐν τῷ ΔΕ ἡμικυκλίῳ τῶν ἐν τῷ ΓΔ ἡμικυκλίῳ. [τοῦτο μὲν οὖν δεικνύοιτ' ἂν ὥσπερ ἐν τῷ στοιχείῳ δέικνυται, ἐπεὶ δὲ μείζων μὲν ἡ ΖΔ τῆς ΔΗ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΗΜ, ἡ ΘΔ πρὸς τὴν ΔΜ οὐκ ἔχει σύγκρισιν, ὥστε ἡ ἀπόδειξις οὐ προβήσεται ὡσαύτως, ἂν μὴ δείξωμεν τὰς συναμφοτέρας ἐν τῷ ΔΓ τμήματι ἡμέρας τε καὶ νύκτας τῶν συναμφοτέρων ἐν τῷ ΔΕ τμήματι ἡμερῶν τε καὶ νυκτῶν μείζονας.] δεῖ οὖν ἡμᾶς τῇ προγεγραμμένῃ ἀποδείξει χρῆσθαι ἵνα καὶ αἱ νύκτες συγκριθῶσιν. Ἔστω οὖν ἡ πρὸ τῆς Θ ἀνατολῆς δύσις τὸ Π, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΖΔ ἴση ἡ ΔΚ, τῇ δὲ ΠΖ ἴση ἡ ΚΞ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΠΖ τῇ ΚΞ, ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ὁ ἥλιος ἐκάστην αὐτῶν δίδεισιν. ἐν ᾧ δὲ τὴν ΖΠ, κόσμου περιστροφὴ ἐστὶν καὶ τῆς ΖΠ δύσις. ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΚΞ ἀνατέλλει ἴσος τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΠΖ δύνει· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΚΞ δίδεισιν, ὅς ἐστιν κόσμου περιστροφή, καὶ τῆς ΚΞ περιφερείας ἀνατολὴ. μείζων δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὴν ΚΗ διέρχεται ὁ ἥλιος τοῦ χρόνου τῆς ἀνατολῆς τῆς ΚΗ· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ ὁ ἥλιος τὴν ΗΞ διέρχεται μείζων ἐστὶν κόσμου περιστροφῆς καὶ τῆς ἀνατολῆς τῆς ΞΗ· ἐν ἄρα κόσμου περιστροφῇ καὶ τῆς ΗΞ ἀνατολῇ ὁ ἥλιος ἐλάσσονα τῆς ΞΗ περιφέρειαν διελεύσεται. διεληλυθέτω τὴν ΗΟ· τοῦ Ξ ἄρα ὄντος ἐπ' ἀνατολῆς ὁ ἥλιος κατὰ τὸ Ο ὦν προανατεταλκῶς ἔσται, ὥστε ἐν ᾧ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς γίνεται ἐλάσσονα τῆς ΗΟ διελεύσεται. ἔστω ἡ ΗΝ· ὥστε τὸ Ν ἀνατολικὸν ἔσται σημεῖον τὸ μετὰ τὴν Η ἀνατολὴν, ὥστε ἡ νύξ ἥς ἀνατολὴ ἐστὶν τὸ Ν σημεῖον ἐλάσσων ἐστὶ τῆς νυκτός ἥς δύσις τὸ Π.

6.554 ὁμοίως δὲ καὶ τὰ λοιπὰ δειχθήσεται. [ὁμοίως δὲ καὶ ἐάν τις ἔνστασις ἦ ἐπὶ τῆς γραφῆς ἐφ' ἧς ἡ ἀνατολὴ ἢ δύοσις ἐστὶν ἐπὶ τῆς θερινῆς τροπῆς, ὡσαύτως ἐπιλυσόμεθα]. λζ'. Ἐν τῷ περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ὁ Ἀρίσταρχος ἔξ ταῦτα ὑποτίθεται· πρῶτον τὴν σελήνην παρὰ τοῦ ἡλίου φῶς λαμβάνειν, δεύτερον τὴν γῆν σημείου τε καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν, τρίτον, ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνεται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τὸ σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς σελήνης μέγιστον κύκλον, τέταρτον, ὅταν ἡ σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνεται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστημορίῳ [ἀντὶ τοῦ ἀπέχειν αὐτὴν μοίρας πζ'. αὐτὰ γὰρ ἐλάσσους εἰσὶν τῶν ρ' μοιρῶν τεταρτημορίου μοίραις γ', αἱ εἰσὶν τῶν ρ' μέρος λ']. πέμπτον δὲ ὑποτίθεται τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο, ἔκτον δὲ τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ ιε' μέρος ζωδίου. Τούτων δὴ τῶν ὑποθέσεων ἡ μὲν πρώτη καὶ τρίτη καὶ τετάρτη σχεδὸν συμφωνοῦσιν ταῖς Ἰπάρχου καὶ Πτολεμαίου. φωτίζεται μὲν γὰρ ἡ σελήνη ὑπὸ τοῦ ἡλίου παντὶ χρόνῳ χωρὶς ἐκλείψεως, καθ' ἣν ἀφώτιστος γίνεται ἐμπέπτουσα εἰς τὴν σκιάν, ἣν ἐπιπροσθούμενος ὁ ἥλιος ὑπὸ τῆς γῆς ποιεῖ κωνικὸν ἔχουσαν τὸ σχῆμα, καὶ ὁ διορίζων δὲ τὸ γαλακτώδες, ὃ ἐστὶν ἐκ τῆς προσλάμψεως ἡλίου, καὶ τὸ τεφρῶδες, ὃ ἐστὶν ἴδιον χρῶμα τῆς σελήνης, ἀδιαφορῶν τοῦ μεγίστου κύκλου ἐν ταῖς διχοτόμοις πρὸς τὸν ἥλιον στάσεις, τεταρτημορίου ἕγγιστα ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ θεωρουμένου νεύει πρὸς τὴν ἡμετέραν ὄψιν· τοῦτο γὰρ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ἤξει καὶ διὰ τῆς ἡμετέρας ὀψεως, ὁποῖαν πότ' ἂν ἔχη θέσιν ἡ σελήνη τῆς πρώτης ἢ δευτέρας διχοτόμου φάσεως.

6.556 ἀσυμφώνους δὲ τὰς λοιπὰς ὑποθέσεις κατειλήφασιν οἱ προειρημένοι μαθηματικοὶ διὰ τὸ μήτε τὴν γῆν σημείου καὶ κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς σελήνης σφαῖραν κατ' αὐτούς, ἀλλὰ πρὸς τὴν τῶν ἀπλανῶν, μήτε τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο [διαμέτρων], μήτε τὴν διάμετρον αὐτῆς ὑποτείνειν [τοῦ κατὰ τὸ αὐτὸ μέσον αὐτῆς ἀπόστημα περιφέρειαν μεγίστου κύκλου] ιε' μέρος ζωδίου, τουτέστιν μοίρας β'. κατὰ μὲν γὰρ Ἰπάρχον ἑξακοσιάκις καὶ πεντηκοντάκις καταμετρεῖται ὁ κύκλος οὗτος ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς σελήνης, δις δὲ καὶ ἡμισιάκις ὁ τῆς σκιᾶς κατὰ τὸ ἐν ταῖς συζυγίαις μέσον ἀπόστημα, κατὰ δὲ Πτολεμαῖον ἡ διάμετρος αὐτῆς ὑποτείνειν περιφέρειαν κατὰ μὲν τὸ μέγιστον ἀπόστημα π λα' κ", κατὰ δὲ τὸ ἐλάχιστον π λε' κ", ἡ δὲ διάμετρος τοῦ κύκλου τῆς σκιᾶς κατὰ μὲν τὸ μέγιστον ἀπόστημα τῆς σελήνης ἔξηκοστὰ μ' μ", κατὰ δὲ τὸ ἐλάχιστον ἀπόστημα ἔξηκοστὰ μς'. ἐντεῦθεν αὐτοῖς οἱ λόγοι διάφοροι καὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθῶν ἡλίου καὶ σελήνης ἐπιτελογισμένοι εἰσὶν. Ὁ μὲν γὰρ Ἀρίσταρχος ἐπάγει ταῖς εἰρημέναις ὑποθέσεσιν λέγων κατὰ λέξιν οὕτως· “ἐπιλογίζεται δὴ τὸ τοῦ ἡλίου ἀπόστημα τοῦ τῆς σελήνης ἀποστήματος πρὸς τὴν γῆν μείζον μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλάσιον, ἔλασσον δὲ ἢ εἰκοσαπλάσιον, τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχει καὶ ἡ τοῦ ἡλίου διάμετρος πρὸς τὴν τῆς σελήνης διάμετρον, τοῦτο δὲ διὰ τῆς περὶ τὴν διχότομον ὑποθέσεως.

6.558 τὴν δὲ τοῦ ἡλίου διάμετρον πρὸς τὴν τῆς γῆς διάμετρον ἐν μείζονι λόγῳ ἢ ὃν ιθ' πρὸς γ', ἐν ἐλάσσονι δὲ λόγῳ ἢ ὃν τὰ μγ' πρὸς ζ', διὰ τοῦ εὐρεθέντος περὶ τὰ ἀποστήματα λόγου καὶ τῆς περὶ τὴν σκιάν ὑποθέσεως καὶ τοῦ τὴν σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ ιε' μέρος ζωδίου”. “ἐπιλογίζεται δέ” εἶπεν “τὰ ἀποστήματα” καὶ τὰ ἐξῆς ὡς αὐτὰ μέλλων ἀποδείξειν προγράψας ὅσα συντείνει πρὸς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν λήμματα. συνάγει δ' ἐκ πάντων ὅτι ὁ μὲν ἥλιος πρὸς τὴν γῆν μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ , ζωνθ' πρὸς κζ', ἐλάσσονα δὲ λόγον ἢ ὃν τὰ μ. ζ' , θφζ' πρὸς σις', ἡ δὲ διάμετρος τῆς γῆς πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σελήνης ἐν μείζονι μὲν λόγῳ ἢ ὃν τὰ ρη' πρὸς τὰ μγ', ἐν ἐλάσσονι δὲ ἢ ὃν τὰ ξ' πρὸς τὰ ιθ', ἡ δὲ γῆ πρὸς τὴν σελήνην ἐν μείζονι λόγῳ ἢ ὃν τὰ μ. ρκε' , θψιβ' πρὸς μ. ζ' , θφζ', ἐν ἐλάσσονι δὲ ἢ ὃν μ. κα' , ζ πρὸς , ζωνθ'. Πτολεμαῖος δὲ πέμπτῳ βιβλίῳ συντάξεως ἀπέδειξεν ὅτι, οἷου ἐστὶν ἐνὸς ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς γῆς, τοιούτων

τὸ μὲν τῆς σελήνης ἐν ταῖς συζυγίαις μέγιστον ἀπόστημα $\xi\delta\iota'$, τὸ δὲ τοῦ ἡλίου, $\alpha\sigma\iota$, ἢ δ' ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σελήνης $\pi\iota\zeta'\lambda\gamma''$, ἢ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλίου $\epsilon\lambda'$, ὥστε καί, οἷον ἐστὶν ἐνὸς ἢ διάμετρος τῆς σελήνης, τοιούτων ἢ μὲν τῆς γῆς ἄρα διάμετρος γ' καὶ $\beta'\epsilon''$, ἢ δὲ τοῦ ἡλίου $\iota\eta'$ καὶ $\delta'\epsilon''$, καὶ ἢ μὲν τῆς γῆς ἄρα διάμετρος τῆς σεληνιακῆς τριπλασία ἐστὶν καὶ τοῖς $\beta'\epsilon''$ μείζων, ἢ δὲ τοῦ ἡλίου τῆς μὲν τῆς σελήνης ὀκτωκαίδεκαπλασία καὶ ἔτι τοῖς $\delta'\epsilon''$ μείζων, τῆς δὲ τῆς γῆς πενταπλασία καὶ ἔτι τῷ ξ μείζων· ἀφ' ὧν καὶ οἱ τῶν στερεῶν σωμάτων λόγοι δῆλοι, ἐπεὶ καὶ ὁ τοῦ α' κύβος τοῦ αὐτοῦ ἐστὶν α' , ὁ δ' ἀπὸ τῶν γ' καὶ $\beta'\epsilon''$ τῶν αὐτῶν ἔγγιστα $\lambda\theta'\delta''$, ὁ δ' ἀπὸ τῶν $\iota\eta'$ καὶ $\delta'\epsilon''$ ὁμοίως, $\varsigma\chi\mu\delta'$ ξ ἔγγιστα, ὡς συνάγεσθαι ὅτι, οἷον ἐστὶν ἐνὸς τὸ τῆς σελήνης στερεὸν μέγεθος, τοιούτων ἐστὶ τὸ μὲν τῆς γῆς $\lambda\theta'\delta''$, τὸ δὲ τοῦ ἡλίου, $\varsigma\chi\mu\delta'$ ξ · ἑκατοντακαιεβδομηκονταπλάσιον [μείζων] ἄρα ἔγγιστα τὸ τοῦ ἡλίου τοῦ τῆς γῆς.

- 6.560 Καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοσοῦτον εἰρήσθω συγκρίσεως ἔνεκεν τῶν εἰρημένων μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων, ἐν δὲ τι λῆμμα γράψομεν ἐκ τῶν φερομένων εἰς τὸ δ' θεώρημα τοῦ βιβλίου τῆς ζητήσεως ἄξιον. Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐκβληθεῖσα ἡ $A\Gamma\Delta$, κέντρον δὲ τὸ E , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ E τῇ $A\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἡ BEZ , ἀπὸ δὲ τοῦ Δ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $\Delta\Theta$, καὶ κείσθω τῆς $Z\Theta$ ἡμίσεια ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Γ ἢ $K\Gamma$ $\Gamma\Lambda$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $K\Delta$ $\Delta\Lambda$ $Z\Delta$ · λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ τῆς ὑπὸ τῶν $Z\Delta\Theta$. προγράφεται δὲ τάδε. $\lambda\eta'$. Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ διάμετρος ἐκβληθεῖσα ἡ $A\Gamma\Delta$, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἦχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔEZ · λέγω ὅτι ἡ AZ περιφέρεια μείζων ἐστὶν τῆς ΓE περιφερείας. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ H σημείον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HZ HE · καὶ γωνία ἄρα ἡ πρὸς τῷ Z γωνία τῇ πρὸς τῷ E ἴση ἐστίν.
- 6.562 καὶ ἐπεὶ τρίγωνον τὸ $HZ\Delta$ καὶ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AHZ μείζων ἐστὶν τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς πρὸς τῷ Z , τουτέστι τῆς πρὸς τῷ E , ἀλλὰ ἡ πρὸς τῷ E μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΔHE διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι τοῦ τριγώνου, καὶ ἡ ὑπὸ AHZ ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ $E\Delta\Lambda$. καὶ εἰσὶν πρὸς τῷ κέντρῳ· μείζων ἄρα καὶ περιφέρεια ἡ AZ τῆς ΓE , ὅπερ $\sim \lambda\theta'$. Κύκλος ὁ AB , οὗ κέντρον τὸ Δ , καὶ ἐκτὸς τοῦ κύκλου σημείον τὸ Γ , καὶ διήχθω ἡ $\Gamma\Lambda\Delta K$, καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ἡ ΓZ καὶ διὰ τοῦ Δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς τῇ $K\Lambda$ διαμέτρῳ ἡ ΔA , καὶ τετμήσθω ἡ AZ περιφέρεια δίχα τῷ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Gamma B A$ $\Gamma H E$ · λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $A\Gamma E$ γωνία τῆς ὑπὸ $E\Gamma Z$. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E B$ $Z H$. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ $E B$ τῆς $Z H$, ἐλάσσων δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς ΓH , ἡ $E B$ πρὸς $B\Gamma$ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $Z H$ πρὸς ΓH . γεγονέτω οὖν ὡς ἡ $E B$ πρὸς $B\Gamma$, ἡ $H\Theta$ πρὸς $H\Gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Theta\Gamma$. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ $A B E$ $E H Z$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν (ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ $A E$ περιφερεῖα τῇ $E Z$), καὶ αἱ λοιπαὶ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ $E B \Gamma$ $Z H \Gamma$. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ $E B \Gamma$ τρίγωνον τῷ $H\Theta\Gamma$ τριγώνῳ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ $A\Gamma E$ $H\Gamma\Theta$ γωνίαι· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Gamma E$ τῆς ὑπὸ $E\Gamma Z$. μ' . Ἐστω λοιπὸν ἡ αὕτη καταγραφὴ τῇ πρότερον, καὶ τὰ αὐτὰ δεδομένα· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ γωνία τῆς ὑπὸ $Z\Delta\Theta$.
- 6.564 Τετμήσθω δίχα ἡ $Z\Theta$ περιφέρεια κατὰ τὸ M , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $M\Delta$. φανερόν δὲ ἐκ τοῦ νῦν δειχθέντος ὅτι ἡ ὑπὸ $Z\Delta M$ γωνία μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ $M\Delta\Theta$. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ $Z E B$ $\Delta\Lambda$ ἐπὶ τὰ $N \Xi$ σημεία, καὶ κείσθω τῇ $\Delta\Lambda$ εὐθείᾳ ἴση ἡ NZ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $N M$ $N\Delta$ $Z M$. καὶ ἐπεὶ κύκλος ἐστὶν ὁ $AB\Gamma$, καὶ διάμετρος ἐκβληθεῖσα ἡ $A\Gamma\Delta$, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διῆκται πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἡ $\Delta\Lambda\Xi$, περιφέρεια ἄρα ἡ $A\Xi$ περιφερείας τῆς $\Gamma\Lambda$ μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ $\Gamma\Lambda$ ἴση ἐστὶν τῇ $Z M$ περιφερείᾳ (ἡμίσεια γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν τῆς $Z\Theta$)· καὶ ἡ $A\Xi$ ἄρα περιφέρεια μείζων ἐστὶν τῆς $Z M$. κείσθω οὖν τῇ $Z M$ ἴση ἡ $A O$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A O$ $O\Delta$. ἐπεὶ οὖν ἡ $A\Theta\Gamma$ περιφέρεια τοῦ ἡμικυκλίου ἴση ἐστὶν τῇ $Z\Gamma B$ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου, ὧν ἡ $A O$ περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ $M Z$ περιφερείᾳ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $O\Gamma$ περιφέρεια ἴση ἐστὶν τῇ $M B$ περιφερείᾳ. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $O\Gamma$ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta A O$, ἐπὶ δὲ τῆς $M B$ γωνία ἡ ὑπὸ $N Z M$ · ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ $\Delta A O$ γωνία τῇ ὑπὸ $N Z M$ (καὶ ἔστιν ἑκατέρα αὐτῶν ἐλάσσων ὀρθῆς). καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $\Delta\Lambda$ τῇ $N Z$, ἡ δὲ $A O$ τῇ $Z M$, δύο δὲ αἱ $\Delta A O$ δυσὶ ταῖς $N Z M$ ἴσαι εἰσὶν.

6.566 καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΖΜ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΟΔ βάσει τῇ ΝΜ ἴση ἐστίν. καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΝΜ γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡμικυκλίου ἐστὶν ἡ ΖΑΒ, μείζων ἄρα ἡμικυκλίου ἐστὶν ἡ ΖΑΒΗ. καὶ βέβηκεν ἐπ' αὐτῆς ἡ ὑπὸ ΖΜΗ γωνία· ἡ ὑπὸ ΖΜΗ γωνία ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ὑποτείνει αὐτὴν εὐθεῖα ἡ ΖΡ, τὴν δὲ ὑπὸ ΡΖΜ ὀξεῖαν ἡ ΡΜ· ἡ ΖΡ ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ΡΜ. ἐκβεβλήσθω οὖν ἡ ΡΜ ἐπὶ τὸ Σ, καὶ κείσθω τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΡΣ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΓΔ ὅλη τῇ ΖΒΝ ἴση ἐστίν, ὧν ἡ ΑΕ ἴση ἐστὶν τῇ ΖΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΔ λοιπῇ τῇ ΕΝ ἐστὶν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΝΔ ἴση ἐστίν· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΝ τῆς ὑπὸ ΔΝΡ· καὶ πλευρὰ ἄρα ἡ ΝΡ πλευρᾶς τῆς ΡΔ μείζων ἐστίν. ἐκβεβλήσθω ἡ ΡΔ ἐπὶ τὸ Υ, καὶ κείσθω τῇ ΡΝ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΥΣ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΖΡ τῇ ΡΣ, ἡ δὲ ΡΝ τῇ ΡΥ, δύο αἱ ΖΡΝ δυσὶ ταῖς ΣΡΥ ἴσαι εἰσίν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΣΡΥ ἴση ἐστίν (κατὰ κορυφὴν γάρ)· βάσις ἄρα ἡ. ΝΖ βάσει τῇ ΣΥ ἐστὶν ἴση.

6.568 καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΡΖΝ τῇ ὑπὸ ΡΣΥ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΡΜΔ μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΡΣΥ (ἐκτὸς γάρ ἐστὶν τοῦ τριγώνου)· καὶ ἡ ὑπὸ ΡΜΔ ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΡΖΝ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΡΝ ἴση τῇ ὑπὸ ΜΡΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΝΡ μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΡΔΜ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΝΡ ἴση ἐδείχθη τῇ ὑπὸ ΑΔΟ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΟ ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΡΔΜ· πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΕ μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΡΔΜ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΑΔΕ διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΔΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΡΔΜ ἐλάττων ἢ διπλασίων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΖΔΘ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΔΛ μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΖΔΘ. Εἰς τὰ ὀπτικά Εὐκλείδου. μα'. Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὀμματος προσπίπτουσα πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μήτε πρὸς ὀρθὰς ἢ τῷ ἐπιπέδῳ μήτε ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἢ ἐλάσσων, ἄνισοι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φανοῦνται. Προγράφεται δὲ τοῦ θεωρήματος τάδε. Ἐστω δύο τρίγωνα ὀρθογώνια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Α Δ γωνίας, καὶ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ μείζονα λόγον ἔχέτω ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ δυνάμει καὶ διελόντι καὶ μήκει ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΓ· δηλὸν ἄρα ὅτι ἐλάσσων ἔσται ἡ ΗΑ τῆς ΑΒ, ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ [καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ]· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΗΓ· τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΔΖΕ γωνίας.

6.570 μβ'. Ἀπὸ μετεώρου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ ΑΒ, καὶ συμβαλλέτω αὐτῷ κατὰ τὸ Β σημεῖον, ἔστω δ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα τις ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἦχθω ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΓΔ. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΒΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. τῷ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ ΓΔ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὅπερ ~ μγ'. Ἀπὸ σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον εὐθεῖα διήχθω ἡ ΑΒ μὴ οὖσα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, καὶ κάθετος ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἦχθω, καὶ συμβαλλέτω αὐτῷ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία ἐλαχίστη ἐστὶν πασῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε τῆς ΑΒ καὶ ἐκάστης τῶν ἀπὸ τοῦ Β σημείου διαγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἔτι δὲ ὅτι αἱ ἢ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν, καὶ ὅτι δύο μόνον ἴσαι αὐτῇ ἐφ' ἐκάτερα συνίστανται.

6.572 Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τυχούσα ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΔ διὰ τὸ προδεδειγμένον. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΑ τῆς ΑΓ· ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον

ἔχει ἥπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΒΓΑ ΒΔΑ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΔ διὰ τὸ πρὸ ἐνὸς δεδειγμένον, ὥστε λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΑΒΔ. ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ πασῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία. Λέγω ὅτι καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων. Διήχθω γάρ τις ἡ ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπ’ αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΓΕΒ ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΓΕ μείζων, ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΒ· πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΕΓ τῆς ΓΔ. καὶ ἔστιν ἡ ΓΑ πρὸς ὀρθὰς ἐκατέρᾳ τῶν ΓΔ ΓΕ· μείζων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΑ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν ΑΕ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Δ Ε σημείοις γωνίαι· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΕ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΑΒΕ γωνίας.

6.574 ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστὶν. Λέγω δ’ ὅτι ἴσαι δύο μόνον ἐφ’ ἐκάτερα αὐτῆς συσταθήσονται. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΓΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τῇ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΒΖ κάθετος ἦχθω ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, ἔστιν δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΓΖΒ ἴση, καὶ ἔστιν καὶ κοινὴ τῶν τριγώνων ἡ ΓΒ πλευρά, ἴση ἄρα ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΓΖ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΓ κάθετος ἐπὶ ἐκατέραν τῶν ΔΓ ΓΖ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΒΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΑ, καὶ ἔστιν βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΑΖ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΖ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐτέρᾳ οὐ συνίσταται ἴση. Ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία ἐλαχίστη ἐστὶν, αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων, ἴσαι δὲ δύο μόνον ἐφ’ ἐκάτερα αὐτῆς συνίστανται. μδ’. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ ΕΖ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΒΓ ΕΖ τοῖς Η Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἡ μὲν ΑΗ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ ΔΘ μὴ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΗ τῆς ΗΒ· ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΗ ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆς ΗΒ, καὶ ἔστιν διάμετρος ἡ ΑΛ, τὸ ἄρα κέντρον τοῦ κύκλου ἐστὶ μεταξὺ τῶν Α Η (τοῦτο γὰρ ἐξῆς)· μεγίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς μείζων τῆς ἀπώτερον.

6.576 συνεστάτω τῇ ὑπὸ ΔΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΗΜ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΔΘ, τῆς ΗΜ. κείσθω τῇ ΔΘ ἴση ἡ ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ ΚΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΔΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΚΓ. μείζων δὲ τῆς ὑπὸ ΒΚΓ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. Ὑποκειμένων τῶν αὐτῶν ἔστω ἐλάσσων ἡ ΗΑ τῆς ΗΒ· λέγω ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΔΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΗΜ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆς ΗΒ, καὶ ἔστιν διάμετρος ἡ ΑΛ, τὸ ἄρα κέντρον τοῦ κύκλου ἐστὶν μεταξὺ τῶν Α Η· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΜ τῆς ΗΑ, τουτέστιν τῆς ΔΘ. κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΗΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΒ ΝΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΝΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΝΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζων ἐστὶν· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὅπερ ~ με’. Κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ’ αὐτῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΓΔ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ· ὅτι καὶ τῆς ΔΒ μείζων ἐστὶν.

6.578 Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΓΒ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΒ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΔ μείζων τῆς ΔΓ· πολλῶ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ. Ὅμοίως δεῖξομεν [ὅτι], καὶ ἐλάσσων ἢ ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ, ὅτι καὶ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστὶν. μς’. Κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ’ αὐτῆς εἰλήφθω σημεῖον τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΔΓ ΔΕ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΓΔ τῆς ΔΕ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ. Ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ κάθετος ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῆς ΖΕ. τετμήσθω δίχα ἡ ΓΕ τῷ Η,

καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΔΖ ἢ ΗΘ· πρὸς ὀρθὰς ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἐπὶ τῆς ΗΘ ἄρα ἐστὶν τὸ κέντρον. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα Θ κέντρον ἐστὶν τοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ. μζ'. Ἔστω πάλιν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ ΕΖ, καὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ ΒΓ ΕΖ τοῖς Η Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι, καὶ μηδετέρα τῶν ΑΗ ΔΘ ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἔστω δὲ μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΘΖ· λέγω ὅτι, ἐὰν μὲν ᾗ μείζων ἡ ΑΗ τῆς ΗΓ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ, εἰ δὲ ἐλάσσων ἡ ΗΑ τῆς ΗΓ, ἐλάσσων καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν τοῦ κύκλου.

6.580 ἔστω πρότερον μείζων ἡ ΗΑ τῆς ΗΓ· διὰ ἄρα τὸ προδειχθὲν μείζων ἐστὶν ἡ ΗΚ τῆς ΗΑ [μεγίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΗ, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον μείζων]. συνεστάτω τῇ ὑπὸ ΔΘΖ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΓΗΜ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΔΘ, τῆς ΗΜ. κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ΗΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΒ ΝΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΝΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ὀμοίως δεῖξομεν ὅτι, ἐὰν ᾗ ἐλάσσων ἡ ΑΗ τῆς ΗΓ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ, ὅπερ· ~ μη'. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι, ἐὰν ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ ὄμμα τεθῇ, ἴσαι αἱ διάμετροι φαίνονται τοῦ κύκλου. Τοῦτο δὲ δῆλον· ἅπασαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσιν. Μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἴση δὲ ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· λέγω ὅτι τοῦ ὀμματος ὄντος πρὸς τῷ Ζ σημείῳ καὶ οὕτως αἱ διάμετροι ἴσαι ὁρῶνται. Ἦχθωσαν γὰρ δύο διάμετροι αἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ ΖΒ ΖΓ ΖΔ. ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΕΑ ΕΓ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΓ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ὀρθὴ ἐστὶν· ἴσαι ἄρα φανήσονται αἱ ΑΓ ΒΔ διάμετροι. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι. Δῆλον οὖν ὅτι [ἐὰν ᾗ κύκλος καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὅπου ἂν ἐπὶ τῆς ἀχθείσης τὸ ὄμμα τεθῇ, ἴσαι ὀφθήσονται αἱ τοῦ κύκλου διάμετροι, ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνισταμένη μὴ ᾗ πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἴση δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ὑπάρχῃ, καὶ οὕτως ἀπὸ τοῦ πέρατος αὐτῆς ἴσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου ὀφθήσονται· δῆλον δὲ ὅτι ἐντεῦθεν], ἐὰν ᾗ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος, ἐπὶ δὲ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὅπουδήποτε τὸ ὄμμα μετατεθῇ κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, αἱ διάμετροι ἴσαι ὀφθήσονται.

6.582 μθ'. Ἐὰν ᾗ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἀνασταθῇ τις εὐθεῖα μήτε πρὸς ὀρθὰς οὔσα τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ μήτε ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἐπὶ δὲ τοῦ πέρατος τῆς ἀνασταθείσης τὸ ὄμμα τεθῇ, ἄνισοι αἱ τοῦ κύκλου διάμετροι ὀφθήσονται. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, οὗ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἀνεστάτω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ μήτε πρὸς ὀρθὰς οὔσα τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ μήτε ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ὄμμα πρὸς τῷ Ε, ἔστω δὲ πρότερον ἡ ΔΕ μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ΑΒ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΗΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΗΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ὀφθήσεται ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΗΓ, αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΗΓ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ὀφθήσεται, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΗΓ θεωρηθήσονται. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΕΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἀπὸ γὰρ μετεώρου σημείου τοῦ Ε ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος διῆκται ἡ ΕΖ, καὶ τυχούσα διῆκται ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦκται ἡ ΔΖ, καὶ ἐπέζευκται ἡ ΕΔ.

6.584 ἔτι δὲ καὶ τοῦτο δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΖ γωνία ἐλαχίστη ἐστὶν, αἰεὶ δὲ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων, ἴσαι δὲ δύο μόνον ἐφ' ἑκάτερα αὐτῆς συνίστανται. Διήχθω δὲ τις ἡ ΘΔΚ· ἡ ἄρα ΕΔ οὐκ ἔστιν κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΚ. ἐὰν γὰρ ᾗ κάθετος, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος, ἔσται ἄρα ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ ΕΔ ἐπὶ τὴν ΘΚ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ ΕΒ ΕΘ ΕΚ ΕΗ ΕΓ. ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστιν τὰ ΑΕΒ ΕΘΚ

ἴσας ἔχοντα τὰς AB ΘΚ βάσεις, ὧν ἑκατέρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστιν ἡ ΕΔ ἡ αὐτὴ ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων, ἐπὶ μὲν τὴν AB κάθετος οὖσα, ἐπὶ δὲ τὴν ΘΚ οὐκέτι, καὶ ἔστιν ἡ ΕΔ μείζων τῆς ΔΑ, μείζων ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΘΕΚ. ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ πασῶν τῶν ὁμοίως διαγομένων· ἡ ἄρα AB μεγίστη ὁράται. Πάλιν ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστιν τὰ ΕΗΓ ΕΘΚ ἴσας ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ κοινὴν τὴν ΕΔ, καὶ ἡ ΕΔ ἐπὶ οὐδετέραν τῶν ΘΚ ΗΓ κάθετός ἐστιν, μείζων δὲ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΕΔΘ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΗ (δεδείκναι γὰρ ἐλαχίστη ἡ ὑπὸ ΕΔΗ), καὶ ἔστιν ἡ ΕΔ μείζων τῆς ΔΘ, μείζων ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΘΕΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΕΓ γωνίας (προδεδείκναι γὰρ καὶ τοῦτο). ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία· ἡ ἄρα ΗΓ ἐλαχίστη ὁράται. Καὶ φανερόν ὅτι ἴσαι δύο μόνον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΗΓ ὀφθήσονται, ἐπειδήπερ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας δύο ἴσαι μόνον ἐφ' ἑκάτερα συνίστανται γωνίαί.

6.586 Ὅμοιως δεῖξομεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΔ τῆς ΔΑ, [ὅτι] μεγίστη μὲν ὀφθήσεται ἡ ΗΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΒ, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΑΒ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων, ἴσαι δὲ δύο μόνον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΗΓ (ἢ τῆς ΑΒ) ὀφθήσονται. ν'. Ἐπεὶ οὖν ὁ κύκλος ἔδοξεν ἐλλείψεως παρέχειν φαντασίαν τῇ ὀψει καὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ φαινόμενον εἶναι κέντρον τῆς ἐλλείψεως, ἔνστασιν οὐ τὴν τυχοῦσαν ἔχει τὸ θεώρημα· δυνατὸν γὰρ ἔστιν ἀποδείξαι τι σημεῖον ἕτερον ἐν τῷ κύκλῳ κέντρον ὁρώμενον τῆς κατὰ φαντασίαν γραμμῆς. προγραφῆσεται δὲ λημμάτιον τόδε. Ἐστω ὡς ἡ ΒΚ εὐθεῖα πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΔΘ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ ΒΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ· ὅτι ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ· γωνία. Ἦχθω τῇ ΚΖ παράλληλος διὰ τοῦ Θ ἡ ΓΘΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΖΔ ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΔ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΒΘ, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ, ἀλλὰ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΒΘ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΓΘ, ὡς ἄρα ἡ ΖΚ πρὸς ΓΘ, οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΘΗ (ἰσογώνια γὰρ τὰ ΖΔΚ ΔΗΘ τρίγωνα)· ἡ ΖΚ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΓΘ ΘΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΗ.

6.588 καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΓΘ πρὸς ΘΗ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΖ εὐθεῖα τῇ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΘΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΘ, καὶ βάσεις ἡ ΗΖ βάσει τῇ ΓΖ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστὶν ἴση· ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρα αὐτῶν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΘΖΚ διὰ τὸ τὰς ΓΗ ΖΚ παραλλήλους εἶναι. να'. Τούτου προγραφέντος ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε, ὅψις δὲ μὴ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ ἢ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ [διὰ] τοῦ κύκλου ἐπίπεδον ἡ ΖΗ μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Ε κέντρον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἡ ΗΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β Κ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰ Β Δ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΔ ΖΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ τῇ ΖΘ, καὶ ἦχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ΑΚ ΚΓ· λέγω ὅτι τῇ πρὸς τῷ Ζ ὀψει ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἔλλειψις φανήσεται κέντρον μὲν ἔχουσα τὸ Θ σημεῖον (οὐχ, ὥσπερ οἶονταί τινες, τὸ Ε), ἄξονας δὲ τοὺς ΓΑ ΒΔ συζυγεῖς, καὶ αἱ μὲν ἐπὶ τὴν ΒΔ καταγόμεναι τεταγμένως τῇ ΑΓ ἔσονταί τε καὶ φανοῦνται παράλληλοι, αἱ δ' ἐπὶ τὴν ΑΓ καταγόμεναι διαχθήσονται μὲν ἀπὸ τοῦ Κ, φανοῦνται δὲ τῇ ΒΔ παράλληλοι, καὶ ταῦτα φανεῖται περὶ τὴν ὁρωμένην ἔλλειψιν, ἃ καὶ τῇ τοῦ κώνου τομῇ συμβέβηκεν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΖ ΖΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΖΓ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΖΒ τῇ ὑπὸ ΘΖΔ ἴση· φαίνεται ἄρα ἴση ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΘΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ.

6.590 λέγω δὴ ὅτι καί, ἥτις ἂν διαχθῇ ὡς ἡ ΛΘΜ, φανεῖται διχοτομουμένη κατὰ τὸ Θ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ τε ΑΚ ΚΜ ΜΞ καὶ αἱ ΜΖ ΖΞ ΖΝ ΖΛ καὶ ἔτι ἡ ΖΚ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰς ἐφαπτομένας ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΔ, ἡ ΒΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΖΘ ἴση τῇ ὑπὸ ΘΖΔ, ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ γωνία (τοῦτο γὰρ προδεδείκναι). καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν Β Ζ Κ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶν πρὸς τὸ διὰ τῶν Α Ζ Γ ἐπίπεδον (καὶ γὰρ ἡ ΑΓ ὀρθὴ ἐστὶν τῷ διὰ τῶν Β Ζ Κ ἐπιπέδῳ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῇ ΘΖ ὀρθὴ ἦκται ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΚ), ἡ ἄρα ΖΚ τῷ διὰ τῶν Α Ζ Γ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΖΚ γωνία. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΞ, ἡ ΛΝ πρὸς ΝΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΝ γωνία τῇ

ὕπὸ ΝΖΞ· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ ΑΝ τῇ ΝΞ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΞ, ἡ ΑΝ πρὸς ΝΞ, ἀλλ' ἡ μὲν ΖΞ τῇ ΖΜ ἴση ἐστίν (ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΜΞ γίνεται παράλληλος τῇ ΑΓ), ὡς δὲ ἡ ΑΝ πρὸς ΝΞ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΜ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΖΜ· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ ΘΛ τῇ ΘΜ. ὁμοίως δὲ καί, ἥτις ἂν ἄλλη διὰ τοῦ Θ διαχθῇ, φανήσεται διχοτομουμένη κατὰ τὸ Θ· κέντρον ἄρα φαίνεται τῆς ἐλλείψεως τὸ Θ, καὶ συζυγεῖς ἄξονες οἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ αἱ μὲν τῇ ΑΓ παράλληλοι διχοτομηθήσονται ὑπὸ τῆς ΒΔ, αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ Κ διαγόμεναι δίχα τεμνόμεναι φανοῦνται ὑπὸ τῆς ΑΓ, ὥσπερ ἡ ΑΞ ἀπεδείχθη.

6.592 λέγω δὴ ὅτι φαίνονται τῇ ΒΔ παράλληλοι αἱ ἀπὸ τοῦ Κ διαγόμεναι. διήχθω γὰρ λόγου χάριν ἡ ΑΚ, καὶ κάθετος ἡ ΑΟ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ ΖΠ ΖΡ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΞ, τουτέστιν ὡς ἡ ΡΛ πρὸς τὴν ΞΜ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΞΖ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΖΡ, ἡ δὲ ΞΖ τῇ ΖΜ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΡ τῇ ὑπὸ ΞΖΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΟ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΞΖΠ· ἡ ἄρα ΟΛ ἴση φαίνεται τῇ ΠΞ, ὥστε παράλληλοι φανοῦνται αἱ ΑΞ ΒΔ [ἐπειδὴ αἱ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι ἴσαι φαίνονται]. νβ'. Τούτου δεδειγμένου παραδοξότερόν τι πρόβλημα δυνατόν ἀποδείξαι προτείνοντας οὕτως. Θέσει ὄντος κύκλου καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ σημείου δοθέντος ἐντὸς τῆς περιφερείας τόπον εὑρεῖν τῇ ὄψει, ἀφ' οὗ τὸν κύκλον ἔλλειψιν ὄψεται κέντρον ἔχουσαν τὸ δοθὲν ἐντὸς τῆς περιφερείας σημεῖον. Ἔστω γὰρ ὁ μὲν δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ περὶ κέντρον τὸ Ε, τὸ δὲ δοθὲν ἐντὸς αὐτοῦ σημεῖον τὸ Ζ, καὶ δέον ἔστω τόπον εὑρεῖν, ἀφ' οὗ ὁ κύκλος ἔλλειψις ὀφθήσεται κέντρον ἔχουσα τὸ Ζ σημεῖον.

6.594 ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ ΖΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα, καὶ ὀρθὴ αὐτῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἦχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τῶν Α Γ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἦχθωσαν αἱ ΑΘ ΘΓ, καὶ ἐπὶ τῆς ΖΘ ἡμικύκλιον γεγράφθω ὀρθὸν πρὸς τὸ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου ἐπίπεδον τὸ ΖΗΘ· λέγω δὴ ὅτι, ὁποῖον ἂν ληφθῇ σημεῖον ἐφ' ὅλης τῆς ΖΗΘ περιφερείας, πρὸς αὐτῷ τεθεῖσα ἡ ὄψις ἔλλειψιν ὄψεται τὸν κύκλον κέντρον ἔχουσαν τὸ Ζ. Εἰλήφθω γὰρ τὸ Η σημεῖον καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΒ ΗΖ ΗΔ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰς ἐφαπτομένας ἐστὶν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΘ γωνία, ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΒΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΔ· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ ΒΖ τῇ ΖΔ. φανερόν δὴ ὅτι καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΓ ἴση φαίνεται. καὶ τοῖς προγεγραμμένοις ὁμοίως δειχθήσεται τῆς φαινομένης ἐλλείψεως κέντρον τὸ Ζ σημεῖον καὶ συζυγεῖς ἄξονες οἱ ΑΓ ΒΔ. Εἰς τὰ φαινόμενα Εὐκλείδου. νγ'. Ἐπὶ τοῦ β' θεωρήματος τῶν Εὐκλείδου φαινομένων παρεῖται καὶ διὰ τῆς ἀποδείξεως, ἐὰν ὁ πόλος τοῦ ὀρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν ᾗ ἢ ἐπὶ τινος αὐτῶν, ποσάκις ὁ ζωδιακὸς πρὸς ὀρθὰς ἔσται πρὸς τὸν ὀρίζοντα ἐν μιᾷ περιφορᾷ. διὸ ἀποδείξομεν ἡμεῖς ὅτι, ἐὰν μὲν ὁ πόλος τοῦ ὀρίζοντος ἐπὶ τινος τῶν τροπικῶν ᾗ, ἅπαξ ὁ ζωδιακὸς ἐστὶν ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα ἐν μιᾷ περιφορᾷ, ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν τροπικῶν, δίς.

6.596 Ἔστω γὰρ ὀρίζων μὲν ὁ ΑΒΘ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΓΗ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΘ, μεσημβρινὸς δὲ ὁ ΑΔΕ, ζωδιακὸς δὲ ὁ ΒΖΗ, ὁ δὲ τοῦ ΑΒΘ ὀρίζοντος πόλος ἔστω ἐπὶ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁ ΒΖΗ ἅπαξ ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΘ ὀρίζοντα. Ἐπεὶ γὰρ ἐν μιᾷ περιφορᾷ τὸ Η τὴν ΗΓ περιφέρειαν διέρχεται καὶ τὴν συνεχῆ αὐτῆς τὴν ὑπὸ γῆν καὶ ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ἐν δὲ τῇ εἰρημένῃ διεξόδῳ τὸ Η ἅπαξ ἐπὶ τὸν Δ πόλον παραγίνεται καὶ ὁ ζωδιακὸς θέσιν λαμβάνει τὴν ἐπὶ τοῦ ΚΔΛ, καὶ ἔσται ἅπαξ ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα· διὰ γὰρ τῶν πόλων ἐστὶν αὐτοῦ. Ὅμοίως δὲ καί, ἐὰν ὁ πόλος τοῦ ὀρίζοντος ἐπὶ τοῦ χειμερινοῦ κύκλου ᾗ, ὡς ὁ Ε, ἅπαξ ἔσται ὁ ζωδιακὸς ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα. [φανερόν γὰρ ὅτι οἱ δύο πόλοι τοῦ ὀρίζοντος οὐκ εἰσὶν ἐν τῷ τροπικῷ, ἥτοι τῷ θερινῷ ἢ τῷ χειμερινῷ· οὐ γὰρ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας δέχεται ἐλάσσων τις κύκλος τοῦ μεγίστου· ὥστε ἐκάτερος τῶν τροπικῶν μὴ ὦν διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τοὺς β' πόλους τοῦ ὀρίζοντος οὐ δέχεται· ὥστε τὸ Η ὑπόγειον γινόμενον οὐχ ἵξει διὰ τοῦ ἐτέρου πόλου τοῦ ὀρίζοντος, ἀλλ' ἐκάτερος τῶν τροπικῶν ἓνα δέχεται πόλον. ἐπεὶ γὰρ τὸ Η τῷ Β ἐστὶν κατὰ διάμετρον καὶ θέσιν ἔχει τὸ Η κατὰ τὸ Δ τὸν πόλον, καὶ τὸ Β ἄρα ὑπὸ γῆν

τόπον ἔξει ἐν τῷ χειμερινῷ κατὰ τὸ διάμετρον τοῦ Δ τὸν ἕτερον πόλον τοῦ ὀρίζοντος· ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστιν τὸ Η τοῦ Β· ὥστε οὐδὲ ἐν τῷ ἐτέρῳ τῶν τροπικῶν εἰσιν οἱ δύο πόλοι τοῦ ὀρίζοντος, ἀλλ' ἑκάτερος ἐν ἑκατέρῳ τῶν τροπικῶν.] νδ'.

6.598 Ἦστω δὴ ὁ πόλος μεταξὺ τῶν τροπικῶν, ὡς ὁ Θ· λέγω ὅτι ὁ ζωδιακὸς δις γίνεται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα ἐν μιᾷ περιφορᾷ. Προσαναγεγράφθω γὰρ ὁ ζωδιακὸς κύκλος, καὶ ἔστω ὁ ΒΜΗ, ἔστω δὲ καθ' οὗ φέρεται παραλλήλου κύκλου τὸ Θ σημεῖον ὁ ΜΛΟ. τοῦ δὴ Λ ἐπὶ τὸν Θ πόλον παραγενομένου ὁ ΗΜΒ ζωδιακὸς θέσιν λαβὼν τὴν ἐπὶ τοῦ ΝΘΞ ὀρθὸς γίνεται τὸ πρῶτον πρὸς τὸν ὀρίζοντα. πάλιν τοῦ Μ τὴν ΜΟΘ περιφέρειαν διελθόντος κατὰ τὴν συστροφὴν καὶ ἐπὶ τὸν Θ πόλον παραγενομένου ὁ ζωδιακὸς θέσιν λαβὼν τὴν ἐπὶ τοῦ ΚΘΠ ὀρθὸς τὸ δεύτερον ἔσται πρὸς τὸν ὀρίζοντα. [μόνα γὰρ τὰ Μ Λ σημεία τῶν ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου καὶ τοῦ παραλλήλου (τὰ Μ Λ κατὰ τοῦ ΜΟΛ κύκλου φέρεται), καὶ δις μόνον ποιήσει τὸν ζωδιακὸν κύκλον ὀρθὸν πρὸς τὸν ὀρίζοντα διὰ τοῦ Θ ἐλθόντα πόλου ἐν μιᾷ περιφορᾷ κόσμου· ἑκάτερον γὰρ τῶν Μ Λ ἐν μιᾷ στροφῇ ὅλον τὸν κύκλον τὸν ΜΟΛ διέρχεται· ὥστε καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς περιφερείας σημεία τοῦ κύκλου διέρχεται ἐν μιᾷ στροφῇ τὰ Μ Λ· ὥστε καὶ τὸ Θ σημεῖον διέρχεται ἐν μιᾷ στροφῇ ἑκάτερον τῶν Μ Λ.] νε'. Ἐπὶ δὲ τοῦ ιβ' θεωρήματός φησιν ὁ Εὐκλείδης “τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσιν, καὶ ἐν μεγίστοις αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ χρόνοις αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ”.

6.600 ζητεῖται δὲ διὰ τί περὶ μὲν τῆς καταδύσεως τούτων τῶν περιφερειῶν λέγει, περὶ δὲ τῆς ἀνατολῆς οὐκέτι. ἐπαναβέβηκε γὰρ ἡ ζήτησις [καὶ ἀνετράπη] εἰς τοὺς ἀνατολικοὺς διορισμούς, ἔστιν δὲ ὅλη ἡ πραγματεία τοιαύτη· εὐρεῖν οἴκησιν ἐν ἧ ἰσότητι χάριν ὁ καρκίνος τῷ λείοντι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει [πρὸς τὸ ἄνω]. Ἰππαρχος δὲ ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν ιβ' ζωδίων ἀναφορᾶς συναποδείκνυσιν δι' ἀριθμῶν ὅτι οὐχ ὥσπερ δύνουσιν αἱ ἴσαι περιφέρειαι τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου ἔχουσαι τινα πρὸς ἀλλήλας χρόνου σύγκρισιν, οὕτως καὶ αὗται ἀνατέλλουσιν. εἶναι γὰρ τινὰς οἰκῆσεις, ἐν αἷς τῶν ἴσων περιφερειῶν τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου αἰεὶ αἱ ἕγγιον τοῦ ἰσημερινοῦ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλουσιν τῶν πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν. διὰ τοῦτο οὖν καὶ αὐτὸς ἐπὶ τῶν ἴσων ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ εἴρηκεν ἐν ἴσοις χρόνοις καὶ τὰς ἀνατολὰς γίνεσθαι. τοῦτο δὲ συμφανὲς ἐκ τῶν ἐν τοῖς φαινομένοις δεικνυμένων. ὁμοίως δὲ καὶ “τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερῳ” φησιν “ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς, ἐν ἐλάττωσι δὲ αἱ ἐξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ”. περὶ δὲ δύσεως αὐτῶν οὐθὲν λέγει· ὁ γὰρ λόγος τῆς ἀποδείξεως ἐμπίπτει εἰς τοὺς ἀνατολικοὺς διορισμούς, καὶ ἔστιν ἤδη πραγματεία περὶ τούτου γεγραμμένη Μενελάῳ τῷ Ἀλεξανδρεῖ, περὶ ἧς ὕστερον ἐπισκεψόμεθα.

6.602 ἐὰν μέντοι διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων ἢ ὁ ὀρίζων, οὕτως δειχθήσεται. Ἦστω ὀρίζων διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων ὁ ΑΒΓΔΖΘ, καὶ τοῦ ζωδιακοῦ τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον τὸ ΒΞΗ, καὶ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ ΘΞΕ, καὶ διηρήσθω τὸ ΒΝΞ τεταρτημόριον εἰς ἴσα κατὰ τὰ Μ Ν, καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἑκατέρου τῶν Μ Ν μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν· ἥξουσιν δὲ καὶ διὰ τοῦ ἐτέρου πόλου. ἔστωσαν οἱ ΑΜΖ ΑΝΖ, καὶ διὰ τῶν Μ Ν παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΔΝΚ ΓΜΛ. καὶ ἐπεὶ ἕκαστον τῶν ΑΜΖ ΑΝΖ ἡμικυκλίων ἐφαρμόζει τῷ ΑΔΖ δυτικῷ ἡμικυκλίῳ (ἅμα γὰρ δύνει ἡ ΜΒ καὶ ἡ ΓΜ περιφέρεια, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΜΓ δύνει, ἐν τούτῳ τὸ Μ σημεῖον ἔσται διηλυθὸς τὴν ΜΓ περιφέρειαν), ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Μ διέρχεται τὴν ΜΓ περιφέρειαν, ἐν τούτῳ δύνει ἡ ΜΒ περιφέρεια. πάλιν δὲ τοῦ ΑΜΖ λαβόντος τὴν τοῦ ὀρίζοντος θέσιν τὰ Μ Π ἅμα ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ὀρίζοντος, καὶ τοῦ Ν σημείου γενομένου ἐπὶ τοῦ ὀρίζοντος δεδύκασιν αἱ ΠΝ ΝΜ περιφέρειαι· ἅμα ἄρα δύνει ἡ ΝΠ περιφέρεια καὶ ἡ ΝΜ.

- 6.604 ἐν ᾧ δὲ ἡ ΠΝ δύνει, τὸ Ν ἔσται τὴν ΝΠ διεληλυθός· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ν τὴν ΝΠ περιφέρειαν διέρχεται, ἐν τούτῳ ἡ ΝΜ περιφέρεια δύνει. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν ᾧ τὸ Ξ τὴν ΞΣ περιφέρειαν διέρχεται, ἐν τούτῳ ἡ ΝΞ περιφέρεια δύνει. ἐπεὶ δὲ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων γεγραμμένοι εἰσὶν μέγιστοι κύκλοι, ὁμοίας ἀπολήψονται τῶν παραλλήλων κύκλων περιφερείας τὰς μεταξὺ αὐτῶν· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΜΓ τῇ ΔΠ καὶ ΡΕ περιφερεία, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΣΡ. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΜ ΜΝ ΝΞ, καὶ διὰ τῶν πόλων μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν, μείζων ἄρα ἡ μὲν ΕΡ τῆς ΣΡ, ἡ δὲ ΡΣ τῆς ΞΞ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Ρ τὴν ΡΕ περιφέρειαν διέρχεται ἢ περὶ τὸ Σ τὴν ΣΡ, καὶ τὸ Σ τὴν ΣΡ ἢ τὸ Ξ τὴν ΞΣ. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν τὸ Ρ τὴν ΡΕ περιφέρειαν διέρχεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Μ τὴν ΜΓ, ἐν ᾧ δὲ τὸ Σ τὴν ΣΡ, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ν τὴν ΝΠ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Μ τὴν ΜΓ περιφέρειαν διέξεισιν ἢ περὶ τὸ Ν τὴν ΝΠ, τὸ δὲ Ν τὴν ΝΠ ἢ περὶ τὸ Ξ τὴν ΞΣ. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν τὸ Μ τὴν ΜΓ διέξεισιν, ἐν τούτῳ ἡ ΜΒ περιφέρεια δύνει, ἐν ᾧ δὲ τὸ Ν τὴν [ἴσην τῇ] ΝΠ περιφερεία διέξεισιν, ἐν τούτῳ ἡ ΜΝ δύνει, ἐν ᾧ δὲ τὸ Ξ τὴν ΞΣ διέξεισιν, ἐν τούτῳ ἡ ΝΞ περιφέρεια δύνει· ἐν πλείονι μὲν ἄρα χρόνῳ ἡ ΜΒ δύνει, ἐν ἐλάσσονι δὲ ἡ ΜΝ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ ἡ ΝΞ. [Ὅμοίως δὲ καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ΞΗ τεταρτημορίου δειχθήσεται. ὅτι δὲ καὶ ἐν πλείονι ἀνατέλλει ἡ μὲν ΜΒ τῆς ΜΝ, ἡ δὲ ΜΝ τῆς ΝΞ, οὕτως δειχθήσεται. τετμήσθω καὶ τὸ ΞΗ τεταρτημόριον ὁμοίως τῷ ΞΒ κατὰ τὰ Ο Ω σημεία, καὶ διὰ τοῦ Α πόλου καὶ τῶν Ο Ω σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΖΟΑ ΖΩΑ.
- 6.606 ὁμοίως δὲ δειχθήσεται μείζων ἢ ὁμοία ἡ μὲν ΘΥ τῆς ΥΤ, ἡ δὲ ΥΤ τῆς ΤΞ, καὶ τῶν παραλλήλων ἄρα τῷ μεγίστῳ αἱ περιφέρειαι· μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ ὁμοία ἡ μὲν ΧΩ τῆς ΦΟ, ἡ δὲ ΦΟ τῆς ΞΤ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Ω τὴν ΩΧ διέξεισιν ἢ περὶ τὸ Ο τὴν ΟΦ, καὶ τὸ Ο τὴν ΟΦ ἢ περὶ τὸ Ξ τὴν ΞΤ. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν τὸ Ω τὴν ΩΧ, ἐν τούτῳ ἡ ΩΗ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ τὸ Φ τὴν ἴσην τῇ ΦΟ, ἡ ΟΩ ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ τὸ Ξ τὴν ἴσην τῇ ΤΞ διέξεισιν, ἐν τούτῳ ἡ ΞΟ περιφέρεια ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ μὲν ΗΩ περιφέρεια ἀνατέλλει τῆς ΩΟ περιφερείας, ἡ δὲ ΩΟ τῆς ΟΞ ἀνατέλλει. ἀλλ' ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐκάστη τῶν ΗΩ ΩΟ ΟΞ ἐκάστη τῶν ΒΜ ΜΝ ΝΞ ἀνατέλλει (ἡ μὲν ΗΩ τῇ ΒΜ, ἡ δὲ ΩΟ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΞΟ τῇ ΝΞ· τοῦτο γὰρ καὶ ἐν τῷ στοιχείῳ δέδεικται)· ἀνατέλλει ἄρα ἐν πλείστῳ χρόνῳ ἡ ΜΒ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ ἡ ΝΞ.
- 6.608] νς'. Δέδεικται μὲν ὅτι τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου τῶν ἴσων περιφερειῶν ἡ ἔγγιον τῆς θερινῆς συναφῆς τοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει, τοῦ δὲ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου τῶν ἴσων περιφερειῶν ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἡ ἔγγιον τῆς χειμερινῆς συναφῆς τοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον. εἰ δὲ τις ἐπιζητοίη εἰ καὶ τὸ ἀνάπαλιν γίνεται ὥστε ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλειν τὰς ἐν τῷ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίῳ ἴσας περιφερείας αἰεὶ τὰς ἔγγιον τῆς ἀπώτερον τῆς θερινῆς συναφῆς τοῦ τροπικοῦ, τοῦτο δὲ, ῥητέον, οὐκ ἐν πάσῃ οἰκῇσιν συμβαίνειν [τοῦτο] δυνατόν ἐστιν· δειχθήσεται γὰρ ἐπὶ τινων ὀρίζοντων παρθένος μὲν λέοντος ὀρθοτέρα ἀναφερομένη, ἀνάπαλιν δὲ ὁ λέων παρθένου ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλων, καὶ λέων μὲν καρκίνου ὀρθότερος ἀναφερόμενος καὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλων. Ὅτι μὲν οὖν ἐν παντὶ κλίματι, ὅπου ἀνατολαὶ καὶ δύσεις εἰσὶν τοῖς ἰβ' ζωδίοις, ὀρθοτέρα ἀναφέρεται λέοντος παρθένος, δειχθήσεται οὕτως. Ἐστω ὀρίζων ὁ ΑΒΓ, θερινὸς δὲ ὁ ΔΗ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς α' πτώσεως ἐφαπτέσθω τοῦ ὀρίζοντος, ἐπὶ δὲ τῆς β' πτώσεως τεμνέτω τὸν ὀρίζοντα, πόλος δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ καὶ τῶν τοῦ ὀρίζοντος πόλων μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΘΕ· ἔσται ἄρα μεσημβρινὸς καὶ ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα [διὰ γὰρ τῶν πόλων αὐτοῦ ἐστὶν γεγραμμένος].
- 6.610 γεγράφθω δὲ καὶ διὰ τοῦ Δ ζωδιακὸς κύκλος ὁ ΒΔΓ, καὶ ἔστω ὁ ΒΓ ἡμερινὸς κύκλος [ὡς καὶ ἔστιν]. ἐπεὶ οὖν οἱ ΔΗ ΒΔΓ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῆς ἀφῆς τοῦ Δ καὶ τῶν πόλων τοῦ ἐνὸς τοῦ ΔΗ [τοῦ Θ] γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ μεσημβρινὸς ὁ ΗΘΔΕ, καὶ διὰ τῶν τοῦ ἐτέρου πόλων τοῦ ΒΔΓ ἥξει καὶ ὀρθὸς ἔσται πρὸς αὐτόν, ὥστε καὶ ὁ ζωδιακὸς ὀρθὸς ἔσται πρὸς τὸν

μεσημβρινόν· καὶ διὰ τῶν πόλων ἄρα. [ἔστιν δὲ καὶ ὁ ὀρίζων καὶ ὁ ἰσημερινὸς διὰ τῶν πόλων τοῦ μεσημβρινοῦ, ὥστε καὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῶν τριῶν κύκλων, ὀρίζοντος, ζωδιακοῦ, ἰσημερινοῦ, τὰ Β Γ σημεῖα ἔστιν κατὰ διάμετρον ὄντα, ὥστε ἰσημερινός ἐστιν ὁ ΒΓ κύκλος.] διηρήσθω ἡ ΔΓ εἰς γ' ἴσα κατὰ τὰ Ζ Μ, διὰ δὲ τῶν Ζ Μ κύκλοι παράλληλοι γεγράφθωσαν οἱ ΑΖΚ ΛΜΟ· ἔστιν ἄρα καρκίνου μὲν δωδεκατημόριον τὸ ΔΖ,λέοντος δὲ τὸ ΖΜ, παρθένου δὲ τὸ ΜΓ. ὅταν μὲν δὴ ἡ ΜΓ ἀνατέλλῃ, ὁ ζωδιακὸς ἔξει θέσιν τινὰ· ἐχέτω τὴν ΠΝΞ. ὅταν δὲ ἡ ΖΜ ἀνατέλλῃ, ὁ ζωδιακὸς θέσιν ἔξει τινὰ· ἐχέτω τὴν ΡΚΟ. διὰ δὴ τὸ ἐν τῷ β' τῶν σφαιρικῶν Θεοδοσίου κα' θεώρημα ὀρθότατός ἐστιν, τουτέστιν μετεωρότατος [ὁ ΒΔΓ] πρὸς τὸν ὀρίζοντα, ὁ ζωδιακὸς θέσιν ἔχων τὴν ΒΔΓ, αἰεὶ δ' ὁ ἔγγιον τῆς Δ συναφῆς τῆς θερινῆς τῆς ἀπώτερον ἦσσαν κέκλινται ὀρθότερος ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΝΞ τοῦ ΡΚΟ.

6.612 καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΝΞ δωδεκατημόριον ἀνατέλλει, ὃ ἐστὶν τῆς παρθένου, τοῦ ζωδιακοῦ θέσιν ἔχοντος τὴν ΠΝΞ, τὸ δὲ ΚΟ ἀνατέλλει, ὅπερ ἐστὶν τοῦλέοντος, τοῦ ζωδιακοῦ θέσιν ἔχοντος τὴν ΡΚΟ, ὀρθότερα ἄρα ἡ παρθένος ἀναφέρεταιλέοντος ἐπὶ τούτων τῶν οἰκήσεων, ἐφ' ὧν πάντα τὰ μέρη τοῦ ζωδιακοῦ ἀνατέλλει τε καὶ δύνει. καὶ φανερόν ὅτι αἱ θέσεις τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου ὀρθῶς ἔχουσιν τῷ ιβ' τοῦ β' ὅμοιαι γάρ εἰσιν αἱ περιφέρειαι αἱ ΔΠ ΖΣ ΜΝ ΓΞ, καὶ ἴσαι αἱ ΠΣ ΡΚ ΣΝ ΚΟ, ὥστε στρεφομένης τῆς σφαίρας ἀρμόζειν ἐν ἴσῳ χρόνῳ [τῷ αὐτῷ] τὰ σημεῖα ἐπὶ τὰ σημεῖα, καθ' ὃ καὶ ἐν τῷ περὶ κινουμένης σφαίρας δείκνυται, καὶ τὰς μεταξὺ περιφερείας ἴσας ἐπὶ τὰς ἴσας [καὶ μεταξὺ περιφέρειαι ὁ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου]. δεῖ δὲ τὴν ἴσην τῇ ΜΓ ἀνατέλλουσαν μεταξὺ πάλιν εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, διότι ἡ τῆς ΜΓ ἀναφορὰ ἡ αὐτὴ λαμβάνεται τῇ ΝΞ οὐ προοδεύεται δὲ τὸ θεώρημα τοῦτο οὐκέτι ἐν μείζονι ἐξάρματι, ὅταν ὁ ὀρίζων μειζόνων ἐφάπτηται ἢ ὧν ὁ ζωδιακὸς ἐφάπτεται.

6.614 νζ'. Ἐστω δὲ νῦν τοὺς ὀρίζοντας εὐρεῖν τῶν οἰκήσεων, ἐν οἷς τὰ ὀρθότερα ἀναφερόμενα τοῦ ζωδιακοῦ δωδεκατημόρια ἐν ἐλάχιστον χρόνῳ ἀνενεχθήσεται τῶν πλαγιωτέρων ἀναφερομένων. Ἐκκείσθω μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ ὀρίζων διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, καὶ ἔστωσαν πόλοι τὰ Α Γ, καὶ δι' αὐτῶν μέγιστος ὁ ΑΘΓ, τουτέστιν μεσημβρινός, καὶ ἔστω θερινὸν μὲν ἡμικύκλιον τὸ ΕΗ, χειμερινὸν δὲ τὸ ΚΖ, ζωδιακοῦ θέσις ὅτε μὲν ἡ ΕΘΖ, ὅτε δὲ ἡ ΗΘΚ, ἀνατολικῶν ὄντων μερῶν τῶν πρὸς τοῖς Η Δ Ζ, καὶ διηρήσθω τὸ ΕΘ τεταρτημόριον εἰς τὰ ζῳδία κατὰ τὰ Λ Μ· λέγω ὅτι ὀρθότερα ἡ ΜΘ τῆς ΛΜ ἀναφέρεται. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ὀρίζων ἐστὶν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας, τουτέστιν τοῦ ἰσημερινοῦ, ὀρθός ἐστιν πρὸς τὸν αὐτόν, ὥστε καὶ ὁ ἰσημερινὸς ὀρθός ἐστιν τῷ ὀρίζοντι· καὶ διὰ τῶν πόλων ἄρα τοῦ ὀρίζοντός ἐστιν ὁ ἰσημερινός. ἔστιν δὲ καὶ ὁ μεσημβρινός διὰ τῶν πόλων τοῦ ὀρίζοντος, ὥστε ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ μεσημβρινοῦ εἰσιν οἱ πόλοι τοῦ ὀρίζοντος. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἰσημερινὸς φερόμενος ἀεὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ὀρίζοντος, ὁ δὲ ζωδιακός κατὰ δύο σημεῖα μόνον [κριοῦ ἀρχὴ καὶ ζυγοῦ] διὰ τῶν κοινῶν τομῶν τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ μεσημβρινοῦ, ὥστε καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ὀρίζοντος ἐπὶ τὸν πόλον περιφέρεια τεταρτημορίου [μοιρῶν ρ'].

6.616 καὶ ἔστιν ἐπὶ τοῦ ὀρίζοντος τὰ Ε Η Κ Ζ ὄντα τῶν ἀφῶν σημεῖα τῶν τροπικῶν ἐπὶ τὸν μεσημβρινὸν τεταρτημορίου, ὥστε τὸ τεταρτημόριον τὸ ἀπὸ τῶν Ε Η Κ Ζ ἐπὶ τὸ τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ τοῦ μεσημβρινοῦ καὶ τοῦ πόλου τοῦ ὀρίζοντος κοινὸν σημεῖον τὸ Θ. καὶ διὰ τῶν Λ Μ Θ παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΛΝ ΜΞ ΒΘΔ· ἔσται δὴ ὁ ΒΘΔ ἰσημερινός, ὡς προείρηται. γεγράφθωσαν διὰ τοῦ Α πόλου καὶ ἐκάστου τῶν Λ Μ Ξ Ν μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΟ ΑΠ ΑΡ ΑΣ. καὶ ἐπειδὴ τῷ ιβ' τοῦ β' τῶν σφαιρικῶν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΕΛ ΗΝ καὶ ΛΜ ΝΞ, καὶ αἱ ΜΘ ΞΘ, διήρηνται δὲ ἴσαι, εἰς τὰ ζῳδία εἰσὶν διαιρεθεῖσαι καὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ ἔστιν τὸ Ε καρκίνου ⊥ ἡγούμενον τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ τὸ Η καρκίνου ⊥ ἐπόμενον τῷ ἡμικυκλίῳ, ὥστε τὰ μὲν Λ Μ Θ σημεῖα ἔπεται τῷ Ε, τὰ δὲ Ν Ξ Θ ἡγεῖται τοῦ Η, ὥστε εἶναι τὰ ὁμόζωνα ζῳδία καὶ εἶναι τὸ Θ σημεῖον κριοῦ ⊥ κατὰ τὸ Η καὶ ζυγοῦ ⊥ κατὰ τὸ Ε. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΟ τῆς ΟΠ,

ή δὲ ΟΠ τῆς ΠΘ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μὲν ΔΣ τῆς ΣΡ, ἡ δὲ ΣΡ τῆς ΡΘ· ἔσται ἄρα ἡ ΟΘΣ τῆς ΠΘΡ μείζων ἢ διπλῇ, τουτέστιν τῇ ὁμοιότητι ἡ ΑΝ τῆς ΜΞ. ἔστω δὲ τῆς ΜΞ διπλῇ τῇ ὁμοιότητι ἡ ΛΦ, διὰ δὲ τῶν Φ Θ μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ϚΦΘρ. ἔσται δὲ οὗτος ὀρθὸς τῷ ΑΒΓΔ ὀρίζοντι (τὸ γὰρ Θ ἐστὶν πόλος τοῦ ὀρίζοντος).

6. 618 Λέγω οὖν ὅτι, ἐὰν ὀρίζοντα ὑποστησώμεθα ἤτοι τὸν ϚΦΘρ ἢ τὸν ΗΘΚ (ὅς ἐφάπτεται τοῦ ΕΗ θερινοῦ τροπικοῦ ἐν τῇ μεταξὺ τῶν Ϛ Η πιπτούσῃ οἰκῇσει), δειχθήσεται παρθένος λέοντος ὀρθοτέρα ἀναφερομένη, ἐν πλείονι δὲ χρόνῳ παρθένου λέων ἀνατέλλων. Ἐπεὶπερ [ἐν πλείονι χρόνῳ] ὑπεστησάμην ὀρίζοντα τοιοῦτον μὴ μείζονων ἐφαπτόμενον ἥπερ εἰσὶν οἱ τροπικοὶ κύκλοι, φανερόν οὖν ὅτι διὰ τὸ προαποδεδειγμένον παρθένος λέοντος ὀρθοτέρα ἀνενεχθήσεται. ὑποκείσθω πρότερον ὁ ΗΘΚ ὀρίζων, καὶ ἔστω αὐτοῦ ἀνατολικώτερον ἡμικύκλιον τὸ ΗΘΚ, τοῦ μεσημβρινοῦ ὄντος τοῦ ΑΒΓΔ ὀρθοῦ τοῖς παραλλήλοις καὶ τῷ ΗΘΚ· ἀρκτικός ἄρα τοῦ ΗΘΚ ὀρίζοντος ὁ ΕΗ θερινὸς τροπικός. καὶ ἔσται καρκίνου μὲν δωδεκατημόριον τὸ ΕΛ, λέοντος δὲ τὸ ΛΜ, παρθένου δὲ τὸ ΜΘ· ὀρθοτέρα ἄρα ἡ ΜΘ τῆς ΛΜ ἀναφέρεται. Λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἡ ΛΜ τῆς ΜΘ. Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται μείζων ἢ διπλῇ τῇ ὁμοιότητι ἡ ΑΝ τῆς ΜΞ, καὶ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Λ τὴν ΑΝ διεξελέλυθεν, ἀνατέλλει ἡ ΛΘ (τοῦ γὰρ Λ ἀρξαμένου ἀπὸ τοῦ Ν ἀνατολῆς ὀρίζοντος διαπορεύεσθαι τὴν ΝΛ, ἡ ΛΘ ἀνενεχθήσεται· ἔστιν γὰρ τὸ Θ ἐν τῇ ἀνατολῇ τοῦ ὀρίζοντος), ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Μ τὴν ΞΜ διαπορεύεται, ἀνατέλλει ἡ ΜΘ (διὰ τὰ αὐτά), φανερόν ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἢ διπλασίῳ ἀνατέλλει ἡ ΛΘ τῆς ΜΘ, ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ χρόνος τῆς ἀνατολῆς τῆς ΛΜ ἢ τῆς ΜΘ (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ χρόνου τῆς ΛΘ ἀφαιρεθῇ ὁ χρόνος τῆς ΜΘ ἐλάσσων ἢ τὸ ἥμισυ, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασίῳ ὁ τῆς ΛΘ, λοιπὸν γίνεται ὁ χρόνος τῆς ΛΜ μείζων ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ΛΘ μείζων ὢν τοῦ χρόνου τῆς ΜΘ ἐλάσσονος ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ΛΘ).

6. 620 Πάλιν ἔστω ἕτερος ὁ ϚΦΘρ ὀρίζων, τοῦ ΑΒΓΔ μεσημβρινοῦ ὀρθοῦ ὄντος τοῖς παραλλήλοις καὶ τῷ ϚΦΘρ ὀρίζοντι (ὅτι ὁ Θ πόλος ἐστὶν τοῦ μεσημβρινοῦ, ὥστε ὀρθοὶ εἰσὶν πρὸς ἀλλήλους)· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΛΜ τῆς ΜΘ ἀναφέρεται. Ἐπεὶ γὰρ ἀφήρηται ἡ ΛΦ διπλῇ τῇ ὁμοιότητι τῆς ΜΞ, φανερόν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ τῇ ὁμοιότητι ἡ ΛΦ τῆς ΜΨ (φανερόν γὰρ ὅτι μεταξὺ ἐστὶν τὸ Ψ τῶν Μ Ξ· ὅτι μὲν γὰρ διὰ τῶν Μ Ξ οὐχ ἤξει ἡ ΘΦς, φανερόν· γίνονται γὰρ διάμετροι τῶν μεγίστων κύκλων αἱ ΘΜ ΞΘ ἐλάσσονες [γὰρ] ἡμικυκλίων ὅλων τῶν ΕΜΘΖ ΗΞΘΚ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἀλλ' οὐδ' ἔξω τῶν Μ Ξ· ἤξει γὰρ καὶ διὰ τοῦ Φ, ὡς ὑπόκειται, ὁ διὰ τῶν Θ Ψ γραφεὶς καὶ τεμεῖ πάλιν τοὺς ΕΛΖ ΗΞΚ μεγίστους κατὰ σημεῖον ἕτερον, καὶ ἔσται ἡ κοινὴ τομὴ ἐλάσσων ἡμικυκλίου ἢ ἀπὸ τοῦ Ε, ὅπερ ἀδύνατον· μεταξὺ ἄρα ἐστὶν τὸ Ψ τῶν Μ Ξ). ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν τὸ Λ τὴν ΦΛ περιφέρειαν κινεῖται ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Φ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ὀρίζοντος, ἡ ΛΘ ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ τὸ Μ τὴν ΜΨ περιφέρειαν κινεῖται ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ψ τῆς ἀνατολῆς τοῦ ὀρίζοντος, ἡ ΜΘ ἀνατέλλει· φανερόν ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἡ ΛΜ τῆς ΜΘ, ὡς προεδείχθη.

6. 622 Τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ ἐφωδεύσαμεν ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἡ ΕΛ τῆς ΛΜ, καὶ ὀρθοτέρα ἢ ΛΜ περιφέρεια, ἥτις ἐστὶν τοῦ λέοντος, ἀναφερομένη ἥπερ ἡ ΕΛ, ἥτις ἐστὶν τοῦ καρκίνου. Δέδεικται οὖν τὰ προτεθέντα, κατὰ δὲ Πτολεμαῖον ἐν ὀρθῇ σφαίρᾳ καὶ πρώτῳ κλίματι καὶ δευτέρῳ συμφώνως ὁ καρκίνος ἐν πλείονι χρόνῳ ἀναφέρεται τοῦ λέοντος, μετὰ δὲ μοίρας ις' κζ' ἐξάρματος πόλου τοῦ δευτέρου κλίματος ἕως τοῦ γ' κλίματος ἐν πλείονι ὁ λέων ἀνατέλλει τοῦ καρκίνου, ὥστε ἀσύμφωνον εἶναι. περὶ δὲ τοῦ ὀρθότερου [εἶναι] τὸ τοῦ λέοντος ἥπερ τὸ τοῦ καρκίνου ἀναφέρεσθαι δειχθήσεται πάλιν τῷ κα' τοῦ δευτέρου τῶν σφαιρικῶν [τῷ προτέρῳ λήμματι]. νη'. Ἐστω διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, πόλοι δὲ τῆς σφαίρας οἱ Α Β, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ὁ ΓΔ λοξὸς μὲν πρὸς τοὺς παραλλήλους ὀρθὸς δὲ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ, καὶ διηρήσθω τὸ ΓΧ τεταρτημόριον εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Σ Τ, καὶ διὰ τῶν Σ Τ Χ

γεγράφθωσαν κύκλοι παράλληλοι, καὶ ἔστωσαν κοινὰ τομαὶ αὐτῶν τε καὶ τοῦ ΑΒΓΔ αἱ ΔΓ ΛΚ καὶ ΗΘ ΕΖ (γίνονται δὴ καὶ διάμετροι), ἔστω δὲ παράλληλος τῇ ΚΛ ἡ ΓΝ (ὁ ἄρα περὶ τὴν ΓΝ παράλληλος κύκλος ὀρθὸς ἐστὶν πρὸς τὸν ΑΒΓΔ * * * ἡ ΓΝ· ἐφάπεται γὰρ κατὰ τὸ Γ), καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΜΝ· φημὶ δὴ ὅτι τῆς κατὰ τὴν ΠΡ εὐθείαν περιφερείας ἐν τῷ ΗΘ κύκλῳ ἡ κατὰ τὴν ΕΟ εὐθείαν περιφέρεια (ἣτις ἔχει βάσιν τὴν ἴσην τῇ ΕΟ) μείζων ἐστὶν ἢ διπλασίων τῇ ὁμοιότητι.

6. 624 Νενοήσθωσαν γὰρ αἱ κοινὰ τομαὶ πάντων τῶν κύκλων· ἔσονται δὴ αἱ ΣΞ ΠΤ ΧΜ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ ἐπὶ τὰς ΚΛ καὶ ΗΘ καὶ ΕΖ. γεγράφθωσαν δὲ διὰ τῶν Σ Τ Χ καὶ τοῦ Α μεγίστων κύκλων περιφέρειαι αἱ ΑΥ ΑΦ ΑΧ· δῆλον δὴ ὅτι δίχα τεμεῖ τὰ ἀπειλημμένα ἡμικύκλια τῶν παραλλήλων κύκλων ἡ ΑΧ. ἤχθωσαν δὲ καὶ ἀπὸ τῶν Ο Ρ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΚΛ ΗΘ ἐν τοῖς τῶν ἡμικυκλίων ἐπιπέδοις ἢ τε ΟΨ καὶ ἡ Ρ , Α· ἔσονται δὲ αὗται ἴσαι ταῖς ΣΞ ΠΤ, ὥστε ἔσονται αἱ κατὰ τὰς ΟΞ ΠΡ εὐθείας περιφέρειαι αἱ ΣΨ καὶ Τ , Α. ὅτι οὖν ἡ ΣΨ περιφέρεια τῆς Τ , Α περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ διπλῇ ὁμοιότητι [τῆς Τ , Α]· ὅτι ἄρα καὶ ἡμίσεια ἡ ςΣ περιφέρεια τῆς Τρ περιφερείας μείζων ἐστὶν ὁμοιότητι ἢ διπλασίων.

6. 626 καὶ ἔστιν ἡ μὲν ςς τῇ ΥΧ ὁμοία, ἡ δὲ Τρ τῇ ΦΧ [ἡ δὲ ΥΧ τῆς Τρ μείζων]· ὁμοιότητι ἄρα ἡ ΥΧ περιφέρεια τῆς ΦΧ μείζων ἐστὶν [ὁμοιότητι] ἢ διπλασίων. ἔστιν δέ, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΣΤ τῇ ΤΧ περιφερείᾳ, καὶ διὰ τοῦ πόλου καὶ τῶν Τ Χ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς ἀποδέδεικται. νθ'. Καὶ τὸ παραλειφθὲν δὲ εἰς τὸ ιβ' καὶ ιγ'. Τῶν ἐν τῷ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίῳ περιφερειῶν ἡ τυχοῦσα περιφέρεια ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἢ δύνει, τῶν δὲ ἐν τῷ λοιπῷ ἡμικυκλίῳ, ὃ ἐστὶν μετὰ τὸν αἰγόκερω, ἡ τυχοῦσα ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἢ ἀνατέλλει. Ἔστω γὰρ ἐν σφαίρᾳ ὀρίζων ὁ ΑΒΓ, ζωδιακοῦ δὲ τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον ἐν τῷ φανερῷ ἡμισφαίριῳ ΑΔΖ (τὸ Α ἄρα καρκίνου π ἡγούμενον τοῦ ἡμικυκλίου ἐπὶ τῇ δύσει), καὶ ἔστω θερινοῦ τροπικοῦ τὸ ὑπὲρ γῆν τμήμα τὸ ΑΗΓ, καὶ ἀφηρήσθω τις τοῦ ζωδιακοῦ περιφέρεια ἡ ΕΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει ἢ δύνει.

6. 628 Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν Δ Ε παράλληλοι κύκλοι οἱ ΒΔΛ ΝΘΕΚ· [γίνεται ἄρα μείζων ἢ ὁμοία ἡ μὲν ΔΛ τῆς ΣΕ, ἡ δὲ ΕΝ τῆς ΔΒ]· προανατέλλει ἄρα τὸ Δ ἡγούμενον τοῦ Ε ἐπομένου, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α, τοῦ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Σ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία ἡ ΔΛ τῆς ΕΣ, ὅτι καὶ ὁ χρόνος ἐστὶν μείζων [προανατέλλει, καὶ ὅτι τὸ Δ τοῦ Ε προδύνει κατὰ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ καὶ τὸ Ε δύνει κατὰ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ε· ἐλάσσων γὰρ ἐστὶν ὁ χρόνος τοῦ Δ ἢ τοῦ Ε]· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ὁμοία ἡ ΒΔ τῆς ΕΝ. γεγράφθωσαν δὲ διὰ τῶν Β Λ μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΗΓ οἱ ΘΒΜ ΚΛΗ· ἡ ἄρα ΔΕ περιφέρεια ἀνατελεῖ μὲν θέσιν ἔχουσα τὴν ΚΛ, ὅταν τὸ Κ τὴν ΚΣ περιφέρειαν διέλθῃ, δύσεται δὲ θέσιν ἔχουσα τὴν ΒΘ, ὅταν τὸ Θ τὴν ΘΝ περιφέρειαν διέλθῃ (καὶ γὰρ αἱ θέσεις εἰσὶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου τοῦ ζωδιακοῦ αἱ ΑΔΕ ΜΒΘ ΗΛΚ, μεταξὺ ὁμοίας περιφερείας ἔχουσαι τὰς τε ΑΗ ΔΛ ΕΚ καὶ τὰς ΜΑ ΒΔ ΘΕ· ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία ἡ μὲν ΔΛ τῆς ΕΣ, ἡ δὲ ΕΝ τῆς ΒΔ, ὡς καὶ ἐδείχθη). ἔτι τε ἴσαι εἰσὶν αἱ ΗΚ ΑΕ ΜΘ (ἐκατέρα γὰρ τῶν ΜΘ ΗΚ ἴση ἐστὶν τῇ ΑΕ), ὥστε καὶ ἐφαρμόζει καὶ ἅμα τὰ Κ Λ Η ἐπὶ τὰ Ε Δ Α ἥξει. ὁμοίως καὶ τὰ Ε Δ Α ἐπὶ τὰ Θ Β Μ ἥξει [ἴσαι γὰρ εἰσὶν καὶ αἱ ΚΛ ΕΔ ΘΒ, ὥστε ἐφαρμόζειν τὰς ΚΛ ΕΔ ΘΒ περιφερείας].

6. 630 λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΚΣ περιφέρεια τῆς ΝΘ περιφερείας. Ἐπεὶ γὰρ ὁμοία ἡ μὲν ΔΛ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΕΘ, ἔσται καὶ ὅλη ἡ ΑΒ ὅλη τῇ ΘΚ ὁμοία. ἡ δὲ ΑΒ τῆς ΣΝ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῆς ΝΣ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. καὶ εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου· μείζων ἄρα ἡ ΚΘ τῆς ΝΣ. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΘΣ· λοιπὴ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΚΣ [ὁ ἀνατολικὸς τῆς ΔΕ περιφερείας τοῦ δυτικοῦ χρόνου] τῆς ΘΝ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὸ ια' Εὐκλείδου φαινομένων [ἐν $\tilde{\omega}$ χρόνῳ] αἱ ἴσαι περιφέρειαι κατὰ διάμετρον οὔσαι ἐν $\tilde{\omega}$ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει ἢ ἑτέρα δύνει, καὶ ἐν $\tilde{\omega}$ χρόνῳ ἡ ἑτέρα

δύνει ἢ ἐτέρα ἀνατέλλει, τῇ ΔΕ ἄρα ἢ ἴση περιφέρεια. κατὰ διάμετρον λαμβάνεται ἐν τῷ ἐτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ἀπὸ αἰγόκερω π , καὶ δειχθήσεται ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἢ ἀνατέλλει [ὁ γὰρ χρόνος τοῦ ἐτέρου ἡμικυκλίου τῆς ἀνατολῆς μείζων ἐστὶν ἢ ὁ τῆς δύσεως]. Ζ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεως τοῦ θεωρήματος τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου ὑπὲρ γῆν τὸ ΑΕΖ, καὶ ἀφηρήσθω τις τυχοῦσα περιφέρεια ἢ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἢ ἀνατέλλει. Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτά.

6.632 ἐπεὶ οὖν τὸ Α ἀρχὴ ἐστὶν καρκίνου ἐπόμενον τῷ ἡμικυκλίῳ, καὶ τὸ Ζ ἡγούμενον αἰγόκερω ἀρχή, ἔστιν ἄρα τὸ Ζ δυτικὸν καὶ τὸ Α ἀνατολικόν· ἡ ΔΕ ἄρα ἀνατέλλει μὲν θέσιν ἔχουσα τὴν ΒΘ, ὅταν τὸ Θ τὴν ΝΘ διέλθῃ [ὥστε καὶ ἀνατέλλει τὸ Δ ἐπόμενον τῇ ΔΕ περιφερείᾳ, ὃν τρόπον πρὸς τῇ ἀνατολῇ κατὰ τὸ Β, καὶ τοῦ Ε ἡγούμενου ὄντος ὑπὲρ γῆν κατὰ τὸ Θ, ὅταν τὴν ΘΝ περιφέρειαν διέλθῃ ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς τοῦ Ν], δύνει δὲ θέσιν ἔχουσα τὴν ΚΛ, ὅταν τὸ Κ τὴν ΚΣ διέλθῃ [ὥστε καὶ ἔδυνεν τὸ Ε ἡγούμενον τῆς ΔΕ περιφερείας προδυνούσης τῆς ΚΣ περιφερείας τοῦ Δ ἐπόμενου ὄντος κατὰ τῆς δύσεως τοῦ Λ]. καὶ ἐδείχθη πρότερον ἡ ΣΚ τῆς ΝΘ μείζων, ὥστε ὁ χρόνος ὁ δυτικὸς ἐστὶν μείζων ἢ ὁ ἀνατολικὸς τῆς ΕΔ περιφερείας, ὁ τῆς ΣΚ τῆς ΘΝ. Ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἱκανὰ τοῦ συντάγματος Εὐκλείδου τῶν φαινομένων μόνον ἔνεκεν, ὅτι δὲ τὰ περὶ τὰς ἀνατολὰς καὶ δύσεις τῶν τοῦ ζωδιακοῦ δωδεκατημορίων ἀτελῇ καθέστηκεν, οἶμαι καὶ αὐτόν σε μὴ ἀγνοεῖν. ἕκαστα δὲ τούτων ἀπαραλείπτως ἔνεστί σοι καὶ ῥαδίως ἐντυχάνοντι τοῖς ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου πεπραγματευμένοις περὶ τούτων συντάγμασιν ἐπιγινώσκειν. ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Ζ.

7.634. (1t) Περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου. Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδίᾳ τίς ἐστὶν ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὐρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογούμενου διὰ τῶν ἐξῆς ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ὁμολογούμενον συνθέσει· ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἰς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ ἐπόμενα τὰ ἐκεῖ [ἐνταῦθα] προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. Διττὸν δ' ἐστὶν ἀναλύσεως γένος, τὸ μὲν ζητητικὸν τάληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν, τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προταθέντος [λέγειν], ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους τὸ ζητούμενον ὡς ὃν ὑποθέμενοι καὶ ὡς ἀληθές, εἴτα διὰ τῶν ἐξῆς ἀκολουθῶν ὡς ἀληθῶν καὶ ὡς ἔστιν καθ' ὑπόθεσιν προελθόντες ἐπὶ τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν ἀληθές ᾗ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθές ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ψεῦδαι ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον.

7.636 ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἴτα διὰ τῶν ἐξῆς ἀκολουθῶν ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπὶ τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατόν ᾗ καὶ ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατόν ἔσται καὶ τὸ προταθὲν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. [Διορισμὸς δὲ ἐστὶν προδιαστολὴ τοῦ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατόν ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.] Τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ

συνθέσεως. Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶν τοιαύτη· Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον α', Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς β', χωρίου ἀποτομῆς β', διωρισμένης τομῆς δύο, ἐπαφῶν δύο, Εὐκλείδου πορισμάτων τρία, Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν η', Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε, Εὐκλείδου τόπων τῶν πρὸς ἐπιφανείᾳ δύο, Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λγ', ὧν τὰς περιοχὰς μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν ἐξεθέμην σοι πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων καὶ τῶν διορισμῶν καὶ τῶν πτώσεων καθ' ἕκαστον βιβλίον, ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα, καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον. Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶν τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐνενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν [διαγράμματα] κγ', τὸ δὲ δ' καὶ κ' ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως.

7. 638 τὰ δὲ ἐξῆς τούτοις ιδ' ἐν εὐθείαις ἐστὶν θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἐξῆς ι' ἐπὶ τριγώνων ἐστὶν τῷ εἶδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἐξῆς τούτοις ζ' ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἶδει δεδομένων ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἐξῆς τούτοις ζ' ἐν παραλληλογράμμοις ἐστὶ καὶ παραβολαῖς εἶδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε' τὸ μὲν πρῶτον γραφόμενόν ἐστιν, τὰ δὲ δ' ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσιν δεδομένον. τὰ δὲ ἐξῆς ζ' ἕως τοῦ ο' καὶ γ' ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶν λόγοις πρὸς ἄλληλα· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς ζ' διαγράμμασιν ἕως τοῦ ο' καὶ θ' δύο μὲν ἐστὶν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἐξῆς γ' ἐπὶ δύο εὐθειῶν [ἀνάλογον οὐσῶν, τὰ δ' ἔστιν] δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν η' ἕως τοῦ ρ' ἐν κύκλοις δείκνυται τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει.

7. 640 [* ἀγομένων εὐθειῶν ἐστὶν διὰ δεδομένου σημείου τὰ γενόμενα δεδομένα.] Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ λόγου βιβλίων ὄντων β' πρότασις ἐστὶν μία ὑποδιηρημένη· διὸ καὶ μίαν πρότασιν οὕτως γράφω· διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν τῇ θέσει δοθεισῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις λόγον ἐχούσας τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. τὰς δὲ γραφὰς διαφόρους γενέσθαι καὶ πλῆθος λαβεῖν συμβέβηκεν, ὑποδιαίρεσεως γενομένης, ἔνεκα τῆς τε πρὸς ἀλλήλας θέσεως τῶν δεδομένων εὐθειῶν καὶ τῶν διαφόρων πτώσεων τοῦ δεδομένου σημείου καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις αὐτῶν τε καὶ τῶν διορισμῶν. ἔχει γὰρ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον τῶν λόγου ἀποτομῆς τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς δὲ ε', ὧν τρεῖς μὲν εἰσιν μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ ζ' τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ' τόπου, μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ζ' καὶ τοῦ ζ' τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ λόγου ἀποτομῆς κ', αὐτὰ δὲ τὰ δύο βιβλία τῶν λόγου ἀποτομῆς θεωρημάτων ἐστὶν ρπα', κατὰ δὲ Περικλέα πλειόνων ἢ τοσούτων. Τῆς δ' ἀποτομῆς τοῦ χωρίου βιβλία μὲν ἐστὶν δύο, πρόβλημα δὲ κἂν τούτοις ἔν, ὑποδιαιρούμενον δῖς· καὶ τούτων μία πρότασις ἐστὶν τὰ μὲν ἄλλα ὁμοίως ἔχουσα τῇ προτέρᾳ, μόνῳ δὲ τούτῳ διαφέρουσα τῷ δεῖν τὰς ἀποτεμνομένας δύο εὐθείας ἐν ἐκείνῃ μὲν λόγον ἐχούσας δοθέντα ποιεῖν, ἐν δὲ ταύτῃ χωρίον περιεχούσας δοθέν.

7. 642 ῥηθήσεται γὰρ οὕτως διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. καὶ αὕτη δὲ διὰ τὰς αὐτὰς αἰτίας τὸ πλῆθος ἔσχηκε τῶν γραφομένων. ἔχει δὲ τὸ μὲν α' βιβλίον χωρίου ἀποτομῆς τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμοὺς ζ', ὧν δ' μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ

ἐλάχιστοι· καὶ ἔστι μέγιστος μὲν κατὰ τὴν δευτέραν πτῶσιν τοῦ πρώτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην πτῶσιν τοῦ β' τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν β' τοῦ δ', καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ζ' τόπου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην πτῶσιν τοῦ τρίτου τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν δ' τοῦ δ' τόπου, καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ἔκτου τόπου. τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον τῶν χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις δὲ ξ', διορισμοὺς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό. θεωρήματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον μῆ', τὸ δὲ δεύτερον ος'. Ἐξῆς δὲ τούτοις ἀναδέδοται τῆς διωρισμένης τομῆς βιβλία β', ὧν ὁμοίως τοῖς πρότερον μίαν πρότασιν πάρεστιν λέγειν, διεzeugμένην δὲ ταύτην· τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον εὐθεῖαν ἐνὶ σημείῳ τεμεῖν, ὥστε τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῆς δοθεῖσι σημείοις ἦτοι τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέντα λόγον ἔχειν ἦτοι πρὸς τὸ ἀπὸ μιᾶς τετράγωνον ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ μιᾶς ἀπολαμβανομένης καὶ τῆς ἕξω δοθείσης ἢ πρὸς τὸ ὑπὸ δύο ἀπολαμβανομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἐφ' ὁπότερ' ἂν χρή τῶν δοθέντων σημείων.

7. 644

καὶ ταύτης ἄτε δις διεzeugμένης καὶ περισκελεῖς διορισμοὺς ἐχούσης διὰ πλειόνων ἢ δεῖξις γέγονεν ἐξ ἀνάγκης. [δείκνυσι δὲ ταύτην Ἀπολλώνιος μὲν πάλιν ἐπὶ ψιλῶν τῶν εὐθειῶν τριβακώτερον πειρώμενος, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν πρώτων στοιχείων Εὐκλείδου, καὶ ταύτην πάλιν εἰσαγωγικώτερον ἐπαναγράφων δείξας τε καὶ εὐφυῶς διὰ τῶν ἡμικυκλίων.] ἔχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον προβλήματα ζ', ἐπιτάγματα ιζ', διορισμοὺς ε', ὧν μεγίστους μὲν δ', ἐλάχιστον δὲ ἓνα· καὶ εἰσὶν μέγιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ γ' τοῦ δ' προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ε' καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἔκτου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα τρία, ἐπιτάγματα θ', διορισμοὺς γ'. ὧν εἰσιν ἐλάχιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τρίτου προβλήματος. Λήμματα δὲ ἔχει τὸ μὲν πρῶτον βιβλίον κζ', τὸ δὲ δεύτερον κδ'. θεωρημάτων δὲ ἐστὶν τὰ δύο βιβλία διωρισμένης τομῆς πγ'. Ἐξῆς δὲ τούτοις τῶν ἐπαφῶν ἐστὶν βιβλία δύο. προτάσεις δὲ ἐν αὐτοῖς δοκοῦσιν εἶναι πλείονες. ἀλλὰ καὶ τούτων μίαν τίθεμεν οὕτως ἔχουσιν· ἐξῆς σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων τριῶν ὁποιοῦν θέσει δοθέντων κύκλον ἀγαγεῖν δι' ἐκάστου τῶν δοθέντων σημείων (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον ἐκάστης τῶν δοθεισῶν γραμμῶν. ταύτης διὰ πλήθη τῶν ἐν ταῖς ὑποθέσεσι δεδομένων ὁμοίων ἢ ἀνομοίων κατὰ μέρος διαφόρους προτάσεις ἀναγκαῖον γίνεσθαι δέκα· ἐκ τῶν τριῶν γὰρ ἀνομοίων γενῶν τριάδες διάφοροι ἄτακτοι γίνονται ι'.

7. 646

ἦτοι γὰρ [τὰ] δεδομένα τρία σημεῖα ἢ τρεῖς εὐθεῖαι ἢ δύο σημεῖα καὶ εὐθεῖα ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ σημεῖον ἢ δύο σημεῖα καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ σημεῖον ἢ δύο εὐθεῖαι καὶ κύκλος ἢ δύο κύκλοι καὶ εὐθεῖα ἢ σημεῖον καὶ εὐθεῖα καὶ κύκλος ἢ τρεῖς κύκλοι. τούτων δύο μὲν τὰ πρῶτα δέδεικται ἐν τῷ δ' βιβλίῳ τῶν πρώτων στοιχείων· ὁ παρεῖμεν γράφειν· τὸ μὲν γὰρ τριῶν δοθέντων σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας ὄντων τὸ αὐτό ἐστὶν τῷ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι, τὸ δὲ γ' δοθεισῶν εὐθειῶν μὴ παραλλήλων οὐσῶν (ἀλλὰ τῶν τριῶν συμπίπτουσῶν) τὸ αὐτό ἐστὶν τῷ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι· τὸ γὰρ δύο παραλλήλων οὐσῶν καὶ μιᾶς ἐμπιπτούσης ὡς μέρος ὄν τῆς τοῦ β' ὑποδιαίρέσεως προγράφεται ἐν τούτοις πάντων. καὶ τὰ ἐξῆς ζ' ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τὰ δὲ λειπόμενα δύο, τὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ κύκλου, ἢ τριῶν δοθέντων κύκλων, μόνον ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ διὰ τὰς πρὸς ἀλλήλους θέσεις τῶν κύκλων τε καὶ εὐθειῶν πλείονας οὕσας καὶ πλειόνων διορισμῶν δεομένας. Ταῖς προειρημέναις ἐπαφαῖς ὁμογενὲς πληθὸς ἐστὶν προβλημάτων παραλειπόμενον ὑπὸ τῶν ἀναδιδόντων, καὶ προσανέδωκα ἐν τοῖς πρότερον τῶν εἰρημένων δύο βιβλίων· εὐσυνοπτόν τε γὰρ καὶ εἰσαγωγικὸν μᾶλλον ἢν ἐντελὲς δὲ καὶ συμπληρωτικὸν τοῦ γένους τῶν ἐπαφῶν. πάλιν μιᾷ περιλάβωμεν ἅπαντα προτάσει, ἥτις τῆς προειρημένης λείπουσα μὲν

ὑποθέσει περιττεύουσα δὲ ἐπιτάγματι οὕτως ἔχει· ἐκ σημείων καὶ εὐθειῶν καὶ κύκλων ὁποίωνοῦν δύο δοθέντων κύκλον γράψαι τῷ μεγέθει δοθέντα διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἢ τῶν δοθέντων παραγινόμενον (εἰ δοθείη) ἐφαπτόμενον δὲ ἐκάστης τῶν δεδομένων γραμμῶν.

7. 648

αὕτη περιέχει προβλημάτων ἤδη τὸ πλῆθος ἕξ· ἐκ τριῶν γὰρ διαφορῶν τινῶν δυάδες ἄτακτοι διάφοροι γίνονται τὸ πλῆθος ζ΄· ἥτοι γὰρ δύο δοθέντων σημείων ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ δύο δοθέντων κύκλων ἢ σημείου καὶ εὐθείας ἢ σημείου καὶ κύκλου ἢ εὐθείας καὶ κύκλου τὸν δεδομένον τῷ μεγέθει κύκλον ἀγαγεῖν δεῖ, ὡς εἴρηται, ταῦτα δὲ ἀναλῦσαι καὶ συνθεῖναι καὶ διορίσασθαι κατὰ πτώσιν. Ἐχει δὲ τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν προβλήματα ζ΄, τὸ δὲ δεύτερον προβλήματα δ΄. Λήμματα δὲ ἔχει τὰ δύο βιβλία κα΄, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ξ΄. Μετὰ δὲ τὰς ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις πορίσματα ἐστὶν Εὐκλείδου [πολλοῖς] ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων, [καὶ] τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. [οὐδὲν προστεθείκασιν τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μὴ τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν, ἐκάστου μὲν πλῆθος ὠρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δ΄ Εὐκλείδου μίαν ἐκάστοτε θέντος τὴν μάλιστα ὑπεμφαίνουσαν.

7. 650

ταῦτα δὲ λεπτήν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερεπῇ.] ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἶδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶν οὔτε προβλημάτων ἀλλὰ μέσον πως τούτων ἐχούσης ιδέας [ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων], παρ’ ὃ καὶ συμβέβηκε τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα τοὺς δὲ προβλήματα, ἀποβλέποντας εἰς τὸ σχῆμα μόνον τῆς προτάσεως. τὴν δὲ διαφορὰν τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ἦδεσαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων· ἔφασαν γὰρ θεώρημα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. [μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ’ ὅτι ἔστι τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο καὶ ἐλεγχόμενων ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων.

7. 652

ἔγραψαν δὲ ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως· πόρισμά ἐστὶν τὸ λεῖπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους τῶν πορισμάτων εἶδος ἐστὶν οἱ τόποι, καὶ πλεονάζουσιν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένον δὲ τῶν πορισμάτων ἡθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδεται διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν. τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων, ἃ δὲ στερεῶν, ἃ δὲ γραμμικῶν, καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητος.] συμβέβηκε δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασιν, τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουομένων, ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μὲν μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. [περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μιᾷ προτάσει ἥκιστα δυνατόν ἐν τούτοις, διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἐκάστου εἶδους τεθεικέναι· ἀλλὰ δείγματος ἔνεκα ἐκ τῆς πολυπληθείας ἔνια ὀλίγα πρὸς ἀρχὴν (δεδομένον) τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ, πάντ’ ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἶδους τῶν τόπων, ὡς ἰ’ τὸ πλῆθος.] διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας μιᾷ προτάσει ἐνδεχόμενον εὐρόντες οὕτως ἐγράψαμεν· ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου τρία τὰ ἐπὶ μιᾷ σημείᾳ [ἢ παραλλήλου ἕτερα τὰ δύο] δεδομένα ᾖ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἐνὸς ἄπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ’ ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

7. 654

τοῦτ’ ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν, ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτως λεγόμενον· ἐὰν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ

ἐπὶ μιᾷς αὐτῶν δεδομένα ἦ, καὶ τῶν ἐπὶ ἐτέρας ἕκαστον ἄπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἢ καθολικώτερον οὕτως ἂν ὅποσαι οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, πάντα δὲ τὰ ἐπὶ μιᾷς αὐτῶν σημεῖα δεδομένα ἦ, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ πλῆθος ἐχόντων τρίγωνον ἀριθμὸν ἢ πλευρὰ τούτου ἕκαστον ἔχη σημεῖον ἀπτόμενον εὐθείας θέσει δεδομένης, τῶν τριῶν μὴ πρὸς γωνίαις ὑπαρχόντων τριγώνου χωρίου, ἕκαστον λοιπὸν σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τὸν δὲ στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι· καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνα [πληθῶν πολλῶν καὶ μεγάλων] καταβεβλημένος, ὧν τὰ γένη οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων. [αἱ μὲν ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώτατα οὔσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὃν πολλαῖς ὑποθέσεσι διαφόροις συμβέβηκε διαιρεῖσθαι.] Ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων [ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ ζ' διάγραμμα τοῦτο]· ἂν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνη δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἐτέρα ἀπὸ ἐτέρας λόγον ἔχουσιν δοθέντα· ἐν δὲ τοῖς ἐξῆς· ὅτι τότε τὸ σημεῖον ἄπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἥδε θέσει δεδομένη ἐστίν· ὅτι ἥδε ἐπὶ δοθὲν νεύει· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην· ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆσδε· ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὃ μὲν τι δοθὲν ἐστίν, ὃ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τότε τὸ χωρίον ἢ τότε μετὰ τινος χωρίου δοθέντος ἐστίν, ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι [ἥδε] μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆσδε ἴσον ἐστίν τῷ ὑπὸ δοθέντος καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος ὅτι ἥδε ἀποτεμνει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας.

7. 658 Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι τότε τὸ χωρίον ἢ τότε μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρων τῶνδε καὶ συναμφοτέρων τῶνδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ συναμφοτέρου τῆσδε τε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε. Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσίν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων· τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλησίως τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε· ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος· ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος ὅτι συναμφοτέρος ἥδε καὶ πρὸς ἣν ἥδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν· ὅτι ἔστιν τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τούσδε δοθὲν περιέξουσιν τῷ εἶδει τρίγωνον· ὅτι ἔστιν τι δοθὲν σημεῖον ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόνδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφερείας· ὅτι ἥδε ἦτοι ἐν παραθέσει ἐστὶν ἢ μετὰ τινος εὐθείας ἐπὶ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν.

7. 660 Ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν πορισμάτων λήμματα λη', αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα'. Τόπων ἐπιπέδων δύο. Τῶν τόπων καθόλου οἱ μὲν εἰσιν ἐφεκτικοί, ὥς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν, οἱ δὲ διεξοδικοί, ὥς σημείου μὲν γραμμὴν, γραμμῆς δ'

ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν, οἱ δὲ ἀναστροφικοί, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν.

7.662 [τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοὶ εἰσιν, οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι καὶ οἱ στερεοί. γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσιν σημείων, οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοί μὲν εἰσιν σημείων, διεξοδικοί δὲ γραμμῶν· οἱ μὲντοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφανείας δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν καὶ καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι τε καὶ γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ ὅσοι εἰσὶν κώνων· τομαὶ παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις ἢ ὑπερβολαί· γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσοι γραμμαὶ εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι οὔτε κύκλοι οὔτε τινὲς τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητος ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶν τῷ γένει, ἀπὸ δὲ τῆς ιδιότητος τῶν ὑποθέσεων * ἐκείνοις.] Οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι εἰς τὴν τῶν ἐπιπέδων [τούτων] τόπων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἥς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν τὰ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προσκείμενα ὕστερα, τὰ δ' ἐκ τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτη· ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἥτοι ἀπὸ ἐνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἥτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἥτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον, ἄπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἄψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου, καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως.

7.664 ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων. Τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ μὲν ὑπὸ Χαρμάνδρου γ' συμφωνεῖ ταῦτα· ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἐν πέρας ἢ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης· ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης· ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἢ βάσις θέσει καὶ μεγέθει δεδομένη ἢ, ἢ κορυφὴ αὐτοῦ ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἕτερα δὲ τοιαῦτα· ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης καὶ παρὰ τινὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἡγμένης τὸ ἐν πέρας ἄπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἄψεται καὶ τὸ ἕτερον εὐθείας θέσει δεδομένης· ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένης δύο εὐθείας παραλλήλους ἢ συμπίπτουσας καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἥτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον ἢ ὦν ἢ μία μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἢ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα δεδομένη ἐστίν, ἄψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας· καὶ ἐὰν ὦσιν ὅποσαι οὖν εὐθεῖαι θέσει δεδομένης, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπὸ τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἢ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἄλλης κατηγμένης καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένης παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις ἥτοι ἀποτεμνοῦσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθείσι σημείοις εὐθείας λόγον ἐχούσας ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἶδη ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

7.666 Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε· ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ἢ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας· ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἥτοι εὐθείας ἢ περιφερείας· ἐὰν ἢ θέσει δεδομένη εὐθεῖα καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ἢ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἥς ἀπολαμβάνει ἥτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων

σημείων εὐθεΐαι κλασθῶσιν, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἐτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεΐαι πρὸς ἐνὶ σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεΐαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ θέσει ἀχθεῖσα εὐθεΐα ἀπολαμβάνη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ, καὶ ἡ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· ἐὰν ἐν κύκλῳ θέσει δεδομένῳ δοθέν τι σημεῖον ἢ καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεΐα καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἡ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης ἦτοι μόνον ἢ τοῦτό τε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας· καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν τὸ σημεῖον ἄπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ δεδομένου σημείῳ ἄψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς.

7. 670 Ἐχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἦτοι διαγράμματα ρμζ', λήμματα δὲ η'. Νεύσεων δύο. Νεύειν λέγεται γραμμὴ ἐπὶ σημεῖον, ἐὰν ἐπεκβαλλομένη ἐπ' αὐτὸ παραγίνηται. [καθόλου δὲ τὸ αὐτὸ ἐστίν, ἐὰν τε ἐπὶ δοθέν νεύειν σημεῖον λέγεται, ἐὰν τέ ἐστίν τι ἐπ' αὐτῆς δοθέν, ἐὰν τε διὰ δοθέντος ἐστὶν σημεῖον. ἐπέγραψαν δὲ ταῦτα νεύσεις ἀπὸ ἐνὸς τῶν εἰρημένων.] προβλήματος δὲ ὄντος καθολικοῦ τούτου δύο δοθεισῶν γραμμῶν θέσει, θεῖναι μεταξὺ τούτων εὐθεΐαν τῷ μεγέθει δεδομένην νεύουσιν ἐπὶ δοθέν σημεῖον, ἐπὶ ταύτης τῶν ἐπὶ μέρους διάφορα τὰ ὑποκείμενα ἐχόντων ἃ μὲν [ἦν] ἐπίπεδα, ἃ δὲ στερεά, ἃ δὲ γραμμικά, τῶν ἐπιπέδων ἀποκληρώσαντες τὰ πρὸς πολλὰ χρησιμώτερα ἔδειξαν τὰ προβλήματα ταῦτα· θέσει δεδομένων ἡμικυκλίου τε καὶ εὐθείας πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, ἢ δύο ἡμικυκλίων ἐπ' εὐθείας ἐχόντων τὰς βάσεις, θεῖναι δοθεῖσαν τῷ μεγέθει εὐθεΐαν μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν, νεύουσιν ἐπὶ γωνίαν ἡμικυκλίου· καὶ ῥόμβου δοθέντος καὶ ἐπεκβεβλημένης μιᾶς πλευρᾶς, ἀρμόσαι ὑπὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν δεδομένην τῷ μεγέθει εὐθεΐαν νεύουσιν ἐπὶ τὴν ἀντικρὺς γωνίαν· καὶ θέσει δοθέντος κύκλου, ἐναρμόσαι εὐθεΐαν μεγέθει δεδομένην νεύουσιν ἐπὶ δοθέν. τούτων δὲ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ τεύχει δέδεικται τὸ ἐπὶ τοῦ ἐνὸς ἡμικυκλίου καὶ εὐθείας, ἔχον πτώσεις δ', καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἔχον πτώσεις δύο, καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου πτώσεις ἔχον β', ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τεύχει τὸ ἐπὶ τῶν δύο ἡμικυκλίων, τῆς ὑποθέσεως πτώσεις ἐχούσης ι' ἐν δὲ ταύταις ὑποδιαίρέσεις πλείονες διοριστικαὶ ἔνεκα τοῦ δεδομένου μεγέθους τῆς εὐθείας.

7. 672 [Τὰ μὲν οὖν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπίπεδα ταῦτ' ἔστιν ἃ καὶ πρότερα δέικνυται, χωρὶς τῶν Ἑρατοσθένους μεσοτήτων· ὕστατα γὰρ ἐκεῖνα. τοῖς δὲ ἐπιπέδοις ἐφεξῆς τὴν τῶν στερεῶν ἢ τάξιν ἀπαιτεῖ θεωρίαν· στερεὰ δὲ καλοῦσι προβλήματα οὐχ ὅσα ἐν στερεοῖς σχήμασι προτείνεται, ἀλλ' ὅσα διὰ τῶν ἐπιπέδων μὴ δυνάμενα δειχθῆναι διὰ τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν δέικνυται, ὥστε ἀναγκαῖον πρότερον περὶ τούτων γράφειν. ἦν μὲν οὖν ἀναδεδομένα κωνικῶν στοιχείων πρότερον Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου ε' τεύχη, ὡς ἂν ἤδη δυνατοῖς οὔσι τοῖς ταῦτα παραλαμβάνουσιν ἐπιτομώτερον γεγραμμένα.] Ἐχει δὲ τὰ τῶν νεύσεων βιβλία δύο θεωρήματα μὲν ἦτοι διαγράμματα ρκε', λήμματα δὲ λη'. Κωνικῶν η'. Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ' κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀναπληρώσας καὶ προσθεῖς ἕτερα δ' παρέδωκεν η' κωνικῶν τεύχη. Ἀρισταῖος δέ, ὃς γέγραφε τὰ μέχρι τοῦ νῦν ἀναδιδόμενα στερεῶν τόπων τεύχη ε' συνεχῇ τοῖς κωνικοῖς, ἐκάλει [καὶ οἱ πρὸ Ἀπολλωνίου] τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν τὴν μὲν ὀξυγωνίου, τὴν δὲ ὀρθογωνίου, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου κώνου τομήν. ἐπεὶ δ' ἐν ἐκάστῳ τῶν τριῶν τούτων κώνων διαφόρως τεμνομένων αἱ γ' γίνονται γραμμαί, διαπορήσας, ὡς φαίνεται, Ἀπολλώνιος τί δήποτε ἀποκληρώσαντες οἱ πρὸ αὐτοῦ ἦν μὲν ἐκάλουν ὀξυγωνίου κώνου τομήν δυναμένην καὶ ὀρθογωνίου καὶ ἀμβλυγωνίου εἶναι, ἦν δὲ ὀρθογωνίου εἶναι δυναμένην ὀξυγωνίου τε καὶ

ἀμβλυγωνίου, ἣν δὲ ἀμβλυγωνίου δυναμένην εἶναι ὀξυγωνίου τε καὶ ὀρθογωνίου, μεταθεῖς τὰ ὀνόματα καλεῖ τὴν μὲν ὀξυγωνίου καλουμένην ἔλλειψιν, τὴν δὲ ὀρθογωνίου παραβολήν, τὴν δὲ ἀμβλυγωνίου ὑπερβολήν, ἐκάστην ἀπὸ τινος ἰδίου συμβεβηκότος.

7. 674

χωρίον γάρ τι παρά τινα γραμμὴν παραβαλλόμενον ἐν μὲν τῇ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐλλεῖπον γίνεται τετραγώνω, ἐν δὲ τῇ ἀμβλυγωνίου ὑπερβάλλον τετραγώνω, ἐν δὲ τῇ ὀρθογωνίου οὔτε ἐλλεῖπον οὔθ' ὑπερβάλλον. [τοῦτο δ' ἔπαθεν μὴ προσενοήσας ὅτι κατὰ τινα ἰδίαν πτῶσιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸν κώνον (καὶ γεννῶντος τρεῖς γραμμὰς) ἐν ἐκάστῳ τῶν κώνων ἄλλη καὶ ἄλλη τῶν γραμμῶν γίνεται, ἣν ὠνόμασεν ἀπὸ τῆς ιδιότητος τοῦ κώνου. ἐὰν γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἀχθῇ παράλληλον μιᾷ τοῦ κώνου πλευρᾷ, γίνεται μία μόνη τῶν τριῶν γραμμῶν, αἰεὶ ἡ αὕτη, ἣν ὠνόμασεν ὁ Ἀρισταῖος ἐκείνου τοῦ τμηθέντος κώνου τομῇν.] Ὁ δ' οὖν Ἀπολλώνιος οἷα περιέχει τὰ ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα κωνικῶν ἢ βιβλία λέγει κεφαλαιώδη θεῖς προδήλωσιν ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ πρώτου ταύτην· “περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλεῖον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξητασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν [καὶ τῶν ἀντικειμένων] συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρεῖαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους ἢ τίνας ἄξονας καλῶ εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου.

7. 676

τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παντοῖα χρήσιμα [τὰ] πρὸς τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλείονα καὶ καλὰ καὶ ξένα κατανοήσαντες εὖρομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ δ' γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριόν τι αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατόν ἄνευ τῶν προειρημένων τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ δ', ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμπίπτουσιν, καὶ ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ κύκλου περιφερείᾳ [κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλει] καὶ ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσιν. τὰ δὲ λοιπὰ δ' περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλεῖον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν, τὸ δὲ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ κωνικῶν προβλημάτων διωρισμένων”. Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα. ὃν δὲ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς μὴ τετελειώσθαι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἠδυνήθη οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς [ἀλλ' οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσιν] διὰ γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην, ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. [ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον ἄξιον ὄντα ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς, καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν, ἐπιεικέστατος ὧν καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενῆς τοὺς καὶ κατὰ ποσὸν συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων, καὶ ἀκριβὴς μὲν οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος, ὅσον δυνατόν ἦν δεῖξαι τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν ἔγραψεν, οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον· τότε γὰρ ἦν ἀναγκαῖον ἐξελέγχειν, νῦν δ' οὐδαμῶς, ἐπεῖτοι καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς κωνικοῖς ἀτελῆ τὰ πλεῖστα καταλιπὼν οὐκ εὐθύνεται.

7. 678

προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου καὶ συσχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὅθεν ἔσχε καὶ τὴν τοιαύτην ἔξιν οὐκ ἀμαθῇ. οὗτος δὲ ὁ ἐπὶ γ' καὶ δ' γραμμὰς τόπος, ἐφ' ᾧ μέγα φρονεῖ προσθεῖς χάριν ὀφείλειν εἰδέναι τῷ πρώτῳ γράψαντι, τοιοῦτός ἐστιν.] ἐὰν γάρ, θέσει δεδομένων τριῶν εὐθειῶν, ἀπὸ τινος [τοῦ αὐτοῦ] σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὰς τρεῖς ἐν δεδομέναις γωνίαις εὐθεῖαι, καὶ λόγος ἦ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων περιεχομένου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένου στερεοῦ τόπου, τουτέστιν μιᾷς τῶν τριῶν κωνικῶν γραμμῶν. καὶ ἐὰν

ἐπὶ δ' εὐθείας θέσει δεδομένας καταχθῶσιν εὐθείαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ἢ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ δύο κατηγμένων πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων, ὁμοίως τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης κώνου τομῆς. [ἐὰν μὲν γὰρ ἐπὶ δύο μόνας, ἐπίπεδος ὁ τόπος δέδεικται·] ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τεσσάρων, ἄψεται τὸ σημεῖον τόπων οὐκέτι γνωρίμων, ἀλλὰ γραμμῶν μόνον λεγομένων [ποδαπῶν δὲ ἢ τινα ἔχουσιν ἴδια οὐκέτι], ὧν μίαν οὐδέ τινα συμφανεστάτην εἶναι δοκοῦσαν συντεθείκασιν ἀναδείξαντες χρησίμην οὔσαν.

7.680

αἱ δὲ προτάσεις αὐτῶν εἰσιν· ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας πέντε καταχθῶσιν εὐθείαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ λόγος ἢ δεδομένος τοῦ ὑπὸ τριῶν κατηγμένων περιεχομένου στερεοῦ παραλληλεπίπεδου ὀρθογωνίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν δύο κατηγμένων καὶ δοθείσης τινὸς περιεχόμενον παραλληλεπίπεδον ὀρθογώνιον, ἄψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης γραμμῆς. ἐὰν τε ἐπὶ ζ', καὶ λόγος ἢ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν τριῶν περιεχομένου προειρημένου στερεοῦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν τριῶν, πάλιν τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης. ἐὰν δὲ ἐπὶ πλείονας τῶν ζ', οὐκέτι μὲν ἔχουσι λέγειν, ἐὰν λόγος ἢ δοθεὶς τοῦ ὑπὸ τῶν δ' περιεχομένου τινὸς πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λοιπῶν, ἐπεὶ οὐκ ἔστι τι περιεχόμενον ὑπὸ πλείονων ἢ τριῶν διαστάσεων. συγκεχωρήκασιν δὲ ἑαυτοῖς οἱ βραχὺ πρὸ ἡμῶν ἐρμηνεύειν τὰ τοιαῦτα, μηδὲ ἐν μηδαμῶς διάληπτον σημαίνοντες, τὸ ὑπὸ τῶνδε περιεχόμενον λέγοντες ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆσδε τετράγωνον ἢ ἐπὶ τὸ ὑπὸ τῶνδε. παρῆν δὲ διὰ τῶν συνημμένων λόγων ταῦτα καὶ λέγειν καὶ δεικνύναι καθόλου καὶ ἐπὶ τῶν προειρημένων προτάσεων καὶ ἐπὶ τούτων τὸν τρόπον τοῦτον· ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας εὐθείας καταχθῶσιν εὐθείαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, καὶ δεδομένος ἢ λόγος ὁ συνημμένος ἐξ οὗ ἔχει μία κατηγμένη πρὸς μίαν καὶ ἑτέρα πρὸς ἑτέραν, καὶ ἄλλη πρὸς ἄλλην, καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς δοθεῖσαν, ἐὰν ὦσιν ζ', ἐὰν δὲ η', καὶ ἡ λοιπὴ πρὸς λοιπὴν, τὸ σημεῖον ἄψεται θέσει δεδομένης γραμμῆς· καὶ ὁμοίως ὅσαι ἂν ὦσιν περισσὰ ἢ ἄρτια τὸ πλῆθος. τούτων, ὡς ἔφην, ἐπομένων τῷ ἐπὶ τέσσαρας τόπῳ οὐδὲ ἐν συντεθείκασιν ὥστε τὴν γραμμὴν εἰδέναι. [ταῦθ' οἱ βλέποντες ἤκιστα ἐπαίρονται, καθάπερ οἱ πάλοι καὶ τῶν τὰ κρείττονα γραψάντων ἕκαστοι· ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς ἀρχαῖς ἔτι τῶν μαθημάτων καὶ τῆς ὑπὸ φύσεως προκειμένης ζητημάτων ὕλης κινουμένους ὁρῶν ἅπαντας, αἰδούμενος ἐγὼ καὶ δείξας γε πολλῶ κρείσσονα καὶ πολλὴν προφερόμενα ὠφέλειαν .

7.682

.. ἵνα δὲ μὴ κεναῖς χερσὶ τοῦτο φθεγξάμενος ὧδε χωρισθῶ τοῦ λόγου, ταῦτα δώσω τοῖς ἀναγνοῦσιν· ὁ μὲν τῶν τελείων ἀμφοιστικῶν λόγος συνῆπται ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν ἐπὶ τοὺς ἄξονας ὁμοίως κατηγμένων εὐθειῶν ἀπὸ τῶν ἐν αὐτοῖς κεντροβαρικῶν σημείων, ὁ δὲ τῶν ἀτελῶν ἔκ τε τῶν ἀμφοισμάτων καὶ τῶν περιφερειῶν, ὅσας ἐποίησεν τὰ ἐν τούτοις κεντροβαρικὰ σημεῖα, ὁ δὲ τούτων τῶν περιφερειῶν λόγος συνῆπται δῆλον ὡς ἔκ τε τῶν κατηγμένων καὶ ὧν περιέχουσιν αἱ τούτων ἄκραι, εἰ καὶ εἶεν πρὸς τοῖς ἄξοσιν ἀμφοιστικῶν, γωνιῶν. περιέχουσι δὲ αὗται αἱ προτάσεις, σχεδὸν οὔσαι μία, πλεῖστα ὅσα καὶ παντοῖα θεωρήματα γραμμῶν τε καὶ ἐπιφανειῶν καὶ στερεῶν, πάνθ' ἅμα καὶ μιᾷ δείξει καὶ τὰ μήπω δεδειγμένα καὶ τὰ ἤδη ὡς καὶ τὰ ἐν τῷ δωδεκάτῳ τῶνδε τῶν στοιχείων.] "Ἐχει δὲ τὰ η' βιβλία τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν θεωρήματα ἥτοι διαγράμματα υπζ', λήμματα δὲ [ἥτοι λαμβανόμενά ἐστιν εἰς αὐτὰ] ο'. α'.

7.684

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν. Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ Γ πρὸς Δ, καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν AB εἰς τὸν τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγον. ἔκλινα πρὸς τὴν AB εὐθεῖαν ἐν γωνίᾳ τυχούσῃ εὐθεῖαν τὴν AE, καὶ τῇ μὲν Γ ἴσην ἀφείλον τὴν AZ, τῇ δὲ Δ τὴν ZH, καὶ ἐπιζεύξας τὴν BH ταύτῃ παράλληλον ἡγαγον τὴν ZΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AΘ πρὸς ΘB, οὕτως ἡ AZ πρὸς ZH, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῇ Γ, ἡ δὲ ZH τῇ Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AΘ πρὸς ΘB, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διήρηται ἄρα κατὰ τὸ Θ σημεῖον, ὅπερ· ~ β'. Τριῶν δοθεῖσῶν εὐθειῶν τῶν AB BG Δ, εὑρεῖν ὡς τὴν AB πρὸς τὴν BG, οὕτως ἄλλην τινὰ πρὸς τὴν Δ. Πάλιν ἔκλινά τινα

εὐθεῖαν τὴν ΓΕ ἐν τυχοῦση γωνία, καὶ τῇ Δ ἴσην ἀπεθέμην τὴν ΓΖ. ἐπέζηυξα τὴν ΒΖ καὶ ταύτη παράλληλον ἤγαγον τὴν ΗΑ. γίνεται οὖν πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΓΖ, τουτέστιν πρὸς τὴν Δ· εὐρηται ἄρα ἡ ΖΗ. Ὀμοίως κἂν ἡ τρίτη δοθῇ, τὴν τετάρτην εὐρήσομεν. γ'. Ἐχέτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ κατὰ σύνθεσιν τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως ἄλλο τι τὸ Η πρὸς τὸ ΕΖ· καὶ τὸ Η ἄρα πρὸς τὸ ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· μείζον ἄρα ἐστὶν τὸ Η τοῦ ΔΕ. κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΘΕ πρὸς τὸ ΕΖ, συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΖΘ πρὸς τὸ ΖΕ.

7. 686 τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. δ'. Πάλιν δὴ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΕΖ. Πάλιν γὰρ ἐπεὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ, ἔσται ἔλασσον τοῦ ΔΕ. ἔστω τὸ ΕΘ· γίνεται ἄρα καὶ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. τὸ δὲ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. ε'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ ἐναλλάξ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ· φανερόν δὴ ὅτι μείζον ἔσται τοῦ ΔΕ. ἔστω τὸ ΗΕ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ, τουτέστιν ἢ περὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ. Τὰ δ' αὐτά, κἂν ἐλάσσονα λόγον ἔχη, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἔσται γὰρ καὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι ἔλασσον τοῦ ΔΕ. τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά. ς'. Τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· ὅτι ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς ἄλλο τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΕ.

7. 688 ἔστω πρὸς τὸ ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ. τὸ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ· καὶ τὸ ΓΑ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΕ. Ὀμοίως δὴ καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς μείζον τι μέγεθος τοῦ ΖΕ. καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. ζ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ. ἔστω πρὸς τὸ ΕΗ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ, οὕτως τὸ ΗΕ πρὸς τὸ ΕΔ. τὸ δὲ ΗΕ πρὸς τὸ ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ· καὶ τὸ ΓΒ ἄρα πρὸς τὸ ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ. Ὀμοίως δὴ κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, ἀνάπαλιν τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ. ἔσται γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖ· τὰ δὲ λοιπὰ φανερά. Καὶ φανερόν ἐκ τούτων ὅτι, ἐὰν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἔχη ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ· ἐὰν δὲ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ, καὶ τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ. η'. Ἐχέτω τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἢ περὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΖ· ὅτι καὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΖ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τι· ἔσται δὴ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΕΖ.

7. 690 ἔστω πρὸς τὸ ΗΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΗ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὴν ΔΖ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὴν

ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. Καὶ φανερόν ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Κἂν ἐλάσσων τοῦ μέρους, μείζων ὅλης. Θ'. Ἐχέτω δὲ πάλιν ὅλη ἡ ΑΓ πρὸς ὅλην τὴν ΔΖ μείζονα λόγον ἢ περὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ· ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΗΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. ἡ δὲ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΖ. Ἐὰν δὲ ὅλη πρὸς τὴν ὅλην ἐλάσσονα, ἡ λοιπὴ ἐλάσσονα. ι'. Ἔστω μείζων μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ Δ τῷ Ε· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. Κείσθω γὰρ τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. ἀλλὰ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΒΖ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε. Καὶ φανερόν ὅτι, ἂν ἐλάσσον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ τὸ ἀνάπαλιν.

7. 692

ια'. Ἀλλὰ ἔστω μείζων μὲν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἐλάσσον δὲ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. Φανερόν μὲν οὖν καὶ ἄνευ ἀποδείξεως· εἰ γὰρ ὄντος ἴσου τοῦ ΔΕ τῷ Ζ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ἐλάσσονος ὄντος πολλῶ μείζονα λόγον ἔξει. διὰ ἀποδείξεως δὲ οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶν τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἐὰν ποιῶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ Ζ, ἔσται μείζων τοῦ Ζ, ὥστε καὶ τοῦ ΔΕ. ἔστω οὖν [αὐτῷ ἴσον] τὸ ΗΕ· τὸ ΗΕ ἄρα πρὸς τὸ Ζ. μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. ἀλλ' ὡς τὸ ΗΕ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ. Καὶ φανερόν ὅτι, ὅπου τὸ ἐλάσσον, αἰεὶ ἐλάσσονα. Καὶ ὅτι μείζων γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ τοῦ ὑπὸ τῶν Γ ΔΕ· ἴσον γὰρ αὐτῷ ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν Γ ΕΗ, ὃ ἐστὶν μείζων τοῦ ὑπὸ τῶν Γ ΔΕ. ιβ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· ὅτι πάντα μὲν τὰ μεταξὺ τῶν Α Γ σημείων εἰς ἐλάσσονας λόγους διαιρεῖ τὴν ΑΒ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, πάντα δὲ τὰ μεταξὺ τῶν Γ Β εἰς μείζονας. Εἰλήφθω γὰρ σημεῖα ἐφ' ἐκάτερα τοῦ Γ τὰ Δ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων μὲν ἡ ΔΑ τῆς ΑΓ, μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΓ, ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλάξ ἄρα ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ.

7. 694

ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Α Γ σημείων. Πάλιν ἐπεὶ μείζων μὲν ἐστὶν ἡ ΕΑ τῆς ΑΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΒ τῆς ΒΓ, ἡ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλάξ ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν μεταξὺ τῶν Γ Β λαμβανομένων σημείων. ιγ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τμηθῇ δίχα κατὰ τὸ Γ, πάντων τῶν λαμβανομένων σημείων μέγιστον ἀποτέμνει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ τὸ Γ σημεῖον. Ἐὰν γὰρ ληφθῇ σημεῖον τὸ Δ, γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ· ὥστε μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ. τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα. Λέγω δ' ὅτι καὶ αἰεὶ τὸ ἐγγιον τοῦ Γ τοῦ ἀπώτερον μείζων χωρίον ποιεῖ. Εἰλήφθω γὰρ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ Ε μεταξὺ τῶν Α Δ· δεικτέον ὅτι μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ. ὦν τὸ ἀπὸ ΔΓ ἐλάσσον ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ μείζον ἐστὶν τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. ιδ'. Εἰ γὰρ εἴη τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ ΔΕ, καὶ ἐλάσσον τὸ Β τοῦ ΔΕ, μείζων ἂν γένοιτο τὸ Α τοῦ Γ. Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσον τὸ ΔΖ· τὸ Α ἄρα μετὰ τοῦ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ΔΕ μετὰ τοῦ Γ.

7. 696

κοινὸν ἀφηρησθῶ τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ Α ἴσον ἐστὶν τοῖς Γ ΖΕ, ὥστε μείζον ἐστὶν τὸ Α τοῦ Γ. ιε'. Ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ περὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ὅτι μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν Α Δ τοῦ ὑπὸ τῶν Β Γ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· καὶ ἡ Γ ἄρα πρὸς τὴν Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ πρὸς τὴν Δ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ Ε τῆς Δ. καὶ κοινὸν ὕψος ἡ Α·

ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν Ε Α τοῦ ὑπὸ τῶν Α Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Α Ε ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν Β Γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ τοῦ ὑπὸ τῶν Α Δ, ὥστε μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν Α Δ τοῦ ὑπὸ τῶν Β Γ. Ὅμοίως καὶ ἐὰν ἐλάσσων γίνηται, ἔλασσον καὶ τὸ χωρίον τοῦ χωρίου. Ἀλλὰ δὴ ἔστω πάλιν μείζον τὸ ὑπὸ τῶν Α Δ τοῦ ὑπὸ τῶν Β Γ· ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν Γ πρὸς τὴν Δ. Κείσθω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν Α Δ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Β Ε· γίνεται ἄρα μείζον μὲν τὸ ὑπὸ τῶν Β Ε τοῦ ὑπὸ τῶν Β Γ, ὥστε καὶ ἡ Ε τῆς Γ μείζων. ὥς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Δ. ἡ δὲ Ε πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β. Ὅμοίως καὶ ἀναστρέψαντι. ιζ'. Δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ τῶν ΑΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ὑπερέχει τῇ ΓΕ, ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου· τῆς ΑΒΕ· συναμφοτέρος δὲ ἡ ΑΒΕ δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

7. 698 ιζ'. Ἐστω δὴ πάλιν ἡ τῶν ΑΒ ΒΓ μέση ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΓΕ σύγκειται ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΓΔ ΔΕ, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ, ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἐκ τῶν ΑΔ ΔΓ, τουτέστιν ἐκ συναμφοτέρου τῆς ΑΒ ΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ. δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΓΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒ ΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ιη'. Πάλιν τῶν ΑΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ὑπερέχει τῇ ΑΕ, συναμφοτέρος δὲ ἡ ΕΒΓ δύο εἰσὶν αἱ ΒΔ, τουτέστιν ἡ δυναμένη τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ιθ'. Πάλιν τῶν ΑΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΔ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

7. 700 Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ ΔΕ, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ, ἡ ΑΕ ἄρα σύγκειται ἐκ τῶν ΑΔ ΔΓ, τουτέστιν συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ δύο τῶν ΒΔ. δύο δὲ αἱ ΒΔ δύνανται τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐστὶν ἡ συγκειμένη ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. [Ταῦτα λαμβάνεται εἰς τὴν τοῦ λόγου ἀποτομήν· ταῦτα καὶ εἰς τὴν τοῦ χωρίου ἀποτομήν λαμβάνεται, διαφερόντως μόνον.] Πρόβλημα εἰς τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς, χρήσιμον εἰς τὴν τοῦ ιγ' τόπου ἀνακεφαλαίωσιν. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, λαβεῖν ἐπεκβάλοντα τὴν ΑΔ δοθὲν τὸ Δ ποιοῦν τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ἢ ὑπερέχει συναμφοτέρος ἡ ΑΒΓ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. [ἄλλως οὐχ οἷόν τε συστήναι, εἰ μὴ συναμφοτέρος μὲν ἡ ΔΒ ΑΓ ἴση ἢ τῇ ΕΑ ὑπεροχῇ, ὅλη δὲ ἡ ΔΑ ὅλη τῇ ΑΒ, καὶ ἔτι τὰς ΕΑ ΑΓ ΓΒ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὴν ΓΒ τῆς ΔΕ διπλασίαν εἶναι.] Ἐστω γεγονός, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἔστω ἡ ΑΕ (ἐν γὰρ τοῖς ἐπάνω εὗρομεν αὐτήν)· ἔστιν οὖν ὥς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ἐναλλάξ καὶ διελόντι καὶ χωρίον χωρίῳ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΑ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΑ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. καὶ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΓΕ παράκειται υπερβάλλον τετραγώνῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν τὸ Δ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΕΑ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΑ ἴσον πάλιν τῇ ΓΕ παραβεβλήσθω υπερβάλλον τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ ΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ζητούμενον σημείον ἐστὶν τὸ Δ.

7. 702 ἐπεὶ γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΑ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ, ἀνάλογον καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΕΑ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ. τὰ δ' αὐτά, κἂν ζητῶμεν

λαβεῖν σημεῖον ποιοῦν ὡς τὴν ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ καὶ τῆς δυναμένης τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, ὅπερ ~ [Τὸ πρῶτον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμούς δὲ ε', ὧν τρεῖς μὲν μέγιστοι, δύο δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστιν μέγιστος μὲν κατὰ τὴν τρίτην πῶσιν τοῦ ε' τόπου, ἐλάχιστος δὲ κατὰ τὴν β' τοῦ ἔκτου τόπου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τοῦ ζ', μέγιστοι δὲ οἱ κατὰ τὰς τετάρτας τοῦ ἔκτου καὶ τοῦ ἑβδόμου. τὸ δεύτερον λόγου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιδ', πτώσεις δὲ ξγ', διορισμούς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ ὅλον εἰς τὸ πρῶτον. τὸ πρῶτον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ζ', πτώσεις κδ', διορισμούς ζ', ὧν δ' μὲν μέγιστοι, τρεῖς δὲ ἐλάχιστοι· καὶ ἔστιν μέγιστος μὲν ὁ κατὰ τὴν δευτέραν τοῦ πρώτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ β' τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν β' τοῦ δ' τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ ἔκτου, ἐλάχιστοι δὲ ὁ κατὰ τὴν τρίτην τοῦ τρίτου τόπου καὶ ὁ κατὰ τὴν δ' τοῦ δ' καὶ ὁ κατὰ τὴν πρώτην τοῦ ζ'. τὸ δεύτερον χωρίου ἀποτομῆς ἔχει τόπους ιγ', πτώσεις ξ', διορισμούς δὲ τοὺς ἐκ τοῦ πρώτου· ἀπάγεται γὰρ εἰς αὐτό.] [Ἐπιστήσειεν ἄν τις διὰ τί ποτε μὲν τὸ λόγου ἀποτομῆς δεύτερον ἔχει τόπους ιδ', τὸ δὲ τοῦ χωρίου ιγ'. ἔχει δὲ διὰ τόδε, ὅτι ὁ ζ' ἐν τῷ τοῦ χωρίου ἀποτομῆς τόπος παραλείπεται ὡς φανερός· ἐὰν γὰρ αἱ παράλληλοι ἀμφοτέραι ἐπὶ τὰ πέρατα πίπτωσιν, οἷα ἂν διαχθῇ, δοθὲν ἀποτέμνει χωρίον· ἴσον γὰρ γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν περάτων καὶ τῆς ἀμφοτέρων τῶν ἐξ ἀρχῆς τῇ θέσει δοθεισῶν εὐθειῶν συμβολῆς.

7.704 ἐν δὲ τῷ λόγου ἀποτομῆς οὐκέτι ὁμοίως διὰ τοῦτο οὖν προέχει τόπον ἓνα εἰς τὸ ἑβδομον τοῦ δευτέρου, καὶ τὰ λοιπὰ ὄντα τὰ ὄντα.] Διωρισμένης τομῆς πρώτων. Λήμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος. α'. Ἐστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ Γ Δ Ε, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΒΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ· καὶ ἀνάπαλιν. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ὅλην τὴν ΓΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, ὥστε καὶ ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΓΕ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΑΕ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΔ. ἀλλ' ὁ μὲν συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΓΕ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΑΕ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ ἐστίν, ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ καὶ ἐξ οὗ ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΕ ἐστίν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ, ὅπερ ~ Ἄλλως τὸ αὐτό. β'. Ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον καὶ ὅλη πρὸς ὅλην ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΕ ΓΒ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΕ ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ.

7.706 πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΓ· ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΕ ΓΒ καὶ τῆς ΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΕ ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ· ἐναλλάξ ἄρα γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΕ ΓΒ καὶ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΕ ΓΒ καὶ τῆς ΔΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Ἄλλως εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πέμπτου προβλήματος, πρότερον προθεωρηθέντων τῶν ἐξῆς δύο. γ'. Ἐστω ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΕΓ. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ, τουτέστιν

τῷ τε ὑπὸ τῶν ΒΕΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ. καὶ κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΕΓ. δ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ Ε σημεῖον ἐκτὸς τῆς ΑΔ· ὅτι πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ. Τετμήσθω πάλιν ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ζ· τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΒΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΒΔΓ καὶ τοῦ ἀπὸ ΓΖ.

7.708 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΓ. ε'. Τοῦτων προτεθεωρημένων δεῖξαι ὅτι, ἐὰν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, γίνεται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ. Κείσθω γὰρ τῇ ΓΕ ἴση ἡ ΖΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΖΒΕ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΖ ΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν ΖΒΕ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ἀλλὰ ταῦτα διὰ τὸ προγεγραμμένον ἴσα ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΖΓΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔ ΒΕ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. ἔξωθεν τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΕ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔ ΒΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ διὰ τὸ προγεγραμμένον ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ. ζ'. Ἐὰν ἡ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο διαχθῶσιν ὡς ΑΔ ΑΕ, ὥστε τὰς ὑπὸ ΒΑΓ ΔΑΕ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. Ἐὰν γὰρ περιγράψωμεν κύκλον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, καὶ ἐκβληθῶσιν αἱ ΕΑ ΓΑ ἐπὶ τὰ Ζ Η, μεταβαίνει τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΓΔ εἰς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΓΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ εἰς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕΑ, καὶ δεήσει ἐναλλάξ ζητῆσαι, εἰ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ. τοῦτο δὲ ταυτόν ἐστιν τῷ ζητεῖν, εἰ ἔστιν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

7.710 εἰ ἄρα ἔστιν, ἡ ΗΖ παράλληλος ἐστὶν τῇ ΒΓ. ἔστιν δέ· ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΔΑΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΗ γωνία. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΑΕ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐκτὸς τετραπλεύρου, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΖΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΖΗ γωνία. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΒΓ. τοῦτο δὲ ἐζητοῦμεν. εἰ ἄρα ~ Ἄλλως τὸ αὐτό. ζ'. Ἐστωσαν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΔΑΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. Ἦχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕΗ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς ΖΕ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς ΗΕ ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΕ καὶ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ. ἀλλ' ὁ μὲν συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς ΖΕ καὶ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς ΗΕ ὁ τοῦ ἀπὸ ΓΑ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΕ ΗΕ, τουτέστιν πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΕ καὶ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ὑπὸ ΒΓ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

7.712 η'. Ἐστω πάλιν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΒΑΕ ΓΑΔ γωνία ὀρθή· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. Ἦχθω διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΖΗ, καὶ καθ' ὃ συμπίπτει τῇ ΑΕ, ἔστω τὸ Η σημεῖον· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΖ. ὀρθή δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΔΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΑ τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΔΗ. ἀλλὰ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΔΗ συνηπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ὁ δὲ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ὑπὸ ΒΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ,

οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον. Θ'. Τούτου ὄντος ἄλλως τὸ προγεγραμμένον λήμμα· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Δ τυχοῦσά τις εὐθεῖα ἡ ΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον ὑποκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΓΖ ΕΖ ΒΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ ἴση ἐστὶν τῇ Α γωνίᾳ.

7.714 πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΔΖΕ γωνία τῇ Β ἴση ἐστὶν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΖΔ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ Α· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΓΖΕ ἴση ἐστὶν ταῖς Α Β γωνίαις. ἀλλὰ αἱ Α Β μετὰ τῆς ὑπὸ ΑΖΒ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΖΒ ΓΖΕ ἄρα γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. γίνεται δὴ διὰ τὸ προγεγραμμένον λήμμα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ (ἴσον γάρ ἐστιν τὸ ὑπὸ ΒΔΕ τῷ ἀπὸ ΔΖ)· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Λήμμα χρησίμων εἰς τὸ β' ἐπίταγμα τοῦ αὐτοῦ προβλήματος. ι'. Πάλιν ὄντος ἴσου τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔΕ τῷ ὑπὸ ΒΔΓ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ὅλην τὴν ΓΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΑΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ὅς ἐστιν ὁ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΕ καὶ τοῦ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΑΓ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ, ὅπερ ~ Ἄλλως τὸ αὐτό.

7.716. (1n) ια'. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΕΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΓ ΕΒ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΕΒ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΑ ἐστὶν [ὡς εἷς τῶν λόγων] ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΕΒ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΕΒ ΑΓ καὶ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΕΒ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΕΒ καὶ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΕΒ καὶ τῆς ΓΔ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ, ὅπερ ~ Ἄλλως τὸ αὐτὸ προθεωρηθέντος τοῦδε. ιβ'. Οὔσης ἴσης τῆς ΑΒ τῇ ΓΔ, ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον τὸ Ε, δεῖξαι ὅτι ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΕΓ. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΖ, τὸ δ' ὑπὸ ΑΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΖ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ τετραγώνου ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΒΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΕΓ. ιγ'. Τούτου προτεθεωρημένου ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΔΒΕ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΑΖ· διὰ δὲ τὸ προγεγραμμένον γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν ΖΒΔ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΖΓΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΒΓ.

7.718 ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΒΕ, ὁπότερα ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ΖΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΖΓΔ, ὃ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓΔ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΒ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΒΕ, ἀνάλογον καὶ διελόντι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΒ ἐστὶν, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΖΕ πρὸς ὅλην τὴν ΕΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΒΔ

ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. ιδ'. Προθεωρηθέντος καὶ τοῦδε ἄλλως τὸ αὐτὸ δειχθήσεται. Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ διήχθωσαν ἐντὸς αἱ ΑΔ ΑΕ ποιοῦσαι ἑκατέραν τῶν ὑπὸ ΒΑΕ ΓΑΔ γωνίαν ὀρθήν· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ ΓΑΔ γωνία, διάμετρος ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΒΕ ΖΗ τοῦ κύκλου, ὥστε κέντρον ἐστὶν τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΘΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ ἀνάπαλιν.

7.720 ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΖΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ἐναλλάξ ἄρα γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον, ὅπερ· ~ ιε'. Τούτου ὄντος ἄλλως τὸ προγεγραμμένον· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΕ. Ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ ὀρθή ἡ ΔΖ, καὶ ὁποτέρῳ τῶν ὑπὸ ΑΔΕ ΒΔΓ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΓ ΖΕ ΖΒ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ τῶν ΑΖΕ ΓΖΒ γωνία· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΕ. Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ ς' προβλήματος. ις'. Εὐθεία ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ Γ Δ Ε, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ, ἀνάλογον καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν καὶ ἀναστρέψαντι ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τῶν ΑΓ ΕΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΕΔ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ.

7.722 πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ. διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν ΑΓ ΕΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΕΔ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ. Ἄλλως τὸ αὐτὸ διὰ τοῦ συνημμένου. ιζ'. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ· ὥστε ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΕ, ὅς ἐστιν ὁ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΕ, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς ΔΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτός τῷ τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ. Ἄλλως. ιη'. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΕ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΓΖ ΔΖ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΖ, τέμνει δὲ ἡ ΒΑ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΒΕ τῷ ὑπὸ ΓΒΔ ἴσον ὑπόκειται· καὶ τὸ ὑπὸ ΓΒΔ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΖ τετραγώνῳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ.

7.724 ὦν ἡ ὑπὸ ΒΖΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΑΓ γωνίᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΕ γωνία λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ γωνίᾳ ἴση ἐστίν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ. Λήμμα εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ ἔκτου προβλήματος. ιθ'. Ὦντος πάλιν ἴσου τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ,

οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ λοιπὴ ἡ ΑΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ. καὶ ἀνάπαλιν· ὥστε ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΕ καὶ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΑΔ, ὅς ἐστιν τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΕ. Ἄλλως τὸ αὐτό. κ'. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, λοιπὴ ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ. ἀναστρέψαντί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχὴν, οὕτως [ἐστὶν] ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΓΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ.

7.726 πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ ΑΓ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΕ γίνεται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, διελόντι ὡς ἡ τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΔΒ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΓ ΔΕ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΔΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΕ, ὅπερ· ~ Ἄλλως τὸ αὐτό. κα'. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡμικύκλιον τὸ ΓΖΔ, ἐφαπτομένη ἦχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΓΖ ΔΖ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΒΔ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΓΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ΒΖ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΕ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΕ γωνία τῇ Α ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΖΔ τῇ ὑπὸ ΖΓΒ ἴση ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΔ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ ἴση ἐστίν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΕ. κβ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα τὰ Γ Δ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Κεῖσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· διελόντι ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΓ.

7.728 ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἐστὶν κοινοῦ ὕψους παραληφθείσης τῆς ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΓΒ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΓΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΓΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ὅλην τὴν ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ὅπερ· ~ κγ'. Ἔστω δὲ πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ἀπὸ ΒΔ τετραγώνῳ. Κεῖσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑ ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΒΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΓΒ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΔ τετραγώνῳ. κδ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τρία σημεῖα τὰ Γ Δ Ε, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· ὅτι γίνεται καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. Εἰλήφθω γὰρ ἰσότητος σημεῖον τὸ Ζ, ὥστε ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΔ τῷ ὑπὸ ΒΖΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ (λήμμα γὰρ ἐν δωρισμένῃ).

7.730 ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΒΖΕ, ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ὡς δὲ ἐστὶν ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. Ἄλλως τὸ αὐτό. κε'. Γεγράφθω ἐπὶ τῶν ΑΕ ΔΒ εὐθειῶν

ἡμικύκλια τὰ AZE ΔΖΒ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ ΖΓ ΖΔ ΖΕ ΖΒ. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ AZB ΔΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ BAE πρὸς τὸ ὑπὸ BΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ BAE πρὸς τὸ ὑπὸ BΔΕ, οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ΖΔ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ὑπὸ AZΔ γωνία τῇ ΖΓ εὐθείᾳ. ἀλλὰ καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΒΖ ἐπὶ τὸ Η, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΑ γωνίᾳ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΕΖΓ ὅλη τῇ ὑπὸ τῶν ΓΖΗ γωνίᾳ ἴση ἐστίν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ πρὸς τὸ ἀπὸ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ὅπερ ~ κς'.

7.732 Ἦστω πάλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. Εἰλήφθω πάλιν ἰσότητος σημείον τὸ Ζ, ὥστε ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΖΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, τῷ ἀπὸ ΖΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, ὅπερ ~ Ἄλλως τὸ αὐτό. κζ'. Γεγράφθω περὶ τὰς ΑΕ ΓΒ ἡμικύκλια τὰ AZE ΓΖΒ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ ΓΖ ΔΖ ΕΖ ΒΖ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ γωνίᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΓΒ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ, οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ.

7.734 ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΕ γωνίᾳ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΔ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ ΒΖΔ γωνίᾳ ἴση ἐστίν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, ὅπερ ~ Λήμματα χρήσιμα εἰς τὸ δεύτερον διωρισμένης τομῆς. α'. Ἦστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τρία σημεία τὰ Γ Δ Ε, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, καὶ συναμφοτέρω τῇ ΑΕ ΓΒ ἴση κείσθω ἡ Ζ· ὅτι γίνεται τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Ζ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΔΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον [καὶ ἀνάπαλιν] καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ συνθέντι ὡς συναμφοτέρος ἡ ΒΓ ΑΕ, τουτέστιν ἡ Ζ, πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ζ ΑΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΕ ΓΒ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς ἡ Ζ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ζ ΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ. τὰ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν· γίνεται ἄρα τέσσαρα. β'. Ἦστω νῦν πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, καὶ συναμφοτέρω τῇ ΑΕ ΓΒ ἴση κείσθω ἡ Ζ· ὅτι πάλιν γίνεται τέσσαρα, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Ζ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΔΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ.

7.736 Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον καὶ ἀνάπαλιν καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπὴν καὶ συνθέντι ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΕ ΓΒ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. συναμφοτέρος δὲ ἡ ΑΕ ΓΒ ἴση ἐστὶν τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ζ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΒ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ.

συνθέντι ὡς συναμφοτέρος ἢ ΑΕ ΓΒ, τουτέστιν ὡς ἡ Ζ, πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Ζ ΓΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ. τὰ δ' αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο δείξομεν· γίνεται ἄρα τέσσαρα. γ'. Ἐστω δὲ ἐκτὸς τῆς ὅλης τὸ σημεῖον, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ· ὅτι πάλιν, ἐὰν τῇ τῶν ΑΕ ΓΒ ὑπεροχῇ ἴση τεθῇ ἡ Ζ, γίνεται τέσσαρα, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Ζ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, τὸ δὲ ὑπὸ Ζ ΓΔ τῷ ὑπὸ ΒΓΕ, τὸ δὲ ὑπὸ Ζ ΒΔ τῷ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ὑπὸ Ζ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, ἀνάλογον καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπὴν καὶ ἀναστρέψαντι ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν τῶν ΑΕ ΓΒ ὑπεροχὴν, οὕτως ἢ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ. ἡ δὲ τῶν ΑΕ ΓΒ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἡ Ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ Ζ ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΑΕ. πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ ΑΕ πρὸς λοιπὴν τὴν ΒΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ, διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν ΑΕ ΒΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἢ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΕ ΒΓ ὑπεροχῆς, τουτέστιν τῆς Ζ καὶ τῆς ΓΔ, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ.

7.738 τὰ δὲ αὐτὰ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δύο δείξομεν· γίνεται ἄρα τέσσαρα. δ'. Τούτου δ' ἂν δειχθέντος ῥαδίως εὐρεθείη τὰ εἰς τὸ πρῶτον διωρισμένης τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Ζ ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Ζ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΓ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Ζ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ Ζ ΔΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ. Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. ε'. Ἐστω πάλιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, καὶ τυχὸν σημεῖον ἔστω τὸ Ζ· ὅτι, ἐὰν συναμφοτέρω τῇ ΑΕ ΓΒ ἴση τεθῇ ἡ Η, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖΕ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ τῶν Η ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἢ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ τοῦ ὑπὸ τῶν Η ΕΖ. ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ τοῦ ὑπὸ τῶν Η ΕΖ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΕΖ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΓΖ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΖΕ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΓΖ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΖΕ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΖΕ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖΕ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ, ὅπερ ~ Ἄλλο εἰς τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου.

7.740. (1n) ζ'. Ἐστω τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν Ε Β τὸ Ζ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΕΖΒ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ προαποδέδεικται τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ Η ΕΖ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΕΓ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΕΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕ ΓΖ· γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ Η ΔΖ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΑΕ ΓΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΒ ΕΖ. ἀλλὰ πάλιν τὸ ὑπὸ ΓΒ ΕΖ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΓΖΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΕΖΒ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕ ΓΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλον [ἄρα] ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ, εἴχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΕΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΑΖΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΕΖΒ. Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. ζ'. Ἐστω πάλιν τὸ σημεῖον ἐκτὸς τῆς ΑΒ τὸ Ζ· δεῖξαι ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ ΕΖΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ τῶν Η ΒΖ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ Η ΒΖ, τουτέστιν τῷ τε ὑπὸ ΑΕ ΒΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ὅλον [ἄρα] ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΖ ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ Η ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΖ ΓΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ ΒΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΖ ΓΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΕ ΒΖ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖΒ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἄρα ἢ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖΒ.

7.742 Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. η'. Ἐστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΒ, σημεῖον ἔστω τὸ Ζ μεταξὺ τῶν Δ Γ, καὶ συναμφοτέρω τῇ ΑΕ ΓΒ ἴση κείσθω ἡ Η· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΒ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ τῶν Η ΖΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Η ΔΖ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΒ τοῦ ὑπὸ τῶν Η ΓΖ. ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓΒ τοῦ ὑπὸ τῶν Η ΖΓ, κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΒΓΖ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ ΓΒ τοῦ ὑπὸ ΑΕ ΖΓ· ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ

ὑπὸ EZ ΓΒ τοῦ ὑπὸ AE ΖΓ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ EZΓ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ EZB τοῦ ὑπὸ AZΓ· καὶ τὸ ὑπὸ EZB ἄρα τοῦ ὑπὸ AZΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ Η ΔΖ. Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος. Θ'. Ἀλλὰ ἔστω τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ Β τὸ Ζ· ὅτι γίνεται τὸ ὑπὸ τῶν AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ BZE ἴσον τῷ ὑπὸ Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ Η ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΓΕ καὶ τῷ ὑπὸ Η ΓΖ, ὃ ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AE ΓΖ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΓΖ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΕΓΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ EZ ΓΒ· γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ EZ ΓΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ Η ΔΖ.

7.744 ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ EZ ΓΒ ἴσον τῷ τε ὑπὸ EZΓ καὶ τῷ ὑπὸ BZE, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΓΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΓΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AZΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ BZE ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ Η ΔΖ. Εἰς τὸ δεύτερον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. Ι'. Ἐστω δὴ τὸ σημεῖον ἐκτὸς τῆς AB τὸ Ζ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AZΓ τοῦ ὑπὸ τῶν EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ABΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ τῶν Η ΒΖ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Η ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν ABΓ καὶ τῷ ὑπὸ Η ΒΖ, ὃ ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AE ΖΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΒΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ABΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AZ ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ AZ ΓΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΖΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ Η ΔΖ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ AZ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΖΒ ὑπεροχὴ ἐστὶν, ἥ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB· καὶ τὸ ὑπὸ AZΓ ἄρα τοῦ ὑπὸ EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ Η ΔΖ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. ΙΑ'. Ἐστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΕ, καὶ τῇ τῶν AE ΒΓ ὑπεροχῇ ἴση κείσθω ἡ Η, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ μεταξὺ τῶν Ε Β· ὅτι τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν Η ΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ABΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ Η ΒΖ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ Η ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ABΓ καὶ τῷ ὑπὸ Η ΒΖ, ὃ ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΒΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΖ.

7.746 ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ABΓ τὸ ὑπὸ AZ ΒΓ ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ ΖΒ ΒΓ· γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ Η ΖΔ ἴσον τῷ τε ὑπὸ τῶν AZ ΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΒ ΒΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓΒ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΓΒ ΒΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓΒ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AE ΖΒ τὸ οὖν ὑπὸ Η ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν AZ ΓΒ καὶ τῷ ὑπὸ AE ΖΒ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ AZ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΖΒ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἥ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB· τὸ ἄρα ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ Η ΖΔ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος. ΙΒ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ Ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β Γ· ὅτι τὸ ὑπὸ AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ EZB ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Η ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΓΒ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ Η ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ Η ΖΔ τῷ ὑπὸ ΕΓΒ καὶ τῷ ὑπὸ Η ΖΓ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ Η ΖΓ τὸ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΒΓ ἐστὶν ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΖΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΕΓΒ τὸ ὑπὸ ΒΓΖ ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ EZ ΒΓ· γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ Η ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ EZ ΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΓΖ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΒΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΓΖ. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΒΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΓΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΓΖ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AE ΓΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ Η ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AE ΓΖ καὶ τῷ ὑπὸ EZ ΓΒ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ EZ ΒΓ τὸ τε ὑπὸ EZ ΖΓ ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ EZ ΖΒ, τὸ δὲ ὑπὸ EZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ AE ΖΓ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AZΓ. εἵχομεν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ EZB· τὸ ἄρα ὑπὸ AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ EZB ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ Η ΖΔ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος.

7.748. (1n) ΙΓ'. Ἐστω πάλιν τὸ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ Δ· ὅτι τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ἐλλείπει τῷ ὑπὸ Η ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Η ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΓΒ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ Η ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Η ΖΔ ὑπεροχὴ ἐστὶν, ἥ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ ΕΓΒ τοῦ ὑπὸ Η ΓΖ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓΒ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΓΖ. ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ ΕΓΒ τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓΒ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΓΖ, κοινὸν προστεθέντος τοῦ ὑπὸ ΖΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ EZ ΒΓ τοῦ ὑπὸ AE ΓΖ. ᾧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ EZ ΒΓ τοῦ ὑπὸ AE ΓΖ, κοινὸν προστεθέντος τοῦ ὑπὸ EZΓ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ EZB τοῦ ὑπὸ AZΓ· ὥστε τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ἐλλείπει τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΖΔ. Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. ΙΔ'. Ἀλλὰ ἔστω ἐκτὸς τὸ Ζ σημεῖον· ὅτι πάλιν τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ

ὑπὸ EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ H ΔZ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ HΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ EΓB, ἀμφοτέρω ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ H ΓZ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ HΔZ ἢ ὑπεροχὴ ἐστὶν ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ H ΓZ τοῦ ὑπὸ EΓB. ὥ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ H ΓZ τοῦ ὑπὸ EΓB, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ BΓZ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ AE ΓZ τοῦ ὑπὸ EZ BΓ· ἢ γὰρ τῶν AE BΓ ὑπεροχὴ μετὰ τῆς BΓ ἢ AE ἐστίν. ὥ δὲ πάλιν ὑπερέχει τὸ ὑπὸ AE ΓZ τοῦ ὑπὸ EZ BΓ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ EZΓ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB· τὸ ἄρα ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ὑπερέχει τῷ ὑπὸ H ΔZ.

7.750 Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. ιε'. Πάλιν ἔστω τὸ Z σημεῖον μεταξὺ τῶν A E· ὅτι τὸ ὑπὸ AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ EZB ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ H ΔZ. Ἐπεὶ τὸ ὑπὸ H BΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ABΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ H BZ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ H ΔZ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ABΓ καὶ τῷ ὑπὸ H ZB. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ABΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AZ BΓ καὶ τῷ ὑπὸ ZBΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν AE BΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ZB μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓBZ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ AE BZ· τὸ ὑπὸ AE BZ ἄρα ἐστὶν τό τε ὑπὸ BZE καὶ τὸ ὑπὸ AZB, ὃ μετὰ τοῦ ὑπὸ AZ BΓ ἐστὶν τὸ ὑπὸ AZΓ· τὸ οὖν ὑπὸ AZΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ BZE ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ H ΔZ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. ις'. Ἔστω δὴ πάλιν ἐκτὸς τὸ Z σημεῖον· ὅτι τὸ ὑπὸ AZΓ τοῦ ὑπὸ EZB ἐλλείπει τῷ ὑπὸ H ΔZ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν H AΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ BAE, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ H AZ· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ H ΔZ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ BAE καὶ τῷ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓB ὑπεροχῆς καὶ τῆς AZ.

7.752 ἀλλὰ τὸ ὑπὸ BAE μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς τῶν AE ΓB ὑπεροχῆς καὶ τῆς AZ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ZB AE· λείπον τῷ ὑπὸ ZA BΓ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ H ΔZ ἢ ὑπεροχὴ ἐστὶν, ἢ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ BZ AE τοῦ ὑπὸ ZA BΓ. ἀλλὰ ὥ τὸ ὑπὸ ZB AE τοῦ ὑπὸ ZA BΓ ὑπερέχει, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ὑπὸ BZA, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ BZE τοῦ ὑπὸ ΓZA· τὸ οὖν ὑπὸ BZE τοῦ ὑπὸ ΓZA ὑπερέχει τῷ ὑπὸ H ΔZ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΓZA τοῦ ὑπὸ BZE ἐλλείπει τῷ ὑπὸ H ΔZ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ πρώτου προβλήματος. ιζ'. Ἔστω ἡ AB ἴση τῇ ΓΔ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ E μεταξὺ τῶν B Γ σημείων· ὅτι τὸ ὑπὸ AE EΔ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ AΓΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ AE EΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AE EΓ, τουτέστιν τῷ τε ὑπὸ BE EΓ καὶ τῷ ὑπὸ AB EΓ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ AE ΓΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ AE EΔ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ὑπερέχει τῷ τε ὑπὸ EΓ AB, τουτέστιν τῷ ὑπὸ EΓ ΓΔ (ἴσαι γὰρ εἰσιν αἱ AB ΓΔ), καὶ τῷ ὑπὸ AE ΓΔ. ἀλλὰ τό τε ὑπὸ EΓ ΓΔ καὶ τὸ ὑπὸ AE ΓΔ γίνεται ὅλον τὸ ὑπὸ AΓ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ AE EΔ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ AΓ ΓΔ. Εἰς τὸ πρῶτον ἐπίταγμα τοῦ δευτέρου προβλήματος. ιη'. Ἔστω ἡ AB ἴση τῇ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ Δ τὸ E· ὅτι τὸ ὑπὸ AE EΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ AΓΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν AE EΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν AΓ EΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΓE EΔ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ BE EΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ AED μετὰ τοῦ ὑπὸ BEΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AΓ EΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΓE EΔ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ BE EΓ.

7.754 ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓE EΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ BΔ ΓE, τουτέστιν τὸ ὑπὸ AΓE (ἴσαι γὰρ εἰσιν καὶ ὅλαι αἱ AΓ BΔ), τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AΓ EΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ AΓE ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ AΓ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ AE EΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ BE EΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ AΓΔ. Λήμμα χρησίμων εἰς τοὺς μοναχοὺς τοῦ τε πρώτου καὶ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος. ιθ'. Ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ AEB ἐπὶ διαμέτρου τῆς BA, καὶ ὀρθῶν τῶν ΓE ΔZ, καὶ ἀχθείσης εὐθείας τῆς EZH, καὶ ἐπ' αὐτῆς καθέτου τῆς BH, γίνεται τρία· τὸ μὲν ὑπὸ ΓB BΔ ἴσον τῷ ἀπὸ BH, τὸ δὲ ὑπὸ AΓ ΔB τῷ ἀπὸ ZH, τὸ δὲ ὑπὸ AΔ ΓB τῷ ἀπὸ EH. Ἐπεξέυχθωσαν γὰρ αἱ HΓ HΔ AZ ZB. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Z, καὶ κάθετος ἡ ΔZ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔZB γωνία τῇ ὑπὸ BAZ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΔZB ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΔHB, ἡ δὲ ὑπὸ BAZ, ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ EB, τῇ ὑπὸ BEZ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ BΓH· καὶ ἡ ὑπὸ ΔHB ἄρα ἴση τῇ BΓH· ὥστε τὸ ὑπὸ ΓBΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ BH. ἔστιν δὲ καὶ ὅλον τὸ ὑπὸ ABA ἴσον τῷ ἀπὸ BZ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ AΓ ΔB ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ZH.

7.756 πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ABΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ BE τετραγώνῳ, ὣν τὸ ὑπὸ ΓBΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ BH, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ AΔ ΓB ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ EH τετραγώνῳ· γίνεται ἄρα τρία. Εἰς τὸν μοναχὸν τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος τοῦ δευτέρου προβλήματος. κ'. Τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ διήχθωσαν αἱ AΔ

BZ ΓΕ, ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ κάθετος, ἐν κύκλῳ δὲ τὰ Α Ζ Ε Η σημεῖα ὅτι ὀρθαὶ εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ζ Ε γωνίαι. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΗΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΘ ΘΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΖΗΕ. ἀλλ' ἦν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ μετὰ τῆς Α δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΓ ἄρα μετὰ τῆς Α δυσὶν ὀρθαῖς ἴση ἐστίν· ἐν κύκλῳ ἄρα ἔστιν τὰ Α Β Θ Γ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΘ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΗΓΔ. εἰσὶν δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Η κατὰ κορυφὴν ἴσαι ἀλλήλαις· λοιπὴ ἄρα ἡ Δ ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε. ὀρθὴ δὲ ἐστὶν ἡ Δ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ πρὸς τῷ Ε σημείῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία ὀρθὴ ἐστίν· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Ζ Ε σημείοις, ὅπερ ~ Ὁ μοναχὸς πρώτου προβλήματος τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος. κα'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, [ὁ] μοναχὸς λόγος καὶ ἐλάχιστός ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΓ· λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΑΙ ΒΔ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ.

7.758 Γεγράφθω περὶ τὴν ΑΔ κύκλος, καὶ ἤχθωσαν ὀρθαὶ αἱ ΒΖ ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, καὶ μήκει ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· εὐθεία ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Ζ Ε Η. ἔστω ἡ ΖΕΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ μὲν ΗΓ ἐπὶ τὸ Θ, ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΖΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΔΚ. καὶ διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα γίνεται τὸ μὲν ὑπὸ ΑΓ ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΚ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΘΚ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ ἐστὶν ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΑΓ ΒΔ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ. ἤχθω οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΛ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ ἐστὶν ἴση, ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Η γωνία ἴση, ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΘΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΕ ΕΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΕ ΕΔ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ ΕΓ. καὶ ἔστιν ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΑΕ ΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ ΕΓ μοναχὸς καὶ ἐλάσσων [ὁ] λόγος, ἡ δὲ ΖΘ ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ [τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΚ], ὥστε ὁ μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ ΑΓ ΒΔ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ, ὅπερ ~ Ὁ μοναχὸς τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος τοῦ δευτέρου προβλήματος.

7.760 κβ'. Πάλιν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ. λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτός ἐστιν τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκριμένης ἕκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΑΔ ὀρθὴ ἡ ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ ἴσον τὸ ἀπὸ ΖΔ, καὶ τῇ ΖΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ τῷ ἀπὸ ΖΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΗ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ ΑΗ ΗΒ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΒ γωνίᾳ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΗ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ ΒΗΘ γωνίαι, τουτέστιν (ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΒΚ) ἡ ὑπὸ ΚΒΖ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΛΑΚ γωνίᾳ· ὥστε ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Α Λ Β Κ σημεῖα· διὰ ἄρα τὸ προγεγραμμένον γίνονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Κ Λ σημείοις γωνίαι.

7.762 ἤχθω δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΔ ἡ ΒΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΝ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΖΛ καὶ παράλληλος τῇ ΗΛ. πάλιν δὲ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΒΝ (καὶ γὰρ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΜΒ). ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ΗΑΓ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ

ΓΝΒ ἐν κύκλῳ, ἡ δὲ ὑπὸ HAB ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΑΝ ἐν παραλλήλῳ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΝΓ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΝ τετραγώνῳ.

7.764 ἐπεὶ δὲ ἐν τριγώνῳ τῷ ΒΔΖ κάθετος ἦκται ἡ ΔΝΕ, καὶ κεκλασμένοι πρὸς αὐτῇ εἰσὶν αἱ ΖΝ ΝΒ, ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΔ ΔΒ ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν ἀπὸ ΖΝ ΝΒ ὑπεροχῇ. ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ ΖΔ ΔΒ ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΔ· καὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν ΖΝ ΝΒ ἄρα ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΔ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΝ· ἡ ΝΖ ἄρα ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ. πάλιν ἐπεὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΝ ΝΒ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶν τῇ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΓ ΓΒ ὑπεροχῇ, ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΓ ΓΒ ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒ ΒΓ, καὶ ἡ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΝ ΝΒ ἄρα ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΝ· ἡ ΝΗ ἄρα ἐστὶν ἡ δυναμένη ὅλον τὸ ὑπὸ ΑΔ ΒΓ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΝ ἐστὶν ἡ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΖΗ ἴση ἐστὶν τῇ τε δυναμένη τὸ ὑπὸ ΑΔ ΒΓ καὶ τῇ δυναμένη τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ.

7.766 ἐπειδὴ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΗ γωνία, καὶ κάθετος ἡ ΑΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΖΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. καὶ ἔστιν ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΔ λόγος [ὁ] μοναχὸς καὶ ἐλάσσων, ἡ δὲ ΖΗ ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΓ ΒΔ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΔ ΒΓ· ὁ ἄρα μοναχὸς καὶ ἐλάσσων λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΓ ΒΔ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΔ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Εἰς τὸ τρίτον ἐπιτάγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. κγ'. Ἐστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΓΔ, μεῖζον δὲ ὑπὸ ΒΕΓ τοῦ ὑπὸ ΑΒΔ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΕΓ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΒΔΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΕΓ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΒΓΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΕΓΔ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΓΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΕΓΔ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔ ΓΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΓ ΓΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΓΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΓ ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΓ ΓΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ ΕΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ὅλον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΔ· γέγονεν οὖν τὸ ὑπὸ ΒΕΓ ἴσον τῷ τε ὑπὸ ΑΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΓΔ, ὃ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔ ΔΓ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΒΕΓ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΒΔΓ, ὅπερ ~ Μοναχὸς τοῦ τρίτου ἐπιτάγματος τοῦ τρίτου προβλήματος.

7.768. (1n) κδ'. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ, καὶ προστιθεμένης τινὸς ΔΕ, ἐὰν γένηται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΓ· λέγω δὴ ὅτι ὁ αὐτός ἐστιν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ. Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΔ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΗΔ, καὶ τῇ ΑΔ ὀρθαί ἦχθωσαν αἱ ΒΖ ΓΗ. ἐπεὶ οὖν γεγένηται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΔ ἴσον ἐστὶν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ἀπὸ ΒΖ, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΓΔ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΗ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. καὶ μήκει· καὶ εἰσὶν παράλληλοι αἱ ΒΖ ΓΗ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Ζ Η Ε. ἔστω ἡ ΖΗΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΑΘ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΓ, ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΖΕΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΔ, ὁ ἄρα μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΓ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ τὸ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΘ (ἐν κύκλῳ γὰρ τὰ Θ Α Γ Η σημεία, ἐπειδήπερ ὀρθαί εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Θ Γ σημείοις γωνίαι).

7.770 ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ ἐν παραλλήλῳ· ὁ ἄρα μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ. ἡ δὲ ΘΚ ἐστὶν ἡ δυναμένη· τε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ καὶ ἡ τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΔ, ὥστε ὁ μοναχὸς καὶ μέγιστος λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΒΔ καὶ τῆς δυναμένης τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ. Τὸ πρῶτον διωρισμένης τομῆς ἔχει προβλήματα ζ', ἐπιτάγματα ιζ',

διορισμούς δὲ ε', ὧν μέγιστοι μὲν δ', ἐλάχιστος δὲ α'. καὶ εἰσὶν μέγιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ β' ἐπίταγμα τοῦ β' προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ τετάρτου προβλήματος καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πέμπτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἔκτου, ἐλάχιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ τρίτον ἐπίταγμα τοῦ τρίτου προβλήματος. τὸ δὲ δεύτερον διωρισμένης ἔχει προβλήματα τρία, ἐπίταγματα θ', διορισμούς γ', ὧν ἐλάχιστοι μὲν δύο, μέγιστος δὲ α'. καὶ εἰσὶν ἐλάχιστοι μὲν ὅ τε κατὰ τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ ὁ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ δευτέρου, μέγιστος δὲ ὁ κατὰ τὸ γ' τοῦ γ' προβλήματος. Νεύσεων πρῶτον. Λήμμα χρήσιμον εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα. α'. Ἐστω μείζων ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ AEB τῷ ὑπὸ ΓΖΔ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AE τῆς ΓΖ. Καὶ τετμήσθω ἑκατέρα τῶν AB ΓΔ δίχα καθ' ἑκάτερα τῶν H Θ σημείων· φανερόν δὴ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ HB τῆς ΘΔ. ἐπεὶ οὖν ἴσον μὲν ἐστὶν τὸ ὑπὸ AEB τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, μείζον δὲ τὸ ἀπὸ HB τοῦ ἀπὸ ΘΔ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ AEB μετὰ τοῦ ἀπὸ HB, τοῦ ὑπὸ ΓΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΔ.

7.772 ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ AEB μετὰ τοῦ ἀπὸ HB ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ HE, τὸ δὲ ὑπὸ ΓΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΘ· μείζον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ HE τοῦ ἀπὸ ΘΖ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ HE τῆς ΘΖ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ AH τῆς ΓΘ μείζων· ὅλη ἄρα ἡ AE ὅλης τῆς ΓΖ ἐστὶν μείζων. Ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἐλάσσων ᾖ ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ AEB τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, ἐλάσσων ἔσται ὅλη ἡ AE ὅλης τῆς ΓΖ. β'. Ἐστω μείζων ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε· φανερόν μὲν οὖν ὅτι δυνατόν ἐστιν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕ ΕΔ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΕ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB. παραβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZB, καὶ ἔστω μείζων ἡ AZ τῆς ΖΒ· πάλιν δὴ φανερόν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AZ τῆς ΓΕ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΖ τῆς ΕΔ. Ἡ μὲν γὰρ AZ τῆς μείζονος μείζων ἐστὶν ἢ ἡμίσεια, ἡ δὲ ΓΕ τῆς ἐλάσσονος ἐστὶν ἡμίσεια [ὥς δὲ ἡ AZ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΖΒ]· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῆς ΓΕ, ὅπερ· ~ γ'. Ἐστω δὲ πάλιν ἴσον τὸ ὑπὸ AZB τῷ ὑπὸ ΓΕΔ, καὶ ἐλάσσων ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ ἔτι ἐλάσσων μὲν ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ, ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΖΑ· ὅτι καὶ ἡ AZ τῆς ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶν. Τετμήσθωσαν δὲ δίχα αἱ ΓΔ AB κατὰ τὰ H Θ σημεία· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΓΗ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΑΘ τοῦ ἀπὸ ΓΗ ἐστὶν ἔλασσον. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΘ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν AZB καὶ τῷ ἀπὸ ΖΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ HE· καὶ τὸ ὑπὸ AZB ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΘ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ HE.

7.774 ὦν τὸ ὑπὸ AZB ἴσον ὑπόκειται τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΖ ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ἀπὸ HE· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς HE. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΓΗ ἐλάσσων· ὅλη ἄρα ἡ AZ ὅλης τῆς ΓΕ ἐστὶν ἐλάσσων. ἡ δὲ λοιπὴ τῆς λοιπῆς μείζων. δ'. Ἐστω δὲ πάλιν μείζων ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὴν ΔΕ τῆς ΕΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα· φανερόν μὲν οὖν ὅτι δυνατόν ἐστιν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν ἐλλείπον τετραγώνω. Ἐπεὶ γὰρ μὴ ἔστιν ἐλάσσων ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ, ἥτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ μείζων. καὶ εἰ μὲν ἴση, ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΕΔ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΓΔ, ὥστε ἔλασσον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB, εἰ δὲ μείζων, πολλῶ ἔλασσόν ἐστιν τὸ ὑπὸ ΓΕΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB (καὶ γὰρ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΓΔ ἐστὶν ἔλασσον). δυνατόν ἄρα ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν ἐλλείπον τετραγώνω. Παραβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZB, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἔστω ἡ AZ· ὅτι δὴ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΖΒ τῆς ΓΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ οὐκ ἔστιν ἐλάσσων, ἥτοι ἄρα ἴση ἐστὶν ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ ἔστι τῆς μὲν AB μείζων ἢ ἡμίσεια ἡ AZ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἡ ΔΕ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῆς ΔΕ.

7.776 καὶ ἔστιν ὥς ἡ AZ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΖΒ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΖΒ τῆς ΓΕ. Ἐστω δὲ μείζων ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Η σημείον, ἡ δὲ AB δίχα κατὰ τὸ Θ σημείον. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΓΔ, καὶ ἔστι τῆς μὲν AB ἡμίσεια ἡ ΘΒ, τῆς δὲ ΓΔ ἡμίσεια ἡ ΓΗ, μείζων ἄρα ἡ ΘΒ τῆς ΓΗ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΘΒ τοῦ ἀπὸ ΓΗ μείζον ἐστὶν. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ AZB καὶ τῷ ἀπὸ ΖΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΗ

ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· μείζων ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΘ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΗ. ὦν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΖ μείζων ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΕΗ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΘΖ τῆς ΕΗ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΔΗ μείζων· ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ ὅλης τῆς ΔΕ μείζων ἐστίν. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΖΒ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΖΒ τῆς ΓΕ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ ζ' πρόβλημα. ε'.

Ἐστω ἐλάσσων μὲν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ· ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΑΒ ΓΔ κατὰ τὰ Θ Η σημεία· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΒ τῆς ΗΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ΘΒ ἐλασσόν ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΒ, ὃ ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἐλασσόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΓΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΗΖ· ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΘ τῆς ΗΖ.

7.778 ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΓΗ ἐλάσσων· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλης τῆς ΓΖ ἐστὶν ἐλάσσων. Ὁμοίως κἂν μείζων ἦ, ἡ ὅλη τῆς ὅλης. Παραθεωρούμενον ἐν τῷ η' προβλήματι. ζ'. Ρόμβου ὄντος τοῦ ΑΔ, οὗ διάμετρος ἡ ΒΓΕ, ἐὰν τῶν ΒΕ ΕΓ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ ΕΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΖ κύκλος γραφῇ ὁ ΖΗΘ, καὶ ἐκβληθῇ ἡ ΛΓΗ, ἔσται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν Η Κ Β.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΛΕ ΕΚ ΒΚ ΚΗ ΗΕ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία καὶ ἐφ' ἑκάτερα τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου εἰσίν, αἱ ΛΓ ΓΚ ἴσαι εἰσίν (λήμμα γάρ). ἀλλὰ καὶ ἡ ΛΕ τῇ ΕΚ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΛΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΛΕ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΗΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΕ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΚΕ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΕ τῇ ὑπὸ ΓΒΚ· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΗΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΚ ἴση ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΗ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἴση ἐστίν.

7.780 ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΕΗ μετὰ τῆς ὑπὸ ΓΚΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΒ ἄρα μετὰ τῆς ὑπὸ ΓΚΗ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὥστε εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Β Κ Η σημείων. [Λήμμα χρήσιμον εἰς τὸ ἐπὶ τετραγώνων ποιούντων τὰ αὐτὰ τῷ ρόμβῳ.] ζ'. Ἐστω τετράγωνον τὸ ΑΔ, καὶ ἦχθω ἡ ΒΗΕ, καὶ αὐτῇ ὀρθῇ ἦχθω ἡ ΕΖ· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ ΗΕ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετραγώνῳ. Ἦχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΘ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΘ γωνία. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΗ γωνία ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΗ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΒΗ γωνία, τῇ ὑπὸ ΖΕΘ γωνία. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΘΕ γωνία ὀρθή τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἴση, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΕΘ τῇ ΒΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ. ἐπεὶ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ τετραγώνοις, ὦν τὸ ὑπὸ ΖΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΒΗ (ἐν κύκλῳ γάρ ἐστὶν τὰ Δ Ζ Ε Η σημεία), λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΕΗ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ τετραγώνῳ, τουτέστιν καὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΒΕΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΗ τετραγώνου τὸ ὑπὸ ΕΒΗ ἐστὶν μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΕΒΗ, τουτέστιν ὑπὸ ΖΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ ΗΕ.

7.782 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΒΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ ΗΕ, τουτέστιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΗΕ τετραγώνοις. Πρόβλημα ὡς Ἡράκλειτος. η'. Τετραγώνου ὄντος θέσει τοῦ ΑΔ ποιεῖν δοθεῖσαν τὴν ΕΖ νεύουσιν ἐπὶ τὸ Β. Γεγονέτω, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου τῇ ΒΕ ὀρθογώνιος ἦχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ ΖΕ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΗ τετραγώνῳ, δοθέντα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ ΖΕ (δοθέντα γὰρ ἑκάτερα τῷ μεγέθει), δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῷ μεγέθει· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΗ δέδοται τῷ μεγέθει. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· δέδοται ἄρα τῇ θέσει τὸ ἐπὶ τῆς ΒΗ ἡμικύκλιον. καὶ ἔρχεται διὰ τοῦ Ε· τὸ Ε ἄρα θέσει περιφερείας ἅπτεται. ἀλλὰ καὶ θέσει εὐθείας τῆς ΑΕ· δοθὲν ἄρα ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὸ Β ἐστὶν δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω τὸ μὲν τετράγωνον τὸ ΑΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Θ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ Θ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ τετράγωνον· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῆς ΔΓ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΗΔ ΔΒ μείζων ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΔΓ· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΒΗ ἡμικύκλιον γραφόμενον ὑπερπεσεῖται τὸ Γ σημείον. γεγράφθω, καὶ ἔστω τὸ ΒΚΕΗ, καὶ

ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΕΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ ΕΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΗΔ τετραγώνῳ.

7.784 τῷ δὲ ἀπὸ ΔΗ ἴσα ἐτέθη τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ Θ τετράγωνα· ἴσα ἄρα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ Θ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΕΖ, ὥστε ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ Θ τῷ ἀπὸ ΕΖ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ τῇ ΕΖ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνη. διήχθω γάρ τις καὶ ἐτέρα ἡ ΒΛ. εἰ δὴ καὶ ἡ ΒΛ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, ἔσται ἴση ἡ ΝΛ τῇ ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΖΒ τῆς ΝΒ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΛ ἐλάσσων ἔσται τῆς ΒΕ, ὅπερ ἄτοπον· ἔστιν γὰρ μείζων· οὐκ ἄρα ἡ ΒΛ ποιεῖ τὸ πρόβλημα· ἡ ΒΕ ἄρα μόνη. Ἵνα δὲ καὶ ἐπιγνῶμεν, ποτέρα αὐτῶν μείζων, δεῖξομεν οὕτως· ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΕ, ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΒΝ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΝΛ τῆς ΖΕ μείζων ἐστίν. καὶ φανερόν ὅτι αἰεὶ ἡ ἔγγιστα τοῦ Γ σημείου τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων. Λήμμα χρησίμων εἰς τὸν τοῦ Θ' προβλήματος διορισμόν, ὡς ἐν τοῖς ἀρχαίοις. Θ'. Ἐστω ἴση ἡ ΒΑ τῇ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅτι ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ΒΓ πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ σημείου διαγομένων εὐθειῶν. Διήχθω γάρ τις καὶ ἐτέρα ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ζ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΓΒ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, τουτέστιν ἡ Γ, τῆς ὑπὸ ΒΖΕ, δυνατόν ἐστιν τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴσην ἀπὸ τῆς Γ ἀφελεῖν. ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΓΗ γωνία· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΗ.

7.786 μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΔΗ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΖΔ τῆς ΔΒ, τουτέστιν τῆς ΔΓ, ἀλλὰ ἡ ΔΓ τῆς ΔΗ μείζων ἐστίν, μεγίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΔ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΔΗ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΖΔ ΔΒ ΔΓ ΔΗ, καὶ ἔστιν μεγίστη μὲν ἡ ΖΔ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΔΗ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῆς ΒΓ, ὥστε ἡ ΒΓ, ἐλάσσων οὕσα τῆς ΖΗ, πολλῶ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ΕΖ. ὁμοίως δεῖξομεν ὅτι καὶ πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ διαγομένων εὐθειῶν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΓ. Ἡ ΒΓ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ διαγομένων εὐθειῶν· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ἔγγιστα αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν. διήχθω γάρ τις καὶ ἐτέρα ἡ ΘΚ, καὶ τῇ Κ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΔΕΛ (δυνατόν γάρ). πάλιν δὲ μείζων ἡ μὲν ΚΔ τῆς ΖΔ, ἡ δὲ ΕΔ τῆς ΔΛ, ὥστε ὅλη ἡ ΚΛ μείζων ἐστὶν τῆς ΕΖ· πολλῶ ἄρα μείζων ἡ ΘΚ τῆς ΕΖ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΘΚ. ἐλάσσων μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ διαγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ἔγγιστα αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων. ι'. Τούτου ὄντος, φανερός ὁ διορισμός. ἐὰν γὰρ ἐκθώμεθα τὸν ῥόμβον τὸν ΑΒΓΔ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΑΔ ἀγάγω αὐτῇ ὀρθὴν τὴν ΕΖ συμπίπτουσιν ταῖς ΑΓ ΑΒ κατὰ τὰ Ε Ζ, δεῖ με διορίζεσθαι πότερον μεγίστη ἐστὶν ἢ ἐλάσσων πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ διαγομένων εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστὶν ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΔ ὀρθὴ ἡ ΕΖ, γέγονέ μοι ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ΕΑΖ ἴσην ἔχον τὴν ΕΑ τῇ ΑΖ.

7.788 διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον λήμμα γίνεται ἡ ΕΖ ἐλάσσων πασῶν τῶν διὰ τοῦ Δ διαγομένων εὐθειῶν, καὶ αἰεὶ ἡ ἔγγιον αὐτῆς τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων. Νεύσεων δεύτερον. α'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, διήχθω τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετοι αἱ ΑΔ ΒΕ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΗΕ. Εἰλήφθω τὸ τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἦχθω ἡ ΘΚ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ταῖς ΑΔ ΒΕ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ δὲ τρεῖς εἰσιν παράλληλοι αἱ ΑΔ ΘΚ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΕ. ὢν ἡ ΖΚ τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΖ λοιπῇ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ φανερόν ὅτι καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. β'. Ἐστω πάλιν ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἦχθω ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν αἱ ΑΕ ΒΖ· ὅτι πάλιν ἴση ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ. Ἐστω τὸ κέντρον τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ταῖς ΑΕ ΒΖ (γίνονται γὰρ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι). ἐπεὶ οὖν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΕ ΗΔ ΒΖ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ ε' πρόβλημα. γ'. Ἐστω δύο ἡμικύκλια ἐπὶ τῆς ΑΓ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ διήχθω ἡ ΒΓ· ὅτι ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶν τὰ ἡμικύκλια.

7.790

εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τῶν ἡμικυκλίων τὸ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΕΗ κάθετος ἦχθω ἡ ΘΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΗ. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΘΚ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ. ὦν ἡ ΕΚ τῇ ΚΗ ἴση ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ~ Φανερόν δὴ ὅτι καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΕΓ ἐστὶν ἴση. δ'. Ἔστω δὴ πάλιν τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἡμικύκλια, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἦχθω ἐφαπτομένη τοῦ ΔΕΖ ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσης οὕσης τῆς ΑΔ τῇ ΖΓ. Φανερόν ὅτι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον εἰσὶν τὰ ἡμικύκλια. εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τῶν ἡμικυκλίων τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ ΑΒ· ὁρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΕΗ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΓΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ ἔβδομον. ε'. Ἔστω πάλιν τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἡμικύκλια, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ, καὶ προσαναγεγράφθω ὁ μείζων κύκλος, καὶ διὰ τοῦ Ζ ἦχθω τις ἡ ΒΗ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΖΗ. Ἔστω τὸ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΒΗ κάθετος ἦχθω ἡ ΘΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΗ. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΕΔ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΔΕ ΘΚ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΘΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ.

7.792 ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΚ ὅλη τῇ ΚΗ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ὅπερ ~ Φανερόν ὅτι καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν. Εἰς τὸ θ'. ζ'. Ἔστω δύο ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΒΓ ἀπὸ τοῦ Η ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΚΘ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΚΕ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΔΛ τῇ ΛΖ, ὅλη ἄρα ἡ ΑΛ ὅλη τῇ ΛΗ ἴση ἐστίν. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ ΜΛ ΘΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΜΘ. ὦν ἡ ΕΜ τῇ ΜΚ ἴση ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΚΘ ἴση ἐστίν. Φανερόν δὴ ὅτι καὶ ἡ ΒΚ τῇ ΕΘ ἴση ἐστίν. ζ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐφαπτέσθω ἡ ΒΓ τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου· ὅτι πάλιν ἡ ΒΕ τῇ ΕΘ ἴση ἐστίν. Πάλιν εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΕ· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΒΓ. καὶ γεγόνασιν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ ΕΛ ΗΘ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΛΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΕΘ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ η'. η'. Ἔστω δύο ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΔ τῆς ΓΖ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΓΗ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΒΑΚΓ κύκλος, καὶ διήχθω τυχούσα ἡ ΒΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΘΚ.

7.794 Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΖ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΛΓ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΗΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΛ λοιπῇ τῇ ΛΗ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ τρεῖς παράλληλοι αἱ ΔΕ ΛΜ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ· ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΜ ὅλη τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. Φανερόν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΕΚ ἴση ἐστίν. Εἰς τὸ ιζ'. θ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω μείζων ἡ ΑΔ τῆς ΖΓ, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΒΓΘ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΚΘ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΕΚ κάθετος ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΔΛ τῇ ΛΖ, ὅλη ἄρα ἡ ΑΛ ὅλη τῇ ΛΗ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν πάλιν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΒΑ ΜΛ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΜΘ. ὦν ἡ ΕΜ τῇ ΜΚ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΚΘ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ~ Φανερόν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΒΚ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. ι'.

7.796 Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐφαπτέσθω ἡ ΒΓ τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΘ. Εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΕ· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΒΘ· ὥστε τρεῖς εἰσὶν παράλληλοι αἱ ΑΒ ΛΕ ΗΘ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΛ τῇ ΛΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΕΘ. Πρόβλημα χρησιμὸν εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ ιζ'. ια'. Θέσει ἡμικυκλίου ὄντος τοῦ ΑΒΓ, καὶ δοθέντος τοῦ Δ, γράψαι διὰ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὥς τὸ ΔΕΖ, ἵνα, ἐὰν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΒΓ, ἴση γένηται ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ. Γεγονέτω ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως ἐστίν, ἐὰν κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου ληφθῇ τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΗΕ, τὸ

ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΕΓ ἢ τῶν ἀπὸ ΕΗ ΗΓ ἐστὶν ὑπεροχή· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἢ ΑΘ, καὶ τετμήσθω ἡ ΔΓ δίχα κατὰ τὸ Κ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΗΘ πρὸς λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΗΔ, ἐστὶν [ὡς εἷς τῶν λόγων] ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν, τουτέστιν πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΔΓ ΗΚ.

7.798 κείσθω οὖν τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ ἴσον τὸ δις ὑπὸ ΔΓ Λ, δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ ΑΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ ΔΓ Λ, ὥστε καὶ τὸ ἅπαξ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ Λ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν τὸ δις ὑπὸ Λ ΔΓ, πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΔΓ ΗΚ, τουτέστιν ἡ Λ πρὸς ΗΚ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον τῷ ὑπὸ Λ ΗΔ. καὶ εἰσὶν αἱ τρεῖς αἱ ΘΔ ΔΚ Λ δοθεῖσαι· ἀπῆκται ἄρα εἰς διωρισμένης α' δεδομένων τριῶν εὐθειῶν τῶν ΘΔ ΔΚ Λ τεμῖν τὴν ΔΚ κατὰ τὸ Η, καὶ ποιεῖν λόγον τοῦ ὑπὸ ΘΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ ΗΔ ἴσου πρὸς ἴσον. τοῦτο δὲ φανερόν, καὶ ἔστιν ἀδιόριστον. δοθὲν ἄρα τὸ Η, καὶ κέντρον τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου· θέσει ἄρα τὸ ἡμικύκλιον. καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Γ ἦκται ἐφαπτομένη ἡ ΒΓ· θέσει ἄρα ἡ ΒΓ [τὸ δ' αὐτὸ ἀρμόσει τοῦ σημείου κάτω], ὅπερ ~ ιβ'. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω τὸ μὲν ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Δ· καὶ θέον ἔστω ποιεῖν τὸ πρόβλημα. κείσθω τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ ἴσον τὸ δις ὑπὸ ΔΓ Λ, καὶ τῇ μὲν ΔΑ ἴση κείσθω ἢ ΑΘ, ἡ δὲ ΔΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΘΔ ΔΚ Λ, τετμήσθω ἡ ΔΚ κατὰ τὸ Η καὶ ποιείτω λόγον τοῦ ὑπὸ Λ ΗΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσου πρὸς ἴσον, καὶ περὶ κέντρον τὸ Η ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

7.800 Ἦχθω γὰρ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου ἡ ΒΓ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΘΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ Λ ΗΔ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν ΗΚ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστιν ἡ τῶν ἀπὸ ΗΑ ΑΔ ὑπεροχή πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἐστὶν τὸ δις ὑπὸ Λ ΔΓ πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΔΓ ΗΚ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῶν ἀπὸ ΗΑ ΑΔ ὑπεροχή πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ὑπεροχήν, τουτέστιν πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΓΗ ΗΕ ὑπεροχήν, τουτέστιν πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΕ, ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ. καὶ φανερόν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΕΓ. ἔχομεν γὰρ ὡς τὴν ΘΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ· μείζων δὲ ἡ ΘΗ τῆς ΗΔ· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ τοῦ ἀπὸ ΕΓ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΕΓ· πολλῷ ἄρα τῆς ΖΓ μείζων ἐστὶν· τὸ ΔΕΖ ἄρα ἡμικύκλιον ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

7.802 Λέγω δὲ ὅτι καὶ μόνον. γεγράφθω γάρ τι καὶ ἕτερον ΔΜΝ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΓΜΞ. εἰ δὴ καὶ τὸ ΔΜΝ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΜΞ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΔΜΝ ἡμικυκλίου τὸ Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΜ. ἔσται ἀκολουθῶς τῇ ἀναλύσει τὸ ὑπὸ τῶν ΘΟΚ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν Λ ΔΟ, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον (ἐν γὰρ τῇ διωρισμένῃ δέδεικται μείζον)· οὐκ ἄρα τὸ ΔΜΝ ἡμικύκλιον ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ ΔΕΖ· τὸ ΔΕΖ ἄρα μόνον ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Ἵνα δὲ καὶ ἐπιγνῶμεν πότερον αὐτῶν μείζον ἀποτεμένει, δεῖξομεν οὕτως, ἐπεὶ ἐν τῇ διωρισμένῃ δέδεικται ἔλασσον τὸ ὑπὸ τῶν Λ ΔΟ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΟΚ, ἀνάλογον ἡ Λ πρὸς ΟΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΟ πρὸς ΟΔ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Λ πρὸς ΚΟ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΟ ΟΓ ὑπεροχήν (δέδεικται γάρ), ὡς δὲ ἡ ΘΟ πρὸς ΟΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ τῶν ἀπὸ ΟΑ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ· καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΔΟ ΟΓ ὑπεροχήν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ τῶν ἀπὸ ΟΑ ΑΔ ὑπεροχή πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ.

7.804 καὶ πάντα πρὸς πάντα, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΓ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὴν τῶν ἀπὸ ΓΟ ΟΔ ὑπεροχὴν, τουτέστιν πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΜ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΜ τῆς ΑΔ. Ὁμοίως δὲ δεῖξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ μεταξὺ τῶν Α Β σημείων γινόμεναι εὐθεῖαι μείζονες εἰσιν τῆς ΑΔ, αἱ δὲ μεταξὺ τῶν Β Γ ἐλάσσονες. ἐὰν γὰρ πάλιν γράψωμεν ἡμικύκλιον τὸ ΔΠΡ, καὶ ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΣΠΓ, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευασθῇ, τὸ μὲν κέντρον ἔσται τοῦ ΔΠΡ ἡμικυκλίου τὸ Τ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη τοῦ Η· ἐν δὲ τῇ διωρισμένη μείζον ἔσται τὸ ὑπὸ ΘΗΚ τοῦ ὑπὸ ΘΤΚ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων ἔσται πάλιν ἡ ΑΔ τῆς ΣΠ, ὥστε τὰ μὲν ἔγγιστα τοῦ Α τὰς ἐφαπτομένας ἔχοντα μείζω ποιεῖ τῆς ΑΔ, τὰ δὲ ἀπώτερον ἐλάσσω. Δυνατὸν ἄρα ἐστὶν γράψαι διὰ τοῦ Δ ἡμικύκλια, ἵνα ἡ ἐφαπτομένη ἐκάστου αὐτῶν προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὴν τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς τοῦ μείζονος ἡμικυκλίου περιφέρειας ἴσην ποιῇ τῇ ΑΔ, καὶ πάλιν μείζω καὶ ἐλάσσω. Εἰς τὸ ιθ'.

7.806 ιγ'. Ἐστω πάλιν τὰ ἡμικύκλια, μείζων δ' ἡ ΑΔ τῆς ΓΖ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΓΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΒΕΖ ἀπὸ τοῦ Η ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΑΒΓ κύκλος, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΖ ἐπὶ τὸ Κ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΕΚ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΚ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΛΓ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΗΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΛ λοιπῇ τῇ ΛΗ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΔΕ ΛΜ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΜ ὅλη τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. φανερόν οὖν ὅτι καὶ ἡ ΒΘ τῇ ΕΚ, ὅπερ ~ Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. ιδ'. Ἠμικυκλίου ὄντος τοῦ ΑΒΓ, καὶ σημείου τοῦ Δ, γράψαι ἐπὶ τῆς ΑΓ διὰ τοῦ Δ ἡμικύκλιον, ἵνα, ἐὰν ἐφαπτομένη ἀχθῇ ἡ ΖΒ, ἴση ᾗ ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ. Γεγονέτω. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ἀπὸ ΖΒ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΑΖΓ. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΓ παραβάλωμεν ἑλλειπὸν τετραγώνω, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ, καὶ ἀγάγω ὀρθὴν τὴν ΖΒ, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ ἡμικύκλιον γράψω τὸ ΔΕΖ, ἐφάπτεται ἡ ΒΖ τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἔσται ἴση τῇ ΑΔ.

7.808 τοῦτο δὲ γίνεται, ὁπότεν ἡ ΑΔ ἐλάσσων ᾗ ἡ ἡμίσεια τῆς ΑΓ. Εὐρημένον δὲ τούτου, ἐὰν διὰ τοῦ Δ ἔτερα ἡμικύκλια γράψω, ὡς τὰ ΔΗΘ ΔΚΛ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἀχθῶσιν αἱ ΘΜ ΛΝ, ἔσται ἡ μὲν ΘΜ μείζων τῆς ΑΔ, ἡ δὲ ΛΝ ἐλάσσων. [ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ ἐλάσσων ἐστίν, ἡ ΘΜ ἄρα ἔσται μεταξὺ τῶν Δ Γ. ἐπὶ μὲν οὖν τὸ Ζ οὐ πεσεῖται, ἐπεὶ συμβήσεται ἴσην γίνεσθαι τὴν ΑΔ τῇ ΖΓ, ὅπερ ἄτοπον, μεταξὺ δὲ τῶν Γ Ζ πολλῶ μᾶλλον οὐκ ἔστιν, ἐπεὶ πάλιν συμβαίνει ἐλάσσονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΖΓ, ὅπερ ἄτοπον (ἔστιν γὰρ καὶ μείζων, ὡς ἐν τῷ ἐξ ἀρχῆς ὑπόκειται προβλήματι)· ἔσται ἄρα μεταξὺ τῶν Ζ Δ τὸ Θ. μείζον δὲ τὸ ὑπὸ ΑΘΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΜΘ, τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΖΒ· μείζον ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ, ὥστε μείζων ἡ ΘΜ τῆς ΑΔ. ἡ δὲ ΛΝ μεταξὺ τῶν Γ Ζ. ἐπειδὴ ἑλάσσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΛΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ (ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΓ), ἑλάσσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΛΝ τοῦ ἀπὸ ΑΔ, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΛΝ τῆς ΑΔ. ὁμοίως καὶ πᾶσαι αἱ ἐπὶ ταύτῃ ὡς πρὸς τὸ Γ ἡγμέναι εὐθεῖαι.] καὶ καθόλου προσιόντων μὲν τῶν ἡμικυκλίων τῷ Γ σημείῳ ἡ ἐφαπτομένη ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ΑΔ, ἀποχωρούντων δὲ ἀεὶ μείζων· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΑΓ, μένοντος τοῦ Δ, ἡμικύκλια γράψαι, ἵνα ὅτε μὲν αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἴσαι ᾦσιν τῇ ΑΔ, ὅτε δὲ μείζονες, ὅτε δὲ ἐλάσσονες. Εἰς τὸ κα'.

7.810 ιε'. Ἐστω ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΖΒ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΒ τῇ ΚΕ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΖ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΗΑ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, ὅλη ἄρα ἡ ΗΛ ὅλη τῇ ΛΔ ἴση ἐστίν. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΗΘ ΛΜ ΔΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΘΜ τῇ ΜΕ. ὦν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΒ τῇ ΚΕ ἴση ἐστίν, ὅπερ ~ Φανερόν δὲ ὅτι καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΒΕ ἴση ἐστίν. ις'. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐφαπτέσθω ἡ ΒΖ

κατὰ τὸ Β· ὅτι πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΘΒ τῇ ΒΕ. Εἰλήφθω γὰρ πάλιν τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Β ἐπεζεύχθω ἡ ΚΒ· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἐν τρισὶν παραλλήλοις ταῖς ΗΘ ΒΚ ΔΕ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΔ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΒΕ, ὅπερ· ~ Εἰς τὸ κγ'. ιζ'. Ἐστω τὰ ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ τῇ ΓΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΕΘ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΒ τῇ ΚΔ. Εἰλήφθω τὸ τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου κέντρον τὸ Λ, καὶ κάθετος ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ.

7.812 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΗΑ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, ὅλη ἄρα ἡ ΗΛ ὅλη τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΗΘ ΛΜ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΘΜ τῇ ΜΔ· ὣν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΒ λοιπὴ τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση [κἂν ἐφάπτεται, φανερόν· ἡ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπιζευχθεῖσα ἐπὶ τὴν ἀφῆν], ὅπερ· ~ Εἰς τὸ κδ'. ιη'. Ἐστω δύο ἡμικύκλια ὡς τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, καὶ διήχθω ἡ ΖΒ· ὅτι γίνεται ἴση καὶ ἡ ΒΕ τῇ ΕΗ. Ἐστὶν δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΕ, γίνεται ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία διὰ τὸ ἐν ἡμικυκλίῳ εἶναι. καὶ ἔστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ ἡ ΔΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ· ~ Εἰς τὸ κε'. ιθ'. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω μείζων ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ, καὶ τῇ ΔΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΗ, καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΖ ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΕΚ. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ, τὸ ἄρα κέντρον τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου ἐστὶ μεταξὺ τῶν Α Δ.

7.814 ἔστω τὸ Λ, καὶ πάλιν κάθετος ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΛ λοιπὴ τῇ ΛΔ ἴση ἐστίν. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΗΘ ΛΜ ΔΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΜ τῇ ΜΕ. ἦν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΜ ὅλη τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΘ λοιπὴ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Εἰς τὸ κς'. κ'. Ἐστω ἡ ΑΔ ἐλάσσων τῆς ΔΓ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΓΗ, καὶ κάθετος ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΚΘ. Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ, τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου τὸ κέντρον ἐστὶ μεταξὺ τῶν Δ Η. ἔστω τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΗ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΛ λοιπὴ τῇ ΛΗ ἴση ἐστίν. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΔΕ ΛΜ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΜ ὅλη τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ λοιπὴ τῇ ΚΘ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Εἰς τὸ κθ'. κα'. Ὦντων δύο ἡμικυκλίων τῶν ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ μείζονος οὔσης τῆς ΑΔ τῆς ΔΓ, ἐὰν τῇ ΔΓ ἴση τεθῇ ἡ ΑΗ, καὶ διαχθείσης τῆς ΖΒ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἀχθῇ ἡ ΗΘ, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΒ τῇ ΚΕ.

7.816 Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΖ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΛΓ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΔΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΛ λοιπὴ τῇ ΛΔ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΗΘ ΛΜ ΔΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ τῇ ΜΕ. ὣν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΒ λοιπὴ τῇ ΚΕ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Φανερόν ὡς καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Εἰς τὸ λα'. κβ'. Ἐστω τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἡμικύκλια, καὶ πάλιν ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΔ τῆς ΔΓ, καὶ διήχθω ἡ ΖΕΒ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΓΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΖΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΚΘ. Φανερόν γὰρ ὅτι ἡ ΗΘ οὔτε ἐπὶ τὸ Κ πίπτει οὔτε μεταξὺ τῶν Ζ Κ. ἐὰν τὸ κέντρον ληφθῇ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΖ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΛΜ, ἔσται ἴση ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ. ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ τρεῖς εἶναι παραλλήλους τὰς ΔΕ ΛΜ ΗΘ ἴση γίνεται ἡ ΕΜ τῇ ΜΚ (ἴση γὰρ ἡ ΔΛ τῇ ΛΗ). εἴη ἂν καὶ ἡ ΒΜ τῇ ΜΕ ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπὶ τὸ Κ πίπτει. πολλῶ δὲ μᾶλλον ὅτι οὐδὲ μεταξὺ τῶν Ζ Κ [τῶν] ἐκτὸς ἄρα.

7.818 ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΛΓ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΗΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΛ λοιπὴ τῇ ΛΗ ἴση ἐστίν. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΔΕ ΛΜ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ. ὣν ἡ ΒΜ τῇ ΜΚ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ λοιπὴ τῇ ΚΘ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Φανερόν δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΚ τῇ ΒΘ ἐστὶν ἴση. Εἰς τὸ λδ'. κγ'. Ἐστω τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἡμικύκλια, μείζων ἔστω ἡ ΔΓ τῆς ΓΖ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΔΕΖΚ κύκλος, διήχθω ἡ ΒΓΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΒΘ κάθετος ἦχθω [φανερόν ὅτι ἐκτὸς πίπτει τοῦ κύκλου· παράλληλος γὰρ γίνεται τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ ὑποπίπτει, καὶ ἡ ΗΘ ἄρα ὑποπίπτει. ἔστω] ἡ ΗΘ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΘΚ. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΖ, τὸ τοῦ ΔΕΖ ἡμικυκλίου κέντρον μεταξὺ ἐστὶν τῶν Δ Γ. ἔστω τὸ Λ, καὶ κάθετος ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν

ή μὲν ΑΔ τῇ ΖΗ, ή δὲ ΔΛ τῇ ΛΖ, ὅλη ἄρα ή ΑΛ ὅλη τῇ ΛΗ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ ΛΜ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ή ΒΜ τῇ ΜΘ. ὦν ή ΕΜ τῇ ΜΚ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ή ΒΕ λοιπῇ τῇ ΚΘ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Φανερόν ὡς καὶ ή ΒΚ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. κδ'. Ἔστω πάλιν τὰ ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ μείζων ή ΔΓ τῆς ΓΖ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ή ΖΗ, καὶ προσαναπεπληρώσθω ὁ ΔΕΖΚ κύκλος, καὶ διήχθω ή ΕΒΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἦχθω ή ΗΘ [φανερὸν δὲ ὅτι ἐντὸς πίπτει τοῦ κύκλου, ἐπεὶ καὶ ή παράλληλος αὐτῇ ή ΑΒ ἐντός]· δεῖξαι ὅτι ἴση ἐστὶν ή ΕΒ τῇ ΘΚ.

7.820 Ἔστω τὸ κέντρον τὸ Λ, καὶ πάλιν κάθετος ή ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ή ΕΜ τῇ ΜΚ. ἐπεὶ δὲ ἐν τρισὶ παραλλήλοις ταῖς ΑΒ ΛΜ ΗΘ ἴση ἐστὶν ή ΑΛ τῇ ΛΗ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ή ΒΜ τῇ ΜΘ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ή ΕΜ ὅλη τῇ ΜΚ ἴση· λοιπὴ ἄρα ή ΕΒ λοιπῇ τῇ ΚΘ ἐστὶν ἴση, ὅπερ· ~ Τὸ πρῶτον τῶν νεύσεων ἔχει προβλήματα θ', διορισμοὺς τρεῖς· καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες ὃ τε κατὰ τὸ πέμπτον καὶ ὁ κατὰ τὸ ζ' πρόβλημα καὶ ὁ κατὰ τὸ θ'. τὸ δεύτερον νεύσεων ἔχει προβλήματα με', διορισμοὺς τρεῖς, τὸν τε κατὰ τὸ ιζ' πρόβλημα καὶ τὸν κατὰ τὸ ιθ' καὶ τὸν κατὰ τὸ κγ'· καὶ εἰσὶν οἱ τρεῖς ἐλάσσονες. Ἐπαφῶν πρῶτον. Εἰς τὸ ε' πρόβλημα. α'. Δύο παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ κύκλος ἐφαπτέσθω ὁ ΕΖ κατὰ τὰ Ε Ζ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθω ή ΕΖ· ὅτι διάμετρος ἐστὶν τοῦ ΕΖ κύκλου. Εἰλήφθω σημεία ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ Η Θ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΗ ΗΖ ΕΘ ΘΖ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ή ΑΕ τέμνει δὲ ή ΕΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ή ὑπὸ ΑΕΖ γωνία τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ. διὰ ταῦτα καὶ ή ὑπὸ ΔΖΕ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΕΗΖ ἐναλλάξ· καὶ ή ὑπὸ ΕΘΖ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία.

7.822 καὶ εἰσὶν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν, ὥστε ἡμικύκλιόν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΘΖ ΕΗΖ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ή ΕΖ τοῦ ΕΖ κύκλου, ὅπερ· ~ β'. Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτοῦ αἱ ΒΓ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ή Γ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· ὅτι ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ ΑΒΔ κύκλου. Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΑΕ ΔΒ ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ή ΑΓ τέμνει δὲ ή ΓΔ, τὸ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΓΑ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ή ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία. διὰ ταῦτα καὶ ή ὑπὸ ΔΒΓ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶν ή ὑπὸ ΒΓΔ γωνία· καὶ ή ὑπὸ ΔΑΕ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΔΒΕ γωνία, ὥστε ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ή ΔΕ τοῦ ΑΒΔ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΓΔ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ ΑΒΔ κύκλου. Εἰς τὸ ιβ'. γ'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ ΑΒ ΒΓ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ διήχθω ή ΑΒΓ, ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου κέντρον· ὅτι καὶ τὸ τοῦ ΒΓ κύκλου κέντρον ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΑΒΓ. Ἦχθω γὰρ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἐφαπτομένη ή ΔΒΕ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ή ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· καὶ ή ἐφεξῆς ἄρα ή ὑπὸ ΔΒΓ ἐστὶν ὀρθή. καὶ ἐφάπτεται ή ΔΕ τοῦ ΒΓ κύκλου· τὸ ἄρα κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΑΒΓ ὁμοίως ὡς καὶ τοῦ ΑΒ.

7.824 Ἄλλως. δ'. Ἔστωσαν πάλιν αἱ ΑΒ ΒΓ κύκλων διάμετροι· ὅτι οἱ ΑΒ ΒΓ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἦχθω πάλιν ἐφαπτομένη [ή] τοῦ ΑΒ κύκλου ή ΔΕ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ή ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, καὶ ἐφεξῆς ή ὑπὸ ΔΒΓ γωνία ὀρθή ἐστὶν. καὶ ἔστιν τοῦ ΒΓ κύκλου κέντρον ἐπὶ τῆς ΒΓ· ή ΔΕ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓ κύκλου· ἀλλὰ καὶ τοῦ ΑΒ κατ' αὐτὸ τὸ Β· καὶ ὁ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β σημεῖον [ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς]. ε'. Δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ ΑΒ ΒΓ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ διήχθω ή ΑΓΒ, ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τὸ κέντρον τοῦ ΑΒ κύκλου· ὅτι καὶ τοῦ ΒΓ τὸ κέντρον ἐστὶν ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἦχθω ἐφαπτομένη τῶν κύκλων ή ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἐφαπτομένη ή ΔΕ τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ διὰ τοῦ κέντρου ή ΑΒ, ὀρθή ἐστὶν ή ὑπὸ ΔΒΑ γωνία. καὶ ἦκται ἀπὸ τῆς ἀφῆς ή ΒΓ· ἐπὶ τῆς ΒΓ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ ΒΓ κύκλου. Φανερόν δὲ καὶ οὕτως· εἰ γὰρ διαχθείη ή ΒΖΗ, καὶ ἐπιζευχθείησαν αἱ ΓΖ ΑΗ, γένοιτο ἂν ἴση ή ὑπὸ ΕΒΓ γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ τῶν ΒΖΓ ΑΗΒ γωνία. καὶ ἔστιν ὀρθή ή ὑπὸ ΑΗΒ γωνία· ὀρθή ἄρα ἐστὶν καὶ ή ὑπὸ ΒΖΓ γωνία, ὥστε ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ κέντρον ἐστὶν τοῦ ΒΓ.

7.826 καὶ ὁμοίως, κᾶν τοῦ ΒΓ δοθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ, δεῖξομεν ὅτι καὶ τοῦ ΑΒ. ζ'. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν διάμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ· ὅτι οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. Ἦχθω τοῦ ΑΒ κύκλου ἐφαπτομένη

εὐθεῖα ἡ ΔΒΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία. καὶ ἔστιν διάμετρος ἡ ΒΓ· ἡ ΔΕ ἄρα ἐφαπτομένη τοῦ ΒΓ κύκλου κατὰ τὸ Β σημεῖον. [εἰ γὰρ ἐκβληθεῖν ἡ ΓΖ ἐπὶ τὸ Δ, γένοιτο ἂν τὸ ὑπὸ ΓΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διὰ τὸ ὀρθὴν γίνεσθαι τὴν πρὸς τῷ Ζ γωνίαν, οὔσης τῆς πρὸς τῷ Β ὀρθῆς.] ἀλλὰ γὰρ καὶ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β· καὶ ὁ ΑΒ ἄρα κύκλος τοῦ ΒΓ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β [ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς]. Εἰς τὸ ιζ'. ζ'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων οἱ ΑΒΓ ΔΕΒ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Β διήχθωσαν αἱ ΓΒΔ ΑΒΕ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΕ· ὅτι παράλληλοι αἱ ΑΓ ΔΕ. Ἦχθω γὰρ τῶν κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ κατὰ τὸ Β σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΖ τέμνει δὲ ἡ ΒΑ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. διὰ ταῦτά δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΕΒΗ γωνία· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΕΔΒ γωνία. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ, ὅπερ ~ η'.

7.828 Κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Α διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν Β γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία· ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΔΕ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κατὰ τὸ Α σημεῖον. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΓ διὰ τοῦ κέντρου ἐστίν, φανερόν ἔσται· γίνεται γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν Β γωνίαν εἶναι ὀρθήν· τοῦτο δὲ προδεδεικται. εἰ δὲ μή, ἔστω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΗ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΑΓ γωνία ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ΗΒΓ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΑΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΗ. καὶ ἔστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΖΑ· ἐφαπτομένη ἄρα ἡ ΔΕ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· τοῦτο γὰρ προέγραπται. θ'. Τούτου ὄντος ἀνάστροφον τοῦ πρὸ αὐτοῦ. παραλλήλου οὔσης ΑΓ τῇ ΔΕ, δεῖξαι ὅτι ἐφαπτόμενοι οἱ ΑΒΓ ΔΕΒ ἀλλήλων κατὰ τὸ Β σημεῖον. Ἦχθω πάλιν τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ Γ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἡ δὲ Γ τῇ Δ ἐναλλάξ ἴση ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ Δ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΔΒΕ κύκλου. ἀλλὰ καὶ τοῦ ΑΒΓ κατὰ τὸ Β· καὶ ὁ ΑΒΓ ἄρα κύκλος τοῦ ΒΔΕ κύκλου ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β σημεῖον.

7.830 Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. ι'. Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ δύο δοθέντων τῶν Δ Ε, ἀπὸ τῶν Δ Ε ἂν κλασθῇ ἡ ΔΒΕ καὶ ἐκβληθῇ, ποιεῖν παράλληλον τὴν ΑΓ τῇ ΔΕ. Γεγονέτω καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΑ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία. ἀλλὰ ἡ Γ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΑΕ (ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει)· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΕ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Δ Ζ σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΖΕΔ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ (ἴσον γὰρ ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης)· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΖ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἀπὸ δὴ δεδομένου σημείου τοῦ Ζ θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἦκται ἡ ΖΑ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ Ζ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθὲν ἄρα τὸ Β σημεῖον. ἔστιν δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Δ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΔΒ ΒΕ τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ Δ Ε. κείσθω τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς ΔΕ καὶ ἄλλης τινὸς τῆς ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ.

7.832 Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΖΕΔ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Δ Ζ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΕ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΕ. Εἰς τὸ ιζ'. ια'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓ

ΑΔΕ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ διήχθωσαν ἀπὸ τοῦ Α εὐθεῖαι αἱ ΑΔΒ ΑΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ ΒΓ· ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΔΕ ΒΓ. Ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ἀπὸ ΖΑΒ γωνία ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΒ ΑΕΔ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΑΕΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. Ἀλλὰ παράλληλος ἔστω ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ· ὅτι ἐφάπτονται οἱ ΑΒΓ ΑΔΕ κύκλοι ἀλλήλων. Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνία τῇ Γ γωνία.

7.834 ἀλλὰ ἡ Γ γωνία ἴση ἐστὶν τῇ Ε· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΔ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε γωνία, ὥστε ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ τοῦ ΑΔΕ κύκλου (τοῦτο γὰρ προδεδείκται)· οἱ ΑΒΓ ΑΔΕ ἄρα κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Α σημεῖον. Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. ιβ'. Θέσει ὄντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ δύο δοθέντων τῶν Δ Ε, κλᾶν τὴν ΔΑΕ καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν ΒΓ τῇ ΔΕ. Γεγονέτω· καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐφαπτομένη ἦχθω ἡ ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΖ τέμνει δὲ ἡ ΒΓ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΓ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΖΒ, τῇ Α· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Α Β Ζ Ε σημεῖα· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ (ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης)· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστιν δοθέν τὸ Δ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἀπὸ δὲ δοθέντος σημείου τοῦ Ζ [τῇ] θέσει [δὲ] δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΖΒ· δέδοται ἄρα ἡ ΖΒ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος θέσει· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ.

7.836 θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν ΔΑ ΑΕ τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὰ δὲ δοθέντα σημεῖα τὰ Δ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΒΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Ζ Ε σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ (ἐφάπτεται γὰρ ἡ ΒΖ τέμνει δὲ ἡ ΒΓ), τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ. Πρόβλημα εἰς τὸ ιη'. ιγ'. Θέσει δοθέντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν Δ Ε, ἀπὸ τῶν Δ Ε κλᾶν τὴν ΔΑΕ καὶ ποιεῖν τῇ ΔΕ παράλληλον τὴν ΒΓ. Γεγονέτω· καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Β τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΒΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΑ γωνία τῇ Γ, τουτέστιν τῇ Ε· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Β Ζ Α Ε σημεῖα· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΖΔΕ.

7.838 δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ (ἀπὸ γὰρ δοθέντος τοῦ Δ εἰς θέσει δεδομένον κύκλον διῆκται ἡ ΑΔΒ)· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΔΕ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΔ. καὶ ἔστιν δοθέν τὸ Δ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἀπὸ δὲ δεδομένου σημείου τοῦ Ζ θέσει δεδομένου κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΖΒ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΒ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ Β σημεῖον. ἀλλὰ καὶ τὸ Δ δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. θέσει δὲ καὶ ὁ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶν τὸ Α σημεῖον. ἔστιν δὲ καὶ ἐκάτερον τῶν Δ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν ΔΑ ΑΕ τῇ θέσει. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν τῇ θέσει δεδομένος κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὰ δὲ δοθέντα δύο σημεῖα τὰ Δ Ε, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΑΔΒ, καὶ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἦχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΑ γωνία τῇ πρὸς τῷ Ε (ἐν κύκλῳ γὰρ ἐστὶν τὰ Α Ζ Β Ε σημεῖα), ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΑ ἴση ἐστὶν τῇ Γ (ἐφάπτεται γὰρ καὶ τέμνει), καὶ ἡ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ Ε· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ, ὅπερ ~ Πρόβλημα εἰς τὸ ιθ'.

7.840. (1n) ιδ'. Θέσει ὄντος τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ δύο δοθέντων τῶν Δ Ε, κλᾶν ἀπ' αὐτῶν τὴν ΔΑΕ, ὥστε παράλληλον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΔΕ. Γεγονέτω· καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΒΖ. γίνεται οὖν πάλιν ἐν κύκλῳ τὰ Α Ζ Β Ε σημεῖα, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΔΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει. καὶ ἔστιν δοθέν τὸ

Δ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Ζ, ὥστε θέσει ἡ ΒΖ. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος· δοθέν ἄρα ἐστὶ τὸ Β. ἀλλὰ καὶ τὰ Δ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΑ ΑΕ. ὁμοίως γὰρ τοῖς πρότερον δείξομεν, καὶ ὁμοίως ἡ σύνθεσις τῷ πρὸ αὐτοῦ. Εἰς τὸ κδ'. ιε'. Ἀπτεσθωσαν δύο κύκλοι ἀλλήλων οἱ ΑΒ ΒΓ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα αὐτῶν τὰ Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΒ ΓΕ ΕΒ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΑΔ τῇ ΓΕ· ὅτι εὐθεῖαί εἰσιν αἱ διὰ τῶν Δ Β Ε, Α Β Γ. Ἦχθω γὰρ τῶν ΑΒ ΒΓ κύκλων ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ ΖΗ, ἐκ δὲ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΔΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒΖ γωνία. διὰ ταῦτα καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΕ γωνία ἐστὶν ὀρθή· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Δ Β Ε.

7.842 ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΔΒ, ἡ δὲ ΕΓ τῇ ΕΒ, ἔστιν ὥς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΕΒ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς Δ Ε αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΕ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΔΒΕ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ διὰ τῶν Α Β Γ, ὅπερ ~ Εἰς τὸ κε'. ιζ'. Ἰσης οὔσης τῆς μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, τῆς δὲ ΑΔ τῇ ΔΕ, καὶ παραλλήλου οὔσης τῆς ΔΕ τῇ ΒΓ, δεῖξαι ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Ε Γ σημείων. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΓ, καὶ τῇ ΑΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ ὅλη τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ παράλληλος καὶ ἡ ΓΕ ἄρα τῇ ΒΖ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ παράλληλός ἐστιν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓ· τοῦτο γὰρ φανερόν. Ἐπαφῶν δεύτερον. Εἰς τὸ λα'. ιζ'. Ἐὰν ᾗ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ δύο προβληθῶσιν αἱ ΒΔ ΔΓ ἴσαι οὔσαι, ἡ δὲ ΒΔ ἐφάπτεται, ὅτι καὶ ἡ ΔΓ ἐφάπτεται. Τοῦτο δὲ φανερόν· ἂν γὰρ διαχθῇ ἡ ΔΑ, τὸ ὑπὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΔΒ τῷ ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστίν· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΕ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΓ· ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΔΓ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

7.844 ιη'. Δύο κύκλοι οἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Β διήχθω τις ἡ ΑΒΓ, καὶ δύο παράλληλοι αἱ ΑΔ ΕΓ νεύουσαι ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων· ὅτι οἱ ΑΒ ΒΓ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ Β σημεῖον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΒΕ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Δ Β Ε· παράλληλος γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΕ. καὶ ἔστιν ὥς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς ΕΒ, καὶ γίνεται δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν Α τῇ Γ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς Δ Ε τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶν τὰ τρίγωνα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΕ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΑΒΓ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΔΒΕ. ἐπεὶ δὲ εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν κέντρων καὶ τῆς ἀφῆς, ἐφάπτονται ἄρα οἱ ΑΒ ΒΓ κύκλοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Β σημεῖον. Εἰς τὸ νβ'. ιθ'. Ἐστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΓΔ παράλληλος, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, οὔσης ἀμβλείας μὲν τῆς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ, ὀξείας δὲ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ· ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστιν τὸ ΑΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἀμβλεία μὲν ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, αἱ ἀπὸ τῶν Α Β ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετοι ἀγόμεναι ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Α ἐκτὸς τοῦ Γ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐντὸς τοῦ Δ πίπτουσιν· καὶ ἔστωσαν αἱ ΑΕ ΒΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ.

7.846 ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ παράλληλος, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε Ζ σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΔ τῇ ΕΓ, ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση. κ'. Δύο ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ διὰ τῶν κέντρων ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἐκβληθεῖσα τέμνει καὶ τὸν ΑΒ κύκλον. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Η Θ, καὶ ἀπὸ τῶν Η Θ σημείων τῇ ΑΔ ὀρθαὶ ἦχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ. ἀλλὰ καὶ παράλληλος καὶ ἡ ΚΛ ἄρα τῇ ΗΘ ἴση ἐστὶν καὶ παράλληλος, ὥστε ὀρθαὶ εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Κ Λ γωνίαι. καὶ εἰσὶν ἐκ τῶν κέντρων αἱ ΗΚ ΘΛ· ἡ ΚΛ ἄρα ἐφάπτεται τῶν κύκλων. φανερόν οὖν ὅτι ἡ τοῦ ΓΔ ἐφαπτομένη καὶ τοῦ ΑΒ ἐφάπτεται· ἡ ἄρα τὸν ΓΔ τέμνουσα ἡ ΕΖ καὶ τὸν ΑΒ τέμνει ἐκβληθεῖσα (ἐπεὶ καὶ μεταξὺ τῶν Β Λ ἔσται, ὥς ἡ ΕΖ τῶν Γ Κ ἐστὶν μεταξύ). κα'. Ἐστω ἴση ἡ μὲν ΔΑ τῇ ΑΕ, μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· ὅτι ἐκβληθεῖσα ἡ ΔΕ συμπίπτει

τῇ ΒΓ. Κείσθω τῇ ΓΕ ἴση ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΔΕ, καὶ συμπίπτει τῇ ΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα συμπίπτει τῇ ΒΓ.

7.848 Πρόβλημα εἰς τὸ αὐτό. κβ'. Θέσει ὄντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ τριῶν δοθέντων σημείων τῶν Δ Ε Ζ ἐπ' εὐθείας, κλᾶν τὴν ΔΑΕ καὶ ποιεῖν ἐπ' εὐθείας τὴν ΒΓ τῇ ΓΖ. Γεγονέτω καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΔΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία, τουτέστιν ἡ Α, τῇ ὑπὸ ΓΘΖ γωνίᾳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΕΘ. δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΕΓ (ἴσον γὰρ τῷ ἀπὸ τῆς ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένης)· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καὶ ἔστιν δοθέν τὸ Ε· δοθέν ἄρα καὶ τὸ Θ. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Ζ δοθέν· γέγονεν δὴ μοι ἀπὸ δύο δοθέντων τῶν Θ Ζ κλᾶν τὴν ΘΓΖ καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν ΒΗ τῇ ΘΕΖ· τοῦτο δὲ προγέγραπται. δοθέν ἄρα τὸ Γ. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ κύκλος δοθείς· δοθέν ἄρα τὸ Α. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· θέσει ἄρα καὶ ἡ ΔΑ, ὅπερ· ~ Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ μὲν κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὰ δὲ δοθέντα ἐπ' εὐθείας τρία σημεῖα τὰ Δ Ε Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν Θ Ζ, εἰς τὸν κύκλον ἀπὸ τῶν Θ Ζ κεκλᾶσθω ἡ ΘΓΖ, ὥστε παράλληλον εἶναι τὴν ΒΗ τῇ ΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· λέγω ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Β Δ.

7.850 Ἐπεὶ γὰρ ἐκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΕΓ ΔΕΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένης, ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΓ τῷ ὑπὸ ΔΕΘ· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Δ Θ Γ Α σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΘΖ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν κύκλῳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΘΖ γωνίᾳ. καὶ ἔστιν ἐν κύκλῳ τὰ Α Γ Θ Δ σημεῖα· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ὅπερ· ~ Μένει δ' αὐτοῦ καὶ τὰ πτωτικά· ἀπάγεται γὰρ εἰς τὰ πτωτικά τοῦ ἑπτακαίδεκάτου. κγ'. Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ κέντρου τοῦ ΓΔ κύκλου· ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η διαγομένη τέμνουσα τὸν ΓΔ κύκλον ἐκβληθεῖσα καὶ τὸν ΑΒ τέμνει. Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Ε Ζ σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ, καὶ τῇ ΖΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΚ.

7.852 ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ, οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΖΘ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η Θ Κ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ Θ γωνία· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ Κ γωνία, ὥστε, εἰ τοῦ ΓΔ ἐφάπτεται ἡ ἀπὸ τοῦ Η, ἐκβληθεῖσα καὶ τοῦ ΑΒ ἐφάπτεται. ἀλλὰ αἱ τέμνουσαι τὸν ΓΔ μεταξὺ τῶν Δ Θ εἰσὶν· ἐκβαλλόμεναι ἄρα μεταξὺ τῶν Κ Β ἔσσονται. καὶ ἔστιν ἐφαπτομένη ἡ ΗΚ· τέμνει ἄρα ἡ μεταξὺ τῶν Β Κ, Δ Θ. ἀλλὰ ἡ αὐτὴ καὶ τὸν ΓΔ τέμνει· ἡ ἄρα τὸν ΓΔ τέμνουσα καὶ τὸν ΑΒ τέμνει ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Η σημείου. Τὸ πρῶτον τῶν ἐπαφῶν ἔχει προβλήματα ἑπτὰ, τὸ δεύτερον προβλήματα δ'. Ἐπιπέδων τόπων α' β'. Εἰς τὸν τοῦ δευτέρου πρῶτον τόπον. α'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ διήχθω [τυχοῦσα] ἡ ΑΔ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· ὅτι γίνεται ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ. Ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΕ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἦν τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑ ΓΕ τῷ ἀπὸ ΓΑ· ἀνάλογον ἄρα αἱ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ἐναλλάξ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ Β, ὥστε ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΔΑ.

7.854 Τὸ δὲ ἀναστρεφόμενον φανερόν. Εἰς τὸν δεύτερον τόπον. β'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἡ ΔΑ· ὅτι μὲν ἡ τῶν ἀπὸ ΒΑ ΑΓ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ ΒΔ ΔΓ ὑπεροχῇ· ἐὰν δὲ ἡ ΒΓ δίχα τμηθῇ κατὰ τὸ Ε, ἡ τῶν ἀπὸ ΒΔ ΔΓ ὑπεροχὴ ἐστὶν τὸ δις ὑπὸ ΒΓ ΕΔ. Ὅτι μὲν οὖν ἡ τῶν ἀπὸ ΒΑ ΑΓ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶν τῇ τῶν ἀπὸ ΔΒ ΔΓ ὑπεροχῇ, φανερόν· ἔστιν γὰρ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ· ὥ ἄρα ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τοῦτ' ὑπερέχει τὰ ἀπὸ ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ ΔΓ. κάφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΔ, λοιπὸν ἄρα ὥ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ

ΒΔ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, τούτῳ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΑΓ. ὅτι καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ΒΔ ΔΓ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ δις ὑπὸ τῶν ΒΓ ΔΕ, οὕτως· ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἡ ΒΔ ἄρα ἴση ἐστὶν συναμφοτέρῳ τῇ ΓΕΔ· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΕΔ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΕΔ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ὑπερέχει τῷ τετράκις ὑπὸ ΓΕΔ, τουτέστιν τῷ δις ὑπὸ τῶν ΒΓ ΔΕ· ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ ΒΔ ΔΓ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ δις ὑπὸ τῶν ΒΓ ΔΕ. Εἰς τὸν αὐτόν, ἐὰν μὴ ὁ λόγος ἴσου πρὸς ἴσον.

7.856 γ'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΑΓ δοθέντι μείζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, δοθέντι μὲν τῷ Ε, ἐν λόγῳ δὲ τῷ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ· ὅτι μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΒΓ τοῦ Ε χωρίου. Ἀφηρησθῶ γὰρ τὸ δοθὲν χωρίον τὸ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ λόγος ἐστὶν δοθείς ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ. κείσθω τῷ ὑπὸ ΒΑΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΑΓ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΖΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΑΔ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ Ζ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΑΗΓ γωνίᾳ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΓΑΔ γωνίᾳ. μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΘ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ· καὶ τῆς ὑπὸ ΓΗΑ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΘ γωνία· ὥστε μείζον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΒΓ τοῦ ὑπὸ ΑΒΗ, τουτέστιν τοῦ Ε [τοῦ δοθέντος] χωρίου. Εἰς τὸν τρίτον τρόπον. δ'. Ἐὰν ᾖ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ διαχθῇ τις ἡ ΑΔ δίχα τέμνουσα τὴν ΒΓ, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τετράγωνα διπλάσιά ἐστιν τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ τετραγώνων. Ἦχθω κάθετος ἡ ΑΕ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΓ τετράγωνα διπλάσιά ἐστιν τῶν ἀπὸ τῶν ΒΔ ΕΔ τετραγώνων· ἐστὶν δὲ καὶ τὸ δις ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΔΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΑΔ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΓ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ ΑΓ διπλάσιά ἐστιν τῶν ἀπὸ ΒΔ ΔΑ τετραγώνων, τουτέστιν τῶν ἀπὸ ΓΔ ΔΑ τετραγώνων.

7.858 ε'. Λόγου ὄντος τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ χωρίου τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ, ἐὰν τῶν ΔΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ ΒΕ, δεῖξαι ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΓ μείζον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΑ ΑΔ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἄλλη τις ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΓ· διελόντι ἄρα ἐστὶν καὶ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς ὅλην τὴν ΒΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ ἐκ τοῦ εἶναι μέσην ἀνάλογον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΓΕ. χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΖ ΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΖ ΓΕ τοῦ ὑπὸ ΑΕΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΖΕΓ. ὧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ ΑΖ ΕΓ τοῦ ὑπὸ ΑΕΓ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ τοῦ ὑπὸ ΑΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ ΔΕ τοῦ ὑπὸ ΑΕΓ μείζον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΖΕΓ. ὧ δὲ ὑπερέχει τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ τοῦ ὑπὸ ΑΕΓ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΓΑΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΕ τετράγωνον τοῦ ὑπὸ ΓΑΔ μείζον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΖΕΓ.

7.860 τὸ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ τὸν αὐτόν τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΓ μείζον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΑΔ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ζ'. Λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, χωρίον τὸ ὑπὸ ΓΑΔ. ἐὰν τῶν ΔΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ἡ ΒΕ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ μείζον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΑΔ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἄλλη τις ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΕ. διελόντι ἄρα καὶ λοιπὴ πρὸς λοιπὴν ἐστὶν ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ. ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΓΕ. χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΑ ΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΔ ΑΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΑΕΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΑΔ· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ τε ὑπὸ ΖΕΓ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ ΓΑΔ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΓ μείζον τῷ ὑπὸ ΓΑΔ ἢ ἐν λόγῳ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΖΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον. ζ'.

7.862 Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Γ Δ· ὅτι, ἐὰν τὸ ἀπὸ ΑΔ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ τὸν αὐτόν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ συντεθῇ, γίνεται τό τε ἀπὸ ΑΓ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ

τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ καὶ ἔτι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Τῷ γὰρ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέντω ὁ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ συνθέντι ἄρα καὶ τὰ λοιπὰ ἢ ΑΖ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΖ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ὥστε τὸ μὲν λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΖΔΒ, τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓΒ, τὸ δὲ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς [αὐτῆς] ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΖ ΔΓ. ὅτι οὖν τὸ ἀπὸ ΑΔ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΑΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ ΓΔ. καὶ κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΖΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΓ ΔΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ ΓΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΑΖ ΓΔ· ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΖΔΒ, τουτέστιν ὅλον τὸ ὑπὸ ΖΔ ΓΒ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓ ΔΒ.

7.864 ἔστιν δέ· ἀνάλογον γὰρ αἱ ΑΓ ΓΒ, ΖΔ ΔΒ εἰσὶν εὐθεῖαι. η'. Θέσει καὶ μεγέθει εὐθεῖα ἢ ΑΒ, καὶ τυχὸν τὸ Γ· ὅτι ἐστὶν δοθέν ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΓ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ δοθέντα ἴσον ἐστὶν δοθέντι καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ τε δοθέντος καὶ τοῦ Γ δοθέντα. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθεὶς ὥστε δοθέν ἐστὶν τὸ Δ σημεῖον. ἐπεὶ δὲ εὐθεῖα ἐστὶν ἢ ΑΒ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ Γ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ ΑΔ καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ καὶ ἔτι τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΓ καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, τουτέστιν δοθέντα, ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΒΑΔ, τουτέστιν δοθέντι, καὶ τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, τουτέστιν δοθέντα. Ὅμοίως καί, ἐὰν [τὸ δοθέν] τὸ Γ ἐκτὸς ἢ τῆς ΑΒ εὐθείας, τῇ αὐτῇ ἀκολουθίᾳ δεῖξομεν. Πορισμάτων α' β' γ'.

7.866. (1n) Τοῦ πρώτου εἰς τὸ πρῶτον πόρισμα. α'. Ἐστω καταγραφὴ ἢ ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἔστω ὡς ἢ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΘΚ· ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἢ ΘΚ τῇ ΑΓ. Ἦχθω διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἢ ΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἢ Δ Α πρὸς τὴν ΑΖ, τουτέστιν ἐν παραλλήλω ὡς ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἢ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ ΑΗ τῇ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἐν παραλλήλω ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ, καὶ ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ ΘΚ τῇ ΑΓ. Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ἢ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ.

7.868 συνθέντι καὶ ἐναλλάξ καὶ ἀναστρέψαντι ἐστὶν ὡς ἢ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνηπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· ὁ ἄρα συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἢ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ λόγος· λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ ΘΚ τῇ ΑΓ. Εἰς τὸ δεύτερον πόρισμα. β'. Καταγραφὴ ἢ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, ἔστω δὲ παράλληλος ἢ ΑΖ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἢ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Θ Κ Ζ. Ἦχθω διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΔΕ ἢ ΗΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἢ ΘΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἢ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ. ὡς δὲ ἢ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΗΛ (διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο, καὶ ἐναλλάξ)· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΗΛ. καὶ ἔστι παράλληλος ἢ ΕΘ τῇ ΗΛ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Θ Λ Ζ, τουτέστιν ἢ διὰ τῶν Θ Κ Ζ, ὅπερ· ~ γ'.

7.870 Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς AB ΓΑ ΔΑ διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ ΘΔ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ. Ἦχθω διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΖΓΑ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ αἱ ΔΑ ΑΒ συμπιπτέτωσαν αὐτῇ κατὰ τὰ Κ Λ σημεία, διὰ δὲ τοῦ Λ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΛΜ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΕΘ ἐπὶ τὸ Μ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ, ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΜ (καὶ γὰρ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΗ ἐν παραλλήλῳ), δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΕ ΗΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ ΘΜ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ ΘΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ ΗΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ· ἀνάπαλιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ.

7.872 ὡς δὲ ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΕΘ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ. Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως, ἐπεὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ συνῆπται λόγος ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΕΖ συνῆπται ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ. ὁ δὲ συνημμένος ἕκ τε τοῦ τῆς ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΘΕ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ. διὰ ταῦτα καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΛ. καὶ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ. ἦν δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ. δ'. Καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ ΕΖ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ Η Ζ σημείων. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ ΕΖ, ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ ΔΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒ ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ ΕΖ.

7.874 ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΔΕ συνῆπται λόγος, ἐὰν διὰ τοῦ Κ τῇ ΑΖ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΚΜ, ἕκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΚΝ καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΜ καὶ ἔτι τοῦ τῆς ΚΜ πρὸς ΔΕ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ ΕΖ συνῆπται ἕκ τε τοῦ τῆς ΒΑ πρὸς ΑΔ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ. κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΒΑ πρὸς ΑΔ ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΜ· λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ συνῆπται ἕκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΚΝ, τουτέστιν τοῦ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ τοῦ τῆς ΚΜ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΗΕ· εὐθεῖα ἄρα ἡ διὰ τῶν Θ Η Ζ. Ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον ἀγάγω τὴν ΕΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΗ ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ξ, ὁ μὲν τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΕΞ, ὁ δὲ συνημμένος ἕκ τε τοῦ τῆς ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ καὶ τοῦ τῆς ΘΚ πρὸς τὴν ΕΞ μεταβάλλεται εἰς τὸν τῆς ΘΓ πρὸς ΕΞ λόγον, καὶ ὁ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΓΘ πρὸς τὴν ΕΞ· παραλλήλου οὔσης τῆς ΓΘ τῇ ΕΞ εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ Ξ Ζ (τοῦτο γὰρ φανερόν), ὥστε καὶ ἡ διὰ τῶν Θ Η Ζ εὐθεῖα ἐστὶν. ε'. Ἐὰν ἡ καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, γίνεται ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἔστω οὖν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Η Θ. Ἦχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ λοιπὴ ἡ ΗΛ πρὸς λοιπὴν τὴν ΛΜ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ.

7.876

ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΛΜ, τουτέστιν ἡ ΔΘ πρὸς ΘΛ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΗΛ τῇ ΑΔ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Η Θ σημείων· τοῦτο γὰρ φανερόν. ζ'. Πάλιν ἐὰν ᾖ καταγραφὴ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΖ τῇ ΒΓ, γίνεται ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ἔστω οὖν ἴση· ὅτι παράλληλος. Ἔστιν δέ· ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΒ θῶ τῇ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ, καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΑΘ ΘΓ, γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΘΓΗ, καὶ διὰ τοῦτό ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ (ἐκατέρων γὰρ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος), ὥστε παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ. ζ'. Ἔστω καταγραφὴ, καὶ τῶν ΔΒ ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΑ· ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΖ εὐθεῖα παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΘ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΚΓ.

7.878 ἔστιν οὖν πάλιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΕ (ἐκατέρων γὰρ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ), ὥστε παράλληλός ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ. η'. Ἔστω βωμίσκος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἔστω παράλληλος ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΕΗ τῇ ΒΖ· ὅτι καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΓΗ παράλληλός ἐστὶν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΔΓ ΖΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΔΒΕ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΑΕ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΓΔΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΕΗ, ἴσον ἐστὶν τὸ ΒΖΕ τρίγωνον τῷ ΒΖΗ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΑΒΖ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΖΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΓΗ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔΗ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΓΖΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΓΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΔΖ. θ'. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ διήχθωσαν αἱ ΑΔ ΑΕ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΗ, καὶ κεκλάσθω ἡ ΖΘΗ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΒΓ. Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΕ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΜ πρὸς ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΜ πρὸς ΝΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ.

7.880 ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἡ ΝΗ πρὸς τὴν ΘΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΛΘ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΛΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΗΖ, ὥστε καὶ τῇ ΓΒ. ι'. Εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΑΕ ΔΑΗ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου δύο διήχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΔΘ ΘΕ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ ΒΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ ΖΗ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Γ Α Ζ. Ἦχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμπιπτέτω ταῖς ΑΒ ΑΔ κατὰ τὰ Κ Λ σημεία, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΘ ἐπὶ τὸ Μ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΝ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΘ ἐπὶ τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰς παραλλήλους γίνεται ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΘ ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΘΝ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ ΔΓ ΒΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ ΒΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ ΘΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ ΒΘ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΘΒ.

7.882 ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΘΔ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ ΒΘ, ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΘΝ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΜ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΜ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ ΖΗ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΗ ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΜ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΕ ΖΗ τῷ ὑπὸ ΘΜ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΜ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ. συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΚΛ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΑ· εὐθεῖα ἄρα

ἐστὶν ἡ ΓΑΖ, ὅπερ ~ Τὰ δὲ πτωτικά αὐτοῦ ὁμοίως τοῖς προγεγραμμένοις, ὧν ἐστὶν ἀναστροφίον. ια'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ συμπίπτει κατὰ τὸ Ε σημείον· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ. Ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΘ ΔΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔ ΖΗ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗ ΕΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΘ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗ ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ.

7.884 ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ ΗΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ. τὰ δ' αὐτὰ κἂν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἀχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐκτὸς τοῦ Γ ἀχθῇ ἡ ΔΕ. ιβ'. Ἀποδεδειγμένων νῦν τούτων ἔσται δεῖξαι ὅτι, ἐὰν παράλληλοι ᾖσιν αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες αἱ ΑΔ ΑΖ ΒΓ ΒΖ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΕΔ ΕΓ, [ὅτι] γίνεται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ. Ἐπεὶ γὰρ τρίγωνον τὸ ΔΑΖ, καὶ τῇ ΔΖ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ διῆκται ἡ ΕΓ συμπίπτουσα τῇ ΔΖ κατὰ τὸ Γ, διὰ τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ. πάλιν ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστιν τὸ ΓΒΖ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΚΒ, καὶ διῆκται ἡ ΔΕ συμπίπτουσα τῇ ΓΖΔ κατὰ τὸ Δ, γίνεται ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚ ΑΕ· ἀνάπαλιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΑΚ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΚ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΑ [ἀνήκται εἰς τὸ πρὸ ἑνός]. ἐπεὶ οὖν εἰς δύο εὐθείας τὰς ΓΜΛ ΔΜΘ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΓ ΕΔ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΑΚ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ· τοῦτο γὰρ προδεδεικται. ιγ'.

7.886 Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν αἱ ΑΒ ΓΔ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπίπτωσαν κατὰ τὸ Ν· ὅτι πάλιν εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ. Ἐπεὶ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΝ ΑΖ ΑΔ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Γ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΕ ΓΔ, γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΝ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΝΔ ΓΖ. πάλιν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΝ ΒΓ ΒΖ δύο εἰσὶν διηγμέναι αἱ ΔΕ ΔΝ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΑ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ ΓΖ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΚ ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΑ [ἀπῆκται εἰς ὃ καὶ ἐπὶ τῶν παραλλήλων]. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η Μ Κ. ιδ'. Ἐστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΕ ΓΒ, καὶ σημείον ἐπὶ τῆς ΒΗ τὸ Ζ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒ ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒ ΓΗ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Ζ Δ. Ἦχθω διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΕ ἐπὶ τὸ Θ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒ ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ τε ΔΘ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘ ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΗ ΒΖ, ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΖΗ τῷ ὑπὸ ΔΘ ΒΖ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΗΖ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΒ πρὸς ὅλην τὴν ΒΗ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΖΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΖΗ.

7.888 ἀλλ' ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΗ ἐν παραλλήλῳ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΗ καὶ ἡ ΔΘ πρὸς ΖΗ. καὶ εἰσὶν παράλληλοι αἱ ΔΘ ΖΗ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Ζ Δ σημείων. ιε'. Τοῦτου προτεθεωρημένου ἔστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΖ ΖΒ ΓΕ ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΗΚ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α Μ Δ. Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΒΓΖ [ἐκτὸς] ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ παράλληλος

ῥῆται ἢ ΒΕ, καὶ διῆκται ἢ ΔΕ, γίνεται ὡς ἢ ΓΖ πρὸς ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ ΚΔ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚ ΛΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ (εἰς τρεῖς γὰρ εὐθείας τὰς ΓΛ ΔΘ ΗΚ δύο εἰσὶν διηγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε αἱ ΕΓ ΕΔ)· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΔΖ πρὸς ΖΓ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΕ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΘΕ. καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἢ διὰ τῶν Θ Μ Δ· διὰ τὸ προγεγραμμένον ἄρα καὶ ἢ διὰ τῶν Α Μ Δ ἐστὶν εὐθεῖα.

7.890

ιζ'. Εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΒ ΑΓ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ δύο διήχθωσαν αἱ ΔΒ ΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτῶν εἰλήφθω σημεῖα τὰ Η Θ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΕΗ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΗΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΘ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ ΓΘ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Α Η Θ. Ἦχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΒΔ παράλληλος ἢ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΗ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΘ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ ΓΘ, ἀλλὰ ὁ τοῦ ὑπὸ ΕΗ ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΗΖ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΗΕ πρὸς ΕΔ, τουτέστιν ἢ ΚΗ πρὸς ΒΔ, καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἢ ΔΖ πρὸς ΖΗ, τουτέστιν ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΛ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΒΘ ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ ΓΘ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΘΒ πρὸς ΒΔ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἢ ΔΓ πρὸς ΓΘ, καὶ ὁ ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ ἄρα πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΘ. ὁ δὲ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΔ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ· ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ ἔτι τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΘ. κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ λόγος· λοιπὸς ἄρα ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΘ, τουτέστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΗΛ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς τὴν ΘΓ. καὶ πάλιν κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΗΛ λόγος· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΒΘ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΗΛ πρὸς τὴν ΘΓ. καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἢ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἢ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ, καὶ εἰσὶν αἱ ΚΛ ΒΓ παράλληλοι· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Α Η Θ σημείων.

7.892

ιζ'. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω παράλληλος ἢ ΑΒ τῇ ΓΔ, ἀλλὰ συμπίπτει κατὰ τὸ Ν. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΝ ΒΓ ΒΖ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΔΕ ΔΝ, ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΝΔ ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΔΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ ΚΔ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΕΔ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ ΚΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΘ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓ ΘΗ (πάλιν γὰρ εἰς τρεῖς τὰς ΓΛ ΔΘ ΗΚ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε δύο ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΓ ΕΔ)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΕΘ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓ ΘΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΔ ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΓ ΖΔ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Α Θ Δ· καὶ ἢ διὰ τῶν Α Μ Δ ἄρα εὐθεῖα ἐστὶν. ιη'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ῥῆθω ἢ ΑΔ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΔΕ ΖΗ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἢ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἢ ΒΔ, γίνεται εὐθεῖα ἢ διὰ τῶν Θ Κ Γ. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἢ ΒΗ πρὸς ΗΓ, κοινὸς [ἄρα] προσκείσθω ὁ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΒ λόγος ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ ὑπὸ ΕΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ· δι' ἴσου ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΗ πρὸς ΗΓ καὶ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΕΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΕΓ πρὸς ΕΒ· ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΒΗ πρὸς ΗΓ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΕΓ πρὸς ΕΒ, ὅς ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ὑπὸ ΕΓ ΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒ ΓΗ.

7.894

ὡς δὲ ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἐστὶν διὰ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα τὸ ὑπὸ ΔΖ ΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ ΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ ΕΒ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΖ ΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ ΖΘ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ διὰ τῶν Θ Κ Γ· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς πτωτικοῖς τῶν ἀναστροφίων. ιθ'. Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ ΑΓ ΑΔ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ Ε δύο διήχθωσαν αἱ ΕΖ ΕΒ, ἔστω δὲ ὡς ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΘΗ· ὅτι γίνεται καὶ ὡς ἢ ΒΕ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἢ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. Ἦχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΒΕ παράλληλος ἢ ΑΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἢ ΕΒ πρὸς τὴν ΗΚ, ὡς δὲ ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως [ἐστὶν] ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΗΛ, καὶ ὡς ἄρα ἢ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΔΕ πρὸς τὴν

ΗΛ. ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ. ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. Τὰ δὲ πτωτικά ὁμοίως. κ'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α Δ γωνίας· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. Ἦχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ ΕΘ.

7.896 ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ Η τῇ Θ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗ ΑΓ, ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ. καὶ ἐναλλάξ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον (ἐκατέρα γὰρ τῶν ΒΗ ΕΘ κάθετός ἐστὶν ἐκατέρου τῶν εἰρημένων τριγώνων)· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. κα'. Ἐστωσαν δὴ αἱ Α Δ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅτι πάλιν γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ Α Δ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΗ γωνία τῇ Δ. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ μὲν ΗΑ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΗΑΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. κβ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα τὰ Γ Δ, ἔστω δὲ τὸ δις ὑπὸ ΑΒ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΔΒ τετραγώνοις. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δις ὑπὸ ΑΒ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΒ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ δις ὑπὸ ΒΔΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ τετραγώνοις.

7.898 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ ΑΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΔΒ τετραγώνοις. κγ'. Ἐστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΔ τετραγώνῳ· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔ ΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΑ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΔ, ἀνάλογον καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἡ ΓΔ ΔΑ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔ ΔΓ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΔ πρὸς ὅλην τὴν ΔΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΔΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΓ. πάλιν ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΔ πρὸς ὅλην τὴν ΔΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΓΔΑ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ. κδ'.

7.900 Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Γ Δ, καὶ ἔστω τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον ἴσον τῷ δις ὑπὸ ΑΓ ΔΒ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΓΒ τετραγώνοις. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΓ ΔΒ, τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΑΓ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΓΒ τετραγώνοις. κε'. Ἐστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΑ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, λοιπὴ πρὸς

λοιπὴν καὶ διελόντι ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ. πάλιν ἐπεὶ λοιπὴ ἡ ΑΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΓ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ἀνάπαλιν καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ.

7.902 κς'. Ἐστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΓΔΕ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑ ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕ ΒΓ τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κζ'. Ἐστω δὲ πάλιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τετράγωνον· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. Κείσθω γὰρ ὁμοίως τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΕΔΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. καὶ γίνεται κατὰ διαίρεσιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑ ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕ ΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΓ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ὅλην τὴν ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κη'.

7.904 Κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔ ΔΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΔΒ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΑ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐὰν δὲ ᾗ τοῦτο, γίνεται ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ. κθ'. Τμήματος δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ, κλάσαι εὐθεῖαν τὴν ΑΓΒ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. Γεγονέτω, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ δοθείς, ὥστε καὶ ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστιν δοθέντα τὰ Α Β· δοθὲν ἄρα ἐστὶν τὸ Δ, ὥστε καὶ τὸ Γ δοθέν. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως.

7.906 ἔστω τὸ μὲν τμήμα τὸ ΑΒΓ, ὃ δὲ λόγος ὁ τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΔΓ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι αἱ ΑΓ ΓΒ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ (διὰ τὸ ἐφάπτεσθαι τὴν ΓΔ), καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὥστε καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἡ ΑΓΒ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. λ'. Κύκλος οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τυχόντος ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΔΕ, διήχθω ἡ ΔΖ, ἐπεξεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ καθ' ὃ συμπίπτει τῇ διαμέτρῳ ἔστω τὸ Η· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ. Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΑΕ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ διαμέτρου κάθετος ἡ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΘΖΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση ἐστὶν τῇ ἐκτὸς τετραπλεύρου τῇ ὑπὸ ΒΖΗ· καὶ τῇ ὑπὸ ΘΖΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΗ· καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΒ γωνία· διὰ δὴ τὸ λήμμα γίνεται ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ. λα'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α Β σημείων τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαῖ

ἤχθωσαν αἱ ΒΔ ΑΕ, καὶ ἤχθω τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ συμπίπτει τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Η· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ.

7.908 Ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΔ. περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΒΔΗ γωνία. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΕ ἴση ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ΑΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΔΗ πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ΒΖΗ· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΗ γωνία. ἔστιν δέ· ὀρθή γάρ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΒ ΕΖΗ γωνιών. λβ'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ τῇ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω ἡ ΔΕ ποιοῦσα ἴσον τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ὅτι, ἐὰν δίχα τμηθῇ μία τῶν ἴσων πλευρῶν ἡ πρὸς τῷ ἴσῳ τριγώνῳ τῇ ΒΖ, γίνεται ὡς συναμφοτέρος ἡ ΖΒ ΒΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον. Ἦχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΒΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Κ. ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΖΚ ΚΘ πρὸς τὴν ΖΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΚ ΚΘ καὶ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΚ ΚΘ καὶ τῆς ΖΘ, τουτέστιν ἡ τῶν ἀπὸ ΖΚ ΚΘ ὑπεροχή, ἴση ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΖ· ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ ΚΖ ΖΑ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΚΘ.

7.910 ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ ΚΖ ΖΑ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΚΑ· ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΚΑ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΚ· ὅτι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΘ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔστιν δέ· παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΔΓ, ἐπειδὴ τὸ ΔΒΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, κοινού δ' ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΒΕ λοιπὸν τὸ ΔΑΕ λοιπῷ τῷ ΑΓΕ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως. λγ'. Κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν ΔΕ κάθετος, καὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΖΗ τετράγωνον· ὅτι, οἷον ἐὰν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Ε, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευχθεῖσα ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Θ, γίνεται καὶ τὸ ὑπὸ ΘΕΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΗ τετραγώνῳ. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΒΛ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ Λ γωνία. ἔστιν δὲ καὶ ἡ Ζ ὀρθή· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΘΕΚ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΗ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΕΚ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΖ ΖΗ τετραγώνοις, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΕΗ τετραγώνῳ.

7.912 λδ'. Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγούμενων καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΔΓ. πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ τετραγώνῳ. ἀμφοτέρα ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΒΔ. Ἀλλὰ ἔστω νῦν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΓΑ κατὰ τὸ Ε· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ τετράγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δις τὰ ἡγούμενα καὶ διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ. λε'.

7.914 Τούτων ὄντων ἔστω κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ, ἔστω δὲ ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν ΔΕ κάθετος, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ· ὅτι πάλιν, οἷον ἐὰν ἐπὶ τῆς ΕΔ σημεῖον ληφθῇ ὡς τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΗ ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Θ, γίνεται ὡς ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΘ. ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα τῶν Μ Ζ γωνιών, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Ε Ζ Λ Μ σημεία· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ

τῶν ΕΗΜ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ (διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως τὴν ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, καὶ τέτμηται ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Λ)· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΜ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ, τουτέστιν (ἐν κύκλῳ γάρ) τῷ ὑπὸ τῶν ΘΗΚ. καὶ τέτμηται δίχα ἡ ΘΚ κατὰ τὸ Μ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον γίνεται ὡς ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ. λζ'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΓΕ ΔΗ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΗΒ. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ ΖΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΖ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ ΕΖ τετράγωνα, τῷ δὲ ἀπὸ ΔΖ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΔΗ ΗΖ τετράγωνα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ ΕΖ ἄρα τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ ΗΔ τετραγώνοις.

7.916 ὦν τὸ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΗ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΖΗ τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῇ ΖΒ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΕ λοιπῇ τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ~ λζ'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἀπὸ τυχόντος τοῦ Γ διήχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ· ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΓΒ καὶ τῆς ΑΕ. Ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ ΔΓ, τουτέστιν τοῖς ἀπὸ ΔΕ ΕΓ, καὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ ΓΒ καὶ τῆς ΑΕ· ὅτι ἄρα κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΓΑΕ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, καὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ ΓΒ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ ΒΓ. ἔστιν δέ. Εἰς τὸ πόρισμα τοῦ α' βιβλίου. λη'. Θέσει ὄντος παραλληλογράμμου τοῦ ΑΔ, ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε διαγαγεῖν τὴν ΕΖ καὶ ποιεῖν ἴσον τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ. Γεγονέτω. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶν τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τὸ ΖΓΗ ἄρα τρίγωνον διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου.

7.918 ὡς δὲ τὸ τρίγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, διὰ τὸ εἶναι περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν Γ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΖΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ. δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΓΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΗ. καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε εἰς θέσει τὰς ΑΓ ΓΔ διῆκται ἡ ΕΖ εἰς χωρίου ἀποτομὴν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. Συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω τὸ μὲν τῇ θέσει παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, τὸ δὲ δοθέν τὸ Ε. διήχθω ἀπὸ τοῦ Ε εἰς θέσει τὰς ΖΓ ΓΔ εὐθεῖα ἡ ΕΖ ἀποτέμνουσα χωρίον τὸ ὑπὸ ΖΓΗ ἴσον δοθέντι χωρίῳ τῷ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΑΓΔ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῇ ἀναλύσει δεῖξομεν ἴσον τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ· ἡ ΕΖ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. φανερόν οὖν ὅτι μόνη, ἐπεὶ κάκεινη μόνη. α'. Ἔστω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελὴς ἐστὶν ὁ κῶνος, φανερόν ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἰ δὲ σκαληνός, ἔστω εὐρεῖν τίς μεγίστη καὶ τίς ἐλαχίστη. Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος, καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α Β σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ προσπιπτουσῶν.

7.920 Προσβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΖ. κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Δ γωνία ὀρθαί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΓΑ μείζων ἐστίν· ὥστε μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ. β'. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. Ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΓΑ φανερόν, διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἐπεὶ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶν τῆς ΑΕ. καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΓΕ. ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ

κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ ΕΓ τῆς ΓΑ· ὥστε μεγίστη μὲν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ τῶν ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. γ'. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΒΓ· λέγω δὴ ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

7.922 Ὅτι μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΑ φανερόν, λέγω δὲ ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν. προσπιπτέτω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΒ τῆς ΔΖ. καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. ὁμοίως καὶ πασῶν. μεγίστη μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ, ὅτι δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἐλαχίστη. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΖ. ὁμοίως καὶ πασῶν. ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, μεγίστη δὲ ἡ ΒΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. Εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους, “Ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν” εἰκότως ὁ Ἀπολλώνιος προστίθῃσιν “ἐφ’ ἐκάτερα προσεκβληθῇ”, ἐπειδὴ περ τοῦ τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κώνος, περισσὸν ἦν προσεκβάλλειν διὰ τὸ τὴν φερομένην εὐθεῖαν αἰεὶ ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδὴ περ πάντοτε τὸ σημεῖον ἴσον ἀφέξειν ἔμελλεν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κώνος, ἔστιν δέ, ὡς προγέγραπται, ἐν κώνῳ σκαληνῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρά, ἀναγκαίως προστίθῃσιν τὸ “προσεκβληθῇ”, ἵνα αἰεὶ προσεκβληθεῖσα ἡ ἐλαχίστη [αἰεὶ τῆς μεγίστης] αὐξήται [προσεκβαλλομένης], ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ καὶ ψαύσῃ κατ’ ἐκεῖνο τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

7.924 δ'. Ἐστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ θέσει ἡ ΑΓ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι [ἀγόμεναι] οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἐκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἐφ’ ἐκάστης αὐτῶν τμηθέντων· λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστὶν ἡ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστὶν ἡ ΑΓ. Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν Δ Β Ε κάθετοι αἱ ΔΖ ΒΗ ΕΘ· τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΗ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΕΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΓ. τετμήσθω δὴ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΚ ΚΒ ΚΕ ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΚ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΔΚ, ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐκάτερα τῶν ΒΚ ΕΚ ἴση ἐστὶν τῇ ΑΚ ἢ τῇ ΚΓ· κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστὶν ἡ ΑΒΓ τοῦ περὶ κέντρον τὸ Κ, τουτέστιν τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ. ε'. Τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ ΕΖ, καὶ διήχθωσαν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΗΖΓ ΒΗΕΔ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.

7.926 ζ'. Ἐστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνεται τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντί ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἐκάτερον ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ

ΕΒΔ. γίνεται ἄρα τὰ τρία. Ζ'. Τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν συνημμένον λόγον ἔχτω ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β καὶ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῷ γὰρ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β συνῆπται ἕκ τε τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τοῦ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ, τουτέστιν τοῦ Δ πρὸς τὸ Η, ἀλλὰ ὁ συνημμένος ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει τὸ Δ πρὸς τὸ Η ἐστὶν ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Η, ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Η καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ τοῦ Η πρὸς τὸ Δ ἐκ τοῦ ἀνάπαλιν ὁ αὐτὸς ἐστὶν τῷ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Ε, καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.

7.928 η'. Ἐστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ ΔΖ ἰσογώνια, ἴσην ἔχοντα τὴν Β γωνίαν τῇ Ε γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον. Εἰ μὲν οὖν ὀρθαὶ εἰσὶν αἱ Β Ε γωνίαι, φανερόν· εἰ δὲ μή, ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΗ ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἡ δὲ Η ὀρθὴ τῇ Θ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ ΕΖ· ἔστιν ἄρα ἐναλλάξ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗ ΒΓ, τουτέστιν τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ ΕΖ, τουτέστιν πρὸς τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον. θ'. Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΒΓ τῇ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΖΑΕ· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ ΒΖ, γίνεται παράλληλος ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ. Τοῦτο δὲ ἐστὶν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ ΒΖ. ι'. Ἐστω τρίγωνον μὲν τὸ ΑΒΓ τραπέζιον δὲ τὸ ΔΕΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ, οὕτως τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖΗ.

7.930 Ἦχθωσαν κάθετοι αἱ ΑΘ ΔΚ. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ Θ ὀρθὴ τῇ Κ ὀρθῇ ἴση, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΚ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΚ. καὶ ἔστιν τοῦ μὲν ὑπὸ ΑΘ ΒΓ ἡμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΚ ἡμισυ τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον. Καὶ ἐὰν ἡ [δὲ] τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, γίνεται ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΔΕΖ, κατὰ τὰ αὐτά. καὶ φανερόν ἐκ τούτων ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ἐὰν ἡ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ καὶ ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἴσον γίνεται τῷ δις ὑπὸ ΔΕΖ, ἐπὶ δὲ τοῦ τραπέζιου ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ ΕΖ καὶ τῆς ΔΕ, ὅπερ· ~ ια'.

Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ διήχθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ αὐτῇ μὲν παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, τῇ δὲ ΒΓ ἡ ΑΖ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον. Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΚΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΑΛ ἐν κύκλῳ ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΘΛ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΒ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΖΘΛ γωνίᾳ.

7.932 ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία ἴση ἐστὶν τῇ πρὸς τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς

ΖΑ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἄλλη τις ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ΖΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐν τετραγμένη ἀναλογία ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τουτέστιν πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ. Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου. ἐπεὶ ὁ μὲν τῆς ΑΗ πρὸς ΗΒ λόγος ἐστὶν ὁ τῆς ΘΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ὁ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὁ δὲ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν τῷ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ, ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον. Τοῦ β'. α'. Δύο δοθεισῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ εὐθείας τῆς ΔΕ, εἰς τὰς ΑΒ ΒΓ ἐναρμόσαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΕ καὶ παράλληλον αὐτῇ. Τοῦτο δὲ φανερόν.

7.934 ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΑ, ἔσται, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΓΕΔ, ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΔΕ καὶ παράλληλος, καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς ΑΒ ΒΓ. β'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ· ὅτι καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἐστὶν παράλληλος. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ συμπιπτέτω ταῖς ΔΕ ΔΖ κατὰ τὰ Η Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ Β Ε γωνίαι, διὰ τὸ εἶναι δύο παρὰ δύο, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, τουτέστιν τῇ Θ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΘ. γ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ. Τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα [ὅπως ἂν ἔχη ὡς πρὸς τὸ Ε σημεῖον] κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΒ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ. δ'.

7.936 Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ τῶν ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΓΔ δίχα [ὅπως ἂν ἔχη ὡς πρὸς τὸ Ε σημεῖον] κατὰ τὸ Ζ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν· τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΖ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, καὶ κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ. ε'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Γ τῇ Ζ, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ε· ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ. Συνεστάτω τῇ Ε γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΓΒΗ, ἔστιν δὲ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ. ζ'. Ἐχέτω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἴση δὲ ἔστω ἡ Γ γωνία τῇ Ζ· ὅτι πάλιν γίνεται ἐλάσσων ἡ Β γωνία τῆς Ε γωνίας. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἐὰν ἄρα ποιῶ ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τινά, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΔ. ἔστω πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ, ἐλάσσονι οὖσῃ τῆς Ε.

7.938 ζ'. Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι γίνεται ὅμοιον καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ,

ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ λόγος συνήπται ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ συνήπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ καὶ τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ, ὣν ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ. η'. Διὰ μὲν οὖν τοῦ συνημμένου λόγου, ὡς προγέγραπται, ἔστω δὲ νῦν ἀποδείξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ λόγῳ. Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΖΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ διὰ τὴν ὁμοιότητα· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ.

7.940 καὶ περὶ ἴσας γωνίας ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ. Ὅμοίως καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ ΔΘΕ, ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ. θ'. Ἐστω ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΒ τῷ ΔΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ Α ὅλη τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΖ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ· καὶ ὁ συνημμένος ἄρα τῷ συνημμένῳ ἐστὶν ὁ αὐτός· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ. ι'. Ἄλλως μὴ διὰ τοῦ συνημμένου. κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΕΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΖΛ. ἔσται πάλιν ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ διὰ τὴν ὁμοιότητα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΚΓΑ, ὃ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΑΖΔ, ὃ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ὅπερ· ~ Ὅμοίως δὲ δείξομεν, καὶ ἐὰν ᾗ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, ὅτι καὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ὅμοιον.

7.942 ια'. Ἐστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. Τοῦτο δὲ φανερόν, ὅτι ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ. ιβ'. Ἐστω ἴση ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἐλάσσων δὲ ἡ Α τῆς Δ· ὅτι ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ. Ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἡ Α γωνία τῆς Δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΕΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ πρὸς ΕΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ. καὶ πάντα δὲ τὰ τοιαῦτα τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ δείξομεν. ιγ'. Ἐστω ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, καὶ ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΗΓ ἔστω ἴση, ἡ δὲ ΓΗ πρὸς ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχέτω ἢ περὶ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΗ· ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΗΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΕΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΘ τοῦ ὑπὸ ΕΘΖ· ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ.

7.944 Τοῦ γ'. α'. Καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ, ἔστω δὲ ἴση ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ· ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ. Ἦχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΖ ΓΕ ἐπὶ τὰ Κ Θ σημεία. ἐπεὶ

οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΘΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΓΖ πρὸς ΖΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ. β'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἴσας ἔχοντα τὰς Α Δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἦχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἴσον δὲ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ ΒΗ ΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΗ ΑΓ ἡμισὺ ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΘ ΔΖ ἡμισὺ ἐστὶν τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Φανερόν δὴ ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν. γ'.

7. 946 Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. δ'. Ἰσαι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα τῷ Ζ· τὸ Ζ ἄρα διχοτομία ἐστὶν καὶ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΖ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΖ, καὶ ἔστιν τὸ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ, κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ ΒΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΓΑΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ, ὅπερ ~ ε'. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾗ μεταξὺ τῶν Α Β σημείων, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ, οὐπὲρ ἐστὶν κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ᾗ μεταξὺ τῶν Β Γ, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΑΕΔ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΑΒΔ, τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ. ζ'. Ἰση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ Ε· ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΑΕΓ καὶ δις τῶν ἀπὸ ΒΔ ΒΕ τετραγώνων. Τοῦτο δὲ φανερόν· τὸ μὲν γὰρ δις ἀπὸ ΑΒ, διὰ τῶν διχοτομιῶν, ἴσον ἐστὶν τῷ τε δις ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ δις ἀπὸ ΔΒ, τὸ δὲ δις ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε δις ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τῷ δις ἀπὸ ΕΒ τετραγώνῳ.

7. 948 ζ'. Ἰση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΔ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓΔ. Τετμήσθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δις ἀπὸ τῆς ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε δις ὑπὸ ΑΓΔ καὶ δις ἀπὸ ΓΖ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ δις ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶν τό τε δις ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τὰ δις ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΕ τοῖς δις ἀπὸ τῶν ΔΖ ΖΕ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν δις ἀπὸ τῶν ΔΖ ΖΕ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΔ τετράγωνα, τοῖς δὲ δις ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΕ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΒΕ ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓΔ. η'. Ἐστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΑ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ. Κοινὸν γὰρ ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶν τῇ τῶν ἀπὸ ΑΔ ΔΓ ὑπεροχῇ, τουτέστιν τοῖς ὑπὸ τῶν ΔΑΓ ΑΓΔ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΔ ΑΓ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΓΑ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΒ, ὅπερ ~ θ'. Ἐστω τὸ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ τετραγώνῳ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ. Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΓΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΕΒ.

7. 950 ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΔ ὅλη τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. ι'. Ἐστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ. Κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔ ΑΓ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΕΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ὃ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΕΑ, ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΒΔ, τῇ ΔΓ. ια'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς

γ' σημεία τὰ Γ Δ Ε οὕτως, ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΕΓ· ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δις τὰ ἡγούμενα καὶ διελόντι ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ. ιβ'. Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΒΔ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΓΕ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ ἀναστρέψαντι καὶ χωρίον χωρίῳ τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΒΔ.

7.952 Φανερόν δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΓ· ἐὰν γὰρ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΓΔ κοινὸν ἀπὸ τῆς τοῦ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἰσότητος, γίνεται ~ ιγ'. Εἰς δύο παραλλήλους τὰς ΑΒ ΓΔ διὰ τε τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε τρεῖς διήχθωσαν αἱ ΑΕΔ ΒΕΓ ΖΕΗ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ. Διὰ τοῦ συνημμένου φανερόν· ὡς μὲν γὰρ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΗΓ, καὶ σύγκειται ἐκ τούτων τὰ χωρία· γίνεται ἄρα ~ Ἔστιν δὲ καὶ οὕτως μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΔ. Τοῦ ε'. α'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι, εἰ μὲν ἴσον ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία, εἰ δὲ μείζον, ἀμβλεῖα, εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα. Ἔστω πρότερον ἴσον· ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὥστε ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία.

7.954 ἀλλὰ ἔστω μείζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΕΓ· ἔσται ἄρα ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία. καὶ αὐτῆς μείζων ἡ Α γωνία· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω πάλιν ἔλασσον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ ΖΓ· ἔσται δὲ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία. καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία. β'. Θέσει οὐσῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ, γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυνπτώτους τὰς ΑΒ ΒΓ. Γεγονέτω κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστὶν τὸ Β. ἐπεζεύχθω οὖν ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστίν. κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστίν, ὥστε δοθέν ἐστὶν τὸ Ε καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· δοθέν ἄρα ἐστὶν τὸ Ζ.

7.956 καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθέν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ Γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστίν. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθέν ἄρα ἐστὶν τὸ Α. ἔστιν δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· δέδοται ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. ἔστω δὲ ὀρθία τοῦ πρὸς τῇ ΕΔ εἵδους ἡ ΔΗ· ἐκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ ΔΓ δυνάμει ἐστὶν δ' τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ. ἀλλὰ καὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΔΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνῳ. δοθέν δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΗ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΕΔ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΔ, ὥστε δοθέν τὸ Η. ἐπεὶ οὖν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν ΕΔ ΔΗ ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ ὑπὸ τῆς ΑΔΒ γωνίας γίνεται ὑπερβολή, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΕΔ κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν ΔΗ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα ἃ αὐταὶ ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τῆς ἐπ' εὐθείας τῇ διαμέτρῳ πρὸς τῷ Δ, ὑπερβάλλοντα εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή. Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ, τὸ δὲ δοθέν τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ ΒΕ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ τῇ ΒΖ ἴση κείσθω ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α, καὶ τῇ ΔΕ προσανήχθω ἡ ΔΗ, καὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ

ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει ἐλέγομεν, περὶ διάμετρον ΔΕ
ὑπερβολῇ· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

7.958 Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ· ἐκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΑΔ ΔΓ δ' ἐστὶν τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ, τουτέστιν τοῦ πρὸς τῇ ΕΔ διαμέτρῳ εἵδους, ἐὰν δὲ ᾗ τοῦτο, δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ, ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΒΓ τῆς ὑπερβολῆς γ'. Θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθὲν τὸ Γ. διήχθω ἡ ΒΓ, κείσθω δοθεῖσα ἡ ΒΔ, ὀρθῇ ἀνήχθω ἡ ΔΕ· ὅτι τὸ Ε ἄπτεται [θέσει κώνου τομῆς] ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ. Ἦχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν τὸ Α. ἀνήχθω ὀρθῇ ἡ ΑΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ [συμπίπτουσα τῇ ΒΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η]· καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν ΒΑ ΑΗ καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ ὑπερβολῇ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ ΑΒ ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΗ (ἐπεὶ καὶ ὅλη ἡ ΒΕ τῇ ΗΓ).

7.960 καὶ ἔσται διὰ τὸ προγεγραμμένον. Συντεθήσεται δὲ οὕτως ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ ΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ, καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς ΓΖ, ἡ ΖΑ, καὶ ὀρθῇ ἀνήχθω ἡ ΑΗ καὶ συμπίπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Η, καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ ΑΒ διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολῇ· λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι, ἂν κάθετος ἀχθῇ ἡ ΕΔ, ἴση γίνεται ἡ ΒΔ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερόν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους· ἴση γὰρ ἡ ΕΗ τῇ ΓΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶν τῇ ΒΔ. δ'. Ἔστω ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι τῶν ΒΑ ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστὶν ἡ ΑΔ. Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· κατὰ διαίρεσιν ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓ ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓ ΕΒ τῷ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ, ὥστε τῶν ΒΑ ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστὶν ἡ ΑΔ. ε'. Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ δις ἀπὸ ΑΓ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΔΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ παρὰ τὴν αὐτὴν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, τῇ ΓΒ. ς'.

7.962 Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΖ ΗΕ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις. Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δὲ διὰ μὲν τῆς ΔΖ τομῆς ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ, διὰ δὲ τῆς ΔΕ τομῆς ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις. Λέγω δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ αἰεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. Ἦχθω γάρ τις καὶ ἐτέρα ἡ ΘΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ... ἥς πέρας ἔστω τὸ Μ ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΜΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ. μείζον δὲ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΜΑΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΔ τῆς ΘΣ. καὶ ἔστιν διὰ τὰς τομὰς ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΞΔ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΔ τῆς ΘΡ, ὥστε αἰεὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. [ἀλλὰ καὶ παράκεινται· εἰ γὰρ ἐκάτερα αὐτῶν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς.

7.964] Ζ'. Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ (κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ), οὕτως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον, ὕψος

δὲ τὴν AB, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς AB κύβον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ (κοινὸν ὕψος ἢ ΔΕ), οὕτως τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον· καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστίν. ἔστιν δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς AB κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον, οὕτως ὁ τε ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον, οὕτως τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν AB, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.

7.966

ἦ'. Ἐστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ· ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β. Ἐστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε· τὸ Α ἄρα ἴσον ἐστὶν τοῖς Γ Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Β· τὰ Α Β ἄρα ἴσα ἐστὶν τοῖς Γ Ε Β. ἀλλὰ τὰ Α Β τοῖς Γ Δ ἴσα ὑπόκειται· καὶ τὰ Γ Δ ἄρα τοῖς Γ Ε Β ἴσα. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ Δ ἴσον τοῖς Β Ε, ὥστε τὸ Δ τοῦ Β ὑπερέχει τῷ Ε· ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β. Ὁμοίως δὲ δείξομεν [ὅτι], ἐάν, ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχη καὶ τὸ Δ τοῦ Β, ὅτι τὰ Α Β ἴσα ἐστὶν τοῖς Γ Δ. θ'. Ἐστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ ΒΓ· ὅτι [ᾧ ὑπερέχει τὸ ΒΑ τοῦ ΑΓ τούτῳ] ὑπερέχει [καὶ] τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ΓΒ τὸν αὐτόν. Ἐστω γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ ἔχον τὸ ΔΕ, τὸ δὲ πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν. καὶ ἔστιν τὸ ΕΖ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστιν τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν. ι'.

7.968

Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἥπερ τὸ Δ τοῦ Β· ὅτι τὰ Α Β ἐλάσσονά ἐστὶν τῶν Γ Δ. Ἐστω γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α Β ἄρα ἴσα ἐστὶν τοῖς Γ Ε Β. ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἥπερ τὸ Δ τοῦ Β, τὸ δὲ Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἐλασσόν ἐστὶν τῆς τῶν Δ Β ὑπεροχῆς, ὥστε τὰ Ε Β ἐλάσσονά ἐστὶν τοῦ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ· τὰ Γ Ε Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστὶν τῶν Γ Δ. ἀλλὰ τὰ Γ Ε Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α Β· τὰ Α Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστὶν τῶν Γ Δ. Ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστροφίον. καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως. Τοῦ ζ'. α'. Ἐστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἀμβλείας ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας, καὶ ἴσας τὰς Α Δ ὀξείας, ὀρθαὶ ταῖς ΒΓ ΕΖ ἤχθωσαν αἱ ΓΗ ΖΘ, ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ὅτι ὅμοιον ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Γεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΗΒ ΕΘ ἡμικύκλια· ἐλεύσεται δὴ καὶ διὰ τῶν Γ Ζ [ἐρχέσθω, καὶ ἔστω τὰ ΗΓΒ ΕΖΘ]· ἦτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΓ ΔΖ τῶν ἡμικυκλίων ἢ οὐ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερόν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα. ἐάν γὰρ λάβω τὰ κέντρα τὰ Μ Ν, καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΜΓ ΝΖ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΓΑ ΝΖΔ γωνίαι· καὶ εἰσὶν αἱ Α Δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΝΖ γωνίᾳ. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία τῇ Ε ἐστὶν ἴση.

7.970

ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶν τὰ τρίγωνα. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτωσαν τὰ ἡμικύκλια κατὰ τινὰ σημεῖα τὰ Κ Λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ ΝΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΚΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΛΟ τῇ ΟΖ. ὅμοιον δὲ τὸ ΑΜΞ τῷ ΔΝΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΛΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων]· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΜ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΝ. καὶ παρὰ ἴσας γωνίας τὰς Α Δ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα

ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΜΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΝΖ γωνία. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ Ε.
ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ καθ' ὑπόθεσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.
Συμφανὲς δὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτῶ· ὄντος ὁμοίου τοῦ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ, καὶ ὀρθῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΗ
ΕΖΘ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ἔστιν
γὰρ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ
πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔΖ· καὶ ὁ συνημμένος.

7.972 β'. Ἐστω δύο ὅμοια τμήματα μείζονα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ ΓΔ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ
ΕΖΗ ΘΚΛ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ· δεικτέον ὅτι ὁμοία ἐστὶν ἡ ΒΖ
περιφέρεια τῇ ΔΚ περιφερείᾳ. Εἰλήφθω τὰ κέντρα τὰ Μ Ν, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ ΜΟ ΝΠ
ΝΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ ΝΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΟΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΡΝΔ γωνία (ἴσαι γὰρ
εἰσὶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν, ὥστε καὶ ἡμίσειαι). καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ Ο Ρ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ
ΜΒΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΡ γωνία. ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ ΓΔ παράλληλοι αἱ ΖΣ ΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
ΜΖ ΝΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΜΣΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΤΚ γωνία. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ,
οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΠΛ πρὸς ΛΚ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΗΞ
πρὸς ΞΖ, τουτέστιν ἡ ΜΒ πρὸς ΜΣ, τουτέστιν [ὡς] ἡ ΖΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΛΠ πρὸς ΚΠ,
τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ, τουτέστιν ἡ ΚΝ πρὸς ΝΤ. καὶ εἰσὶν αἱ μὲν ὑπὸ ΜΣΖ ΝΤΚ ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ
ΜΖΣ ΝΚΤ ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΣΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΤΝΚ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια
τῇ ΔΚ περιφερείᾳ. γ'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας, καὶ
διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ ΕΔΘ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΗ πρὸς τὸ
ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι ὁμοιόν ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ
τριγώνῳ.

7.974 Γεγράφθω γὰρ περὶ τὰ ΑΒΗ ΔΕΘ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ ΒΗΑ ΕΘΔ [ὅμοια ἄρα ἐστίν]· ἦτοι
δὴ ἐφαπτόνται αἱ ΑΓ ΔΖ τῶν τμημάτων ἢ οὐ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ μὲν
ὑπὸ ΒΓΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ ΑΗ τὴν ΑΚ, τῷ ὑπὸ τῶν ΗΓΚ, τὸ δὲ
ὑπὸ τῶν ΕΖΘ τῷ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω τὴν ΔΛ τῇ ΔΘ, τῷ ὑπὸ ΘΖΛ· ὥστε ἴση
ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΖΛ. καὶ ὀρθαὶ αἱ ΑΓ ΔΖ· διπλὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΚ γωνία
τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΚ ΕΔΛ (ἴση γὰρ
ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΕΔΘ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΑΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΛ)· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ ἄρα
ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ Ζ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, ὅπερ· ~
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ, ἀλλὰ τεμνέτωσαν κατὰ τὰ Μ Ν σημεία. ἔστιν οὖν ὡς τὸ
ὑπὸ τῶν ΑΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖΝ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΝΖ πρὸς ΖΔ. καὶ ἔστιν ὁμοία μείζονα τμήματα τὰ ΒΑΗ ΕΔΘ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ
ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΘ περιφερείᾳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ Ε· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ
τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

7.976 Ἄλλως τὸ αὐτό. δ'. Ἐστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ Ζ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ
ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ ΕΔΘ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ
πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ὅτι ὁμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ἤχθωσαν ταῖς ΑΗ ΔΘ ὀρθαὶ αἱ
ΑΚ ΔΛ· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΑΓ τῷ ὑπὸ ΗΓΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ· ἔστιν οὖν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ
πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΚ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΛ,
τουτέστιν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ. ἤχθωσαν ταῖς ΑΚ ΔΛ παράλληλοι αἱ ΓΜ ΖΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ,
οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΔ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Γ Ζ σημείοις, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Μ Ν
γωνίαι ταῖς ὑπὸ ΒΑΚ ΕΔΛ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ
τριγώνῳ. ε'. Ἐστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Β Ε σημείοις γωνίας, καὶ
διήχθωσαν αἱ ΒΗ ΕΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ ΔΘΕ, ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ πρὸς τὸ
ἀπὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ· δεικτέον ὅτι ὁμοιόν ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ

ΔΕΖ τριγώνω. Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ Κ Λ· φανερόν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Η Θ σημείων εἰσίν.

7.978 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ μὲν Κ μεταξύ τῶν Γ Η σημείων, τὸ δὲ Λ μεταξύ τῶν Δ Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΗ ΕΘ ἐπὶ τὰ Μ Ν σημεία, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΚΕ· πεσεῖται ἄρα μεταξύ τῶν Η Β, ἀμβλεῖα τε γίνεται ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΔΘΕ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΕ γωνία· ὁξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΝ, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΝ κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξύ τῶν Θ Ν. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΛΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΕ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΝΟ τῆς ΘΕ· πολλῶ ἄρα ἡ ΝΘ τῆς ΘΕ ἐστὶν μείζων, καὶ τὸ ὑπὸ ΝΘΕ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΘΖ, μείζον ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΕΘ τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ἔστιν γὰρ καὶ ἔλασσον, ἐπειδὴ περ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΜΗ τῆς ΗΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΗΒ τοῦ ἀπὸ ΗΒ· οὐκ ἄρα τοῦ Κ κέντρου ὄντος μεταξύ τῶν Η Γ, τὸ Λ ἔσται μεταξύ τῶν Δ Θ. ἔστω οὖν μεταξύ τῶν Θ Ζ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἦχθω ἡ ΛΟ κάθετος. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΜΗΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΝΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, τουτέστιν ἡ ΝΘ πρὸς ΘΕ, καὶ τέτμηνται αἱ ΒΜ ΝΕ δίχα τοῖς Ξ Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΕΟ πρὸς ΟΘ.

7.980 ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΗΞ πρὸς ΞΚ, οὕτως ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΛ (ὀρθαὶ μὲν γὰρ αἱ Ξ Ο, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Η Θ σημείοις γωνίαι)· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΚ, οὕτως ἡ ΕΟ πρὸς ΟΛ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΞ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΛΟ γωνία, ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΞΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΛΘ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΗ ὅλη τῇ ὑπὸ ΕΛΘ ἐστὶν ἴση. καὶ τὰ ἡμίση καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ τῶν ΔΖΕ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ Β Ε γωνίαι· ὁμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνω. φανερόν δὲ καὶ τὸ τοῦτω ἀναστροφίον, ἐὰν ᾗ ὁμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνω, τὸ δὲ ΗΒΓ τῷ ΘΕΖ, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ [διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων]. ζ'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἴσας ἔχοντα τὰς Α Λ γωνίας μὴ ὀρθὰς δέ, καὶ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ, ἔστω τε τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ, καὶ ἔστω τῶν ΒΓ ΕΖ εὐθειῶν μείζονα τμήματα τῇ ΒΗ ΕΘ· λέγω ὅτι ὁμοιόν ἐστὶν τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ. Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ Λ σημεία, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Μ Ν, καὶ ἀπὸ αὐτῶν ἐπὶ τὰς ΑΚ ΒΓ ΔΛ ΕΖ κάθετοι αἱ ΜΞ ΜΟ ΝΠ ΝΡ.

7.982 ἔστιν δὴ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς προγεγραμμένοις ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΜ ΔΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΒΜ ΕΝ. ἐπεὶ οὖν ὁμοιόν ἐστι τὸ ΒΑΓ τμήμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚΓ τμήμα λοιπῷ τῷ ΕΛΖ τμήματι ὁμοιόν ἐστὶν· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαὶ ἴσαι εἰσίν, καὶ εἰσὶν αὐτῶν καὶ ἡμίσειαι ἴσαι· αἱ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ ΕΝΡ ἄρα γωνίαὶ ἴσαι εἰσίν [ἐπὶ τῆς πρώτης δυάδος τῶν πτώσεων, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐκ παρακειμένου δηλονότι ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΝΡ· καὶ γὰρ αἱ ἐν τοῖς ΒΑΓ ΕΔΖ τμήμασιν γωνίαὶ]. γίνεται οὖν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς ΜΟ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΟ, οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΡ. ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΟ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΡΝ πρὸς ΝΤ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ μὲν αἱ Ο Ρ γωνίαι, ὁξεῖα δὲ ἑκατέρα τῶν Σ Τ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΟΜΣ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΡΝΤ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ τῇ ὑπὸ ΕΝΡ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΣ ἄρα τῇ ὑπὸ τῶν ΕΝΤ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ Γ γωνία τῇ Ζ ἐστὶν ἴση· ὁμοια ἄρα ἐστὶν πάντα πᾶσιν. ζ'.

7.984

Δυνατὸν δὲ καί, τῆς μιᾶς πτώσεως [ἢ τῶν ἀμβλειῶν ἢ ὀξειῶν] προγεγραμμένης τῆς δείξεως, τὸ λοιπὸν ἀποδοῦναι οὕτως. ὑποκείσθω γὰρ ἀποδεδεῖχθαι οὐσῶν ἴσων ἀμβλειῶν τῶν γωνιῶν τὸ πρότερον κατὰ τὸν προγεγραμμένον τρόπον, καὶ ἔστω, δυεῖν ὀξειῶν οὐσῶν ἴσων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ, δεῖξαι ὅτι ὅμοια τὰ τρίγωνα. καὶ πάλιν περιγεγράφωσαν οἱ κύκλοι καὶ ἐκβεβλημένων τῶν ΑΗ ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ Λ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ ΕΛ ΛΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ ΒΚΓ ΕΛΖ γωνίαι ἀμβλεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΔΘΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. ἔστιν δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. καὶ εἰσὶν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ ΕΛΖ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ ΚΗ ΛΘ διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΒΚΗ τρίγωνον τῷ ΕΛΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΓΚΗ τῷ ΖΛΘ, ὥστε καὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ, ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ὅλῳ τῷ ΔΕΖ ἐστὶν ὅμοιον.

7. 986

ἡ'. θέσει δεδομένων τῶν ΑΒ ΑΓ, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν ΔΕ καὶ ποιεῖν δοθεῖσαν τὴν ΔΕ. Γεγονέτω, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΖ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστὶν. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ. διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΔΕ. καὶ δοθεῖσα ἐστὶν ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΑΖ. ἀλλὰ καὶ θέσει· καὶ δοθέν ἐστὶν τὸ Α· δοθέν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ Ζ. διὰ δὴ δεδομένου τοῦ Ζ παρὰ θέσει τῇ ΑΒ ἦκται ἡ ΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΓ· δοθέν ἄρα ἐστὶν τὸ Ε. καὶ διὰ αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ. Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δεδομένοι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ Η, παρ' ἣν δὲ ἄγεται ἔστω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ Η ἴση κείσθω ἡ ΑΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ τῇ Η ἐστὶν ἴση, τουτέστιν τῇ δοθείσῃ, καὶ ἡ ΔΕ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ Η τῇ δοθείσῃ· ἡ ΔΕ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερόν ὅτι μόνη αἰεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τοῦ Α τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων. θ'.

7. 988

Ἔστω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒΓ ΕΒΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΓ ἐφεστῶτα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ ὀρθά· λέγω ὅτι ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ ΒΕ ΒΓ εὐθεῖαι. Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΗΒ· καὶ τῷ ΕΒΖ ἄρα ἐπιπέδῳ ἔσται ὀρθὴ ἡ ΗΒ, ὥστε καὶ τῇ ΒΕ ἐστὶν ὀρθή. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΒ. ἔστι δὲ καὶ τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἡ ΒΗ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΑΒ ΒΕ ΒΓ ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ἀφῆς τῆς Β ἐφέστηκεν· διὰ ἄρα τὸ ια' στοιχείων ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ ΒΕ ΒΓ εὐθεῖαι. ι'. Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Α Δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ ΔΘΕ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ· ὅτι ὅμοιόν ἐστὶν τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΚΗ γωνία. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἐν τεταραγμένη ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΗ γωνία τῇ Ζ γωνία. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΚΗ γωνία ἴση τῇ Ε, καὶ εἰσὶν αἱ Ε Ζ ὀρθῇ ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ γωνία ἐστὶν ὀρθή.

7. 990

ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὀρθή· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶν τὰ Α Β Γ Κ σημεία· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καθ' ὑπόθεσιν ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΔΘΕ γωνία· ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ ἐστὶν ὅμοιον. Ἄλλως ἄμεινον. ια'. Τετμήσθωσαν δίχα τοῖς Κ Λ σημείοις αἱ ΒΓ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΔΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι γίνεται ὡς ἡ ΓΚ,

τουτέστιν ἡ ΑΚ, πρὸς ΚΗ, οὕτως ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ ΔΛ, πρὸς ΛΘ. καὶ εἰσὶν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς Η Θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΚΑΗ ΛΔΘ ἑκατέρα ἅμα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΘ γωνίᾳ. καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Η γωνία τῇ Θ ἴση ἐστίν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον. Τοῦ ζ' ἡ'. α'. Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΑ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΖΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΕΔΓ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΖ, ὧν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ ΑΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΔΑ, τουτέστιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΓΒ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ, τουτέστιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΒΖ τετραγώνοις, λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΖΒ ΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΕΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΖΒΓ, ὅπερ· ~ β'.

7.992 Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΑΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΕΑΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΖ, ἔστιν δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ ΑΖ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ ΔΓ ΓΒ ΒΖ, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΔΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΒΖ, ὥστε καὶ τὸ ἅπαξ τῷ ἅπαξ, γ'. Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἔστω μείζω τμήματα τὰ ΑΕ ΓΖ· ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ. Τετμήσθωσαν ὅλαι αἱ ΑΒ ΓΔ δίχα τοῖς Η Θ σημείοις· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῆς ΔΘ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ μείζον τοῦ ἀπὸ ΔΘ τετραγώνου.

7.994 ἔστιν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΖΔ· καὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἄρα μείζον ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΘΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ τῆς ΘΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ μείζων τῆς ΓΘ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλης τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. δ'. Ἰσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, ἴσων οὖσων τῶν ΑΒ ΓΔ· ὅτι τὰ μείζονα τμήματα τὰ ΑΕ ΓΖ ἴσα ἐστίν. (τὸ δ' ἐφεξῆς· τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΓΔ δίχα τοῖς Η Θ ~) ε'. Ἐστω μὲν μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΔΖ, οὔσης μείζονος τῆς μὲν ΑΒ τῆς ΒΕ, τῆς δὲ ΓΔ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶν τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ ἄρα μείζων ἐστίν. τῆς τῶν ΓΔ ΕΒ ὑπεροχῆς, ἀλλὰ ἡ τῶν ΓΔ ΕΒ μείζων ἐστὶν τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς (ἐλάσσων γάρ ἐστὶν ἡ ΕΒ τῆς ΔΖ), ὥστε ἡ τῶν ΑΒ ΒΕ ὑπεροχὴ πολλῶ μείζων ἐστὶν τῆς τῶν ΓΔ ΔΖ ὑπεροχῆς. ζ'. Ἐστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ. Ἐπεὶ γὰρ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑ ΔΕ διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΓ τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ ΔΖ διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΓ ΔΕ τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ διπλάσιόν ἐστίν· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ὑπὸ ΑΒ ΔΕ. ζ'. Ἐστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, ἀναστρέψαντί ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ.

7.996 ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΕ. ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΔΘ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ πρὸς τὸ ἀπό, οὕτως τὸ ὑπὸ πρὸς τὸ ἀπό. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΖ. η'. Ἐστω δοθέντα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ τῶν ἀπὸ ΑΒ ΒΓ ὑπεροχὴ· ὅτι δοθεῖσά ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ. Κείσθω γὰρ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΔ (ὑπεροχὴ γάρ ἐστὶν τῶν ἀπὸ ΑΒ ΒΓ τετραγώνων). ἀλλὰ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΑΔ δοθέν ἐστίν

(ἐπεὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΔ δοθέν ἐστίν)· δοθέν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ ΑΔ, ὥστε δοθεῖσά ἐστι συναμφοτέρος ἢ ΓΑ ΑΔ.

7.998 καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἢ ΒΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἢ ΒΑ, ὥστε καὶ ἢ ΒΓ δοθεῖσά ἐστίν. Θ'. Ἐστω ἴση ἢ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἢ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς ΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς ΕΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΕ. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ· ἔσται ἄρα δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ. Ι'. Ἐστω ἴση ἢ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἢ ΒΔ τῆς ΒΕ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΕ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση μὲν ἐστὶν ἢ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἢ ΒΔ τῇ ΒΕ, ἢ ΓΔ ἄρα μείζων ἐστὶν τῆς ΑΕ, ὥστε καὶ ἢ ΓΕ μείζων ἐστὶν τῆς ΑΔ. Ἐλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ ΓΕΒ, μείζων δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ τοῦ ὑπὸ ΒΑΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΕ. ΙΑ'.

7.1000 Ἐστω δὲ νῦν τὸ τοῖς προηγουμένοις ἀναστροφίον δεῖξαι. οὔσης ἴσης τῆς μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, τῆς δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ· δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἢ ΖΕ πρὸς ΕΘ. Κεῖσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΑΗΒ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΗ ΑΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΘΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΘ ΔΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΚ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἢ ΑΚ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛ ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστιν ἢ ΔΛ πρὸς ΕΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΖΕ πρὸς ΕΔ· αἱ ΑΚ ΒΓ ΒΚ ἄρα ταῖς ΔΛ ΕΖ ΕΛ ὁμοταγεῖς εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ [τουτέστιν ὡς ἢ ΚΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἢ ΛΖ πρὸς ΖΕ]. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΓΗ, ἀμφοτέρων ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΗΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ. καὶ ἔστιν τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ ΒΗ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΚΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἢ ΛΕ πρὸς ΕΘ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΖΕ πρὸς ΕΘ.

7.1002 ΙΒ'. Ἐστω ἴση ἢ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἢ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἢ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχέτω ἥπερ ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως καὶ ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω. Ἐπεὶ γὰρ ἢ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΕΖ πρὸς ΖΘ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω· ὥστε καὶ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΔΕ πρὸς ΕΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζω· καὶ ἢ ΗΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΘΔ πρὸς ΔΕ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω. καὶ ἔστιν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἢ ΔΕ πρὸς ΕΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΔΘ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσω. ΙΓ'. Ἐστω πάλιν ἴση ἢ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἢ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἔτι δὲ ἢ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἔχέτω ἥπερ ἢ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι καὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ ἀναστροφήν καὶ διαίρεσιν ἢ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστιν τὴν ΒΓ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΕΖ, ἀναστρέψαντι καὶ διελόντι ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

7.1004

ιδ'. Ἰση ἡ μὲν AB τῇ BG, ἡ δὲ ΔE τῇ EZ, καὶ ἔτι ἡ AH πρὸς τὴν HB μείζονα λόγον ἔχέτω ἢ περ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘE· ὅτι ἡ BH πρὸς τὴν HG ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ EΘ πρὸς τὴν ΘZ. Ἐπεὶ γὰρ κατὰ διαίρεσιν ἡ AB, τουτέστιν ἡ BG, πρὸς τὴν BH μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΔE, τουτέστιν ἡ EZ, πρὸς τὴν EΘ, ἀναστρέψαντι καὶ κατὰ διαίρεσιν ἡ BH πρὸς τὴν HG ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ EΘ πρὸς τὴν ΘZ. Εἰς τοὺς πρὸς ἐπιφανείᾳ. α'. Ἐὰν ᾗ εὐθεῖα ἡ AB, καὶ παρὰ θέσει ἡ ΓΔ, καὶ ᾗ λόγος τοῦ ὑπὸ AΔB πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, τὸ Γ ἄπτεται κωνικῆς γραμμῆς. ἐὰν οὖν ἡ μὲν AB στερεθῇ τῆς θέσεως, καὶ τὰ A B στερεθῇ τοῦ δοθέντος εἶναι, γένηται δὲ πρὸς θέσει εὐθεῖα ταῖς AE EB, τὸ Γ μετεωρισθὲν γίνεται πρὸς θέσει ἐπιφανείας. τοῦτο δὲ ἐδείχθη. β'. Ἐὰν ᾗ θέσει εὐθεῖα ἡ AB, καὶ δοθὲν τὸ Γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διαχθῇ ἡ ΔΓ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ ἡ ΔE, λόγος δὲ ᾗ τῆς ΓΔ πρὸς ΔE, τὸ Δ ἄπτεται θέσει κωνικῆς τομῆς.

7.1006 δεικνύται δὲ ὅτι γραμμῆς μέρος ποιεῖ τὸν τόπον. δειχθήσεται δὲ οὕτως, προγραφέντος τόπου τοῦδε. γ'. Δύο δοθέντων τῶν A B, καὶ ὀρθῆς τῆς ΓΔ, λόγος ἔστω τοῦ ἀπὸ AΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ ΔB· λέγω ὅτι τὸ Γ ἄπτεται κώνου τομῆς, ἐὰν τε ᾗ ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον ἢ μείζων πρὸς ἐλάσσονα ἢ ἐλάσσων πρὸς μείζονα. Ἔστω γὰρ πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον· καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ AΔ τοῖς ἀπὸ ΓΔ ΔB, κείσθω τῇ BΔ ἴση ἡ ΔE· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ BAE τῷ ἀπὸ ΔΓ. τετμήσθω δίχα ἡ AB τῷ Z· δοθὲν ἄρα τὸ Z. καὶ ἔστιν διπλῇ ἡ AE τῆς ZΔ, ὥστε τὸ ὑπὸ BAE τὸ δίς ἐστὶν ὑπὸ τῶν AB ZΔ. καὶ ἔστιν ἡ διπλῇ τῆς AB δοθείσα· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ZΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ Γ ἄρα ἄπτεται θέσει παραβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Z. δ'. Συντεθήσεται δὴ ὁ τόπος οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα A B, ὁ δὲ λόγος ἔστω ἴσος πρὸς ἴσον, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα τῷ Z, τῆς δὲ AB διπλῇ ἔστω ἡ P, καὶ θέσει οὔσης εὐθείας τῆς ZB πεπερασμένης κατὰ τὸ Z, τῆς δὲ P δεδομένης τῷ μεγέθει, γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ZB παραβολῇ ἡ HZ, ὥστε, οἷον ἐὰν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ληφθῇ ὡς τὸ Γ, κάθετος δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ P ZΔ τῷ ἀπὸ ΔΓ, καὶ ἦχθω ὀρθὴ ἡ BH· λέγω ὅτι τὸ ΓH μέρος τῆς παραβολῆς ἐστὶν.

7.1008 Ἦχθω γὰρ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ τῇ BΔ ἴση κείσθω ἡ ΔE. ἐπεὶ οὖν διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν AB τῆς BZ, ἡ δὲ EB τῆς BΔ, διπλῇ ἄρα καὶ ἡ AE τῆς ZΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ BAE ἴσον ἐστὶν τῷ δίς ὑπὸ τῶν AB ZΔ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΔΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ EΔ ἴσον ὃν τῷ ἀπὸ ΔB· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ AΔ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ ΔB· ἡ ZΓH ἄρα γραμμὴ ποιεῖ τὸν τόπον. ε'. Ἔστω δὴ πάλιν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα τὰ A B, καὶ κατήχθω ὀρθὴ ἡ ΔΓ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ἀπὸ AΔ πρὸς τὰ ἀπὸ BΔ ΓΔ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσων πρὸς μείζονα· λέγω ὅτι τὸ Γ ἄπτεται κώνου τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς. Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ AΔ πρὸς τὰ ἀπὸ BΔ ΓΔ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντῳ τοῦ ἀπὸ EΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔB· ἐπὶ μὲν οὖν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσων ἐστὶν ἡ BΔ τῆς ΔE, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζων ἐστὶν ἡ BΔ τῆς ΔE. κείσθω τῇ EΔ ἴση ἡ ΔZ. ἐπεὶ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ AΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ ΔB, καὶ ἔστιν αὐτῷ ὁ αὐτὸς ὁ τοῦ ἀπὸ EΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔB, καὶ λοιπὸς ἄρα τοῦ ὑπὸ ZAE πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ἐστὶν δοθείς.

7.1010 ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶν τῆς EΔ πρὸς ΔB καὶ τῆς ZB πρὸς BΔ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντῳ τῆς AB πρὸς BH· καὶ ὅλης ἄρα τῆς AZ πρὸς ΔH λόγος ἐστὶν δοθείς. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶν τῆς EΔ πρὸς ΔB δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέντῳ τῆς AΘ πρὸς BΘ· λόγος ἄρα καὶ τῆς AB πρὸς BΘ ἐστὶν δοθείς [δοθὲν ἄρα τὸ Θ]· καὶ λοιπὸς ἄρα τῆς AE πρὸς ΘΔ λόγος ἐστὶν δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ ZAE ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔH λόγος ἐστὶν δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ ZAE πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ λόγος ἐστὶν δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ HΔΘ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ἐστὶν δοθείς. καὶ ἔστιν δύο δοθέντα τὰ Θ H· ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης πτώσεως τὸ Γ ἄπτεται ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς. ς'. Συντεθήσεται δὲ ὁ τόπος οὕτως. ἔστω τὰ μὲν δύο δοθέντα σημεῖα τὰ A B, ὁ δὲ δοθείς λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ PT πρὸς τὸ ἀπὸ TΣ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσων πρὸς μείζονα, καὶ τῇ PT ἴση κείσθω ἡ TY, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ YΣ πρὸς τὴν ΣT, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν

ΒΗ, πεποιήσθω δὲ καὶ ὡς ἡ ΡΤ πρὸς τὴν ΤΣ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ΘΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἔλλειψις, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολή, ὥστε, οἷον ἐὰν ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Γ, καὶ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, λόγον εἶναι τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν συνημμένον ἐκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ὁ δοθεὶς λόγος ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, κατήχθω ὀρθὴ ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ἡ ΘΚ ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα. Ἦχθω γὰρ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ὥστε ἔσται ὁ μὲν τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστιν τῷ τῆς ΤΣ πρὸς ΣΥ, ὁ δὲ τῆς ΘΔ πρὸς ΑΕ λόγος ὁ αὐτὸς [ἐστὶν] τῷ τῆς ΤΣ πρὸς ΣΡ (τὸ αὐτὸ γὰρ ἐν τῇ ἀναλύσει ἀπεδείχθη), ὥστε τοῦ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ λόγος συνηπται ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ὁ δοθεὶς λόγος, καὶ ἔστιν ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ συνηπται ἐξ οὗ ὄν ἔχει τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ συνημμένῳ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ, λοιπὸς ἄρα τοῦ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶν τῷ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, τουτέστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ.

7.1012 καὶ πάντα πρὸς πάντα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ ΔΒ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, τουτέστιν ὁ δοθεὶς λόγος, ὥστε τὸ ΘΚ μέρος τῆς τομῆς ποιεῖ τὸν τόπον. Ζ'. Τούτων οὕτως ἐχόντων ἐλευσόμεθα ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. ἔστω θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθέν τὸ Γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διήχθω ἡ ΔΓ, κάθετος ἡ ΔΕ, λόγος δὲ ἔστω τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ· λέγω ὅτι τὸ Δ ἄπτεται κώνου τομῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὁ λόγος ᾗ ἴσος πρὸς ἴσον, παραβολῆς, ἐὰν δὲ ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἐλλείψεως, ἐὰν δὲ μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ὑπερβολῆς.

7.1014 Ἦστω γὰρ πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον, τουτέστιν ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ· δεῖξαι ὅτι τὸ Δ ἄπτεται παραβολῆς. Ἦχθω κάθετος ἡ ΓΖ (θέσει ἄρα ἐστί), τῇ δὲ ΑΒ παράλληλος ἡ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΓ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΖΗ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΔΗ ΗΓ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστί τοῖς ἀπὸ ΔΗ ΗΓ. καὶ ἔστιν θέσει ἡ ΖΓ, καὶ δύο δοθέντα τὰ Ζ Γ· τὸ Δ ἄρα ἄπτεται παραβολῆς· τοῦτο γὰρ προδεδεικται. η'. Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω ἡ τῇ θέσει ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθέν τὸ Γ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ θέσει οὐσης τῆς ΓΖ καὶ δύο δοθέντων τῶν Ζ Γ, εὐρήσθω παραβολὴ ἡ ΔΘ, ὥστε, οἷον ἐὰν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Δ, ἀχθῇ δὲ κάθετος ἡ ΔΗ, ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΗ τοῖς ἀπὸ ΔΗ ΗΓ· λέγω ὅτι ἡ ΔΘ γραμμὴ ποιεῖ τὸν τόπον, τουτέστιν, οἷα τις ἂν διαχθῇ ὡς ἡ ΓΔ καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ. Ἦχθω κάθετος ἡ ΔΗ· διὰ ἄρα τῆς παραβολῆς ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΗ τοῖς ἀπὸ ΔΗ ΗΓ. καὶ ἔστιν τῇ μὲν ΖΗ ἴση ἡ ΕΔ, τοῖς δὲ ἀπὸ ΔΗ ΗΓ ἴσον τὸ ἀπὸ ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ· ἡ ἄρα ΔΘ γραμμὴ ποιεῖ τὸν τόπον. Λήμμα τοῦ ἀναλυομένου.

7.1016. (1n) Ἦστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως. ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΕΗ ΓΕΖ ΒΕΔ· ὅτι ἡ ΒΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ. συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΖΒ πρὸς ΗΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· ὡς ἄρα ἡ ΖΒ πρὸς ΗΓ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· ἴση ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. [ὥστε ἐπιζευχθείσης τῆς ΖΗ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΘ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ ἐστὶν ἴση. καὶ μείζων ἡ ΖΘ εὐθεῖα τῆς ΘΗ· ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΓ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν ΗΙΚ, ἡ ὑπὸ ΒΘΗ γωνία ταῖς ἀπεναντίον ὑπὸ ΘΗΙ ΘΙΗ ἴση οὖσα μείζων ἐστὶν τῆς ὑπὸ ΗΘΙ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΖΒΘ ὀξείας, ὥστε καὶ λοιπὴν τὴν ὑπὸ ΗΒΘ ἐλάσσονα γίνεσθαι τῆς ὑπὸ ΖΒΘ. δίχα ἡ ΖΗ τῷ Α· ὁ ἄρα κέντρω τῷ Α διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ΑΖ ΑΒ ΑΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Δ, καὶ ἔσται ἐν

κύκλω τὸ ΔΖΒΗ τετράπλευρον (τοῦτο γὰρ ἐξῆς). ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα ἡμίσεια ὀρθῆς (καὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΖ ΒΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς).

7.1018

καὶ ὀρθῇ ἡ ὑπὸ ΖΔΗ· λέγω οὖν ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΔΒ ὀρθή ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἦτοι μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. ἔστω πρότερον μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔστω ὀρθῇ ἡ ὑπὸ ΒΔΜ, τῶν ΗΓ ΜΔ ἐκβληθεισῶν καὶ συμπιπτουσῶν κατὰ τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΒΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὁμοίον ἐστὶν τῷ ΜΒΝ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ ἔστιν ἡμίσεια ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΔΖ ΖΔΜ, ὡς ἄρα ἡ ΜΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΝ, τουτέστιν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΝ (δίχα γὰρ τέτμηται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΝ γωνία τῇ ΔΗ)· ὡς ἄρα ἡ ΜΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΝ. πάλιν ἐπεὶ, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ ὑπόκειται, ἡ ΜΖ ἄρα πρὸς ΖΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΝ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ὡς ἡ ΜΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΝ· οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, διὰ τοῦ Δ τῇ ΔΒ πρὸς ὀρθᾶς ἀγαγόντες τὴν ΞΔΟ· ἔσται γὰρ πάλιν ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΟ, καὶ δειχθήσεται ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ πολλῶ ἐλάσσονα λόγον ἔχουσα ἢ περ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ.] Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. Ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΖΒ πρὸς ΗΓ· ἴση ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. Τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθῇ ἡ Β, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΕΖ ΑΕΗ ΒΕΔ· ὅτι ἡ ΒΔ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΑΓ. Γεγονέτω· ὅμοια ἄρα τὰ ΑΒΔ ΒΔΓ τρίγωνα τῷ ὅλῳ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΖΔ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΔΒ.

7.1020

διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΔΗ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΒΔΗ· ὀρθῇ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΗ. ὀρθῇ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΗ· ἐν κύκλῳ ἄρα τὸ ΒΖΔΗ τετράπλευρον. καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. [ἔστιν δὲ διὰ τὸ προδειχθέν.] ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ Η.

8.1022. (1t)

Περιέχει δὲ μηχανικὰ προβλήματα σύμμικτα ἀνθηρά. Ἡ μηχανικὴ θεωρία, τέκνον Ἑρμόδωρε, πρὸς πολλὰ καὶ μεγάλα τῷ ἐν τῷ βίῳ χρήσιμος ὑπάρχουσα πλείστης εἰκότως ἀποδοχῆς ἡξίεται πρὸς τῶν φιλοσόφων καὶ πᾶσι τοῖς ἀπὸ τῶν μαθημάτων περισπούδαστός ἐστιν, ἐπειδὴ σχεδὸν πρώτη τῆς περὶ τὴν ὕλην τῶν ἐν τῷ κόσμῳ στοιχείων φυσιολογίας ἄπτεται. στάσεως γὰρ καὶ φορᾶς σωμάτων καὶ τῆς κατὰ τόπον κινήσεως ἐν τοῖς ὅλοις θεωρηματικῇ τυγχάνουσα τὰ μὲν κινούμενα κατὰ φύσιν αἰτιολογεῖ, τὰ δ' ἀναγκάζουσα παρὰ φύσιν ἔξω τῶν οἰκείων τόπων εἰς ἐναντίας κινήσεις μεθίστησιν ἐπιμηχανωμένη διὰ τῶν ἐξ αὐτῆς τῆς ὕλης ὑποπιπτόντων αὐτῇ θεωρημάτων. τῆς δὲ μηχανικῆς τὸ μὲν εἶναι λογικὸν τὸ δὲ χειρουργικὸν οἱ περὶ τὸν Ἥρωνα μηχανικοὶ λέγουσιν· καὶ τὸ μὲν λογικὸν συνεστάναι μέρος ἕκ τε γεωμετρίας καὶ ἀριθμητικῆς καὶ ἀστρονομίας καὶ τῶν φυσικῶν λόγων, τὸ δὲ χειρουργικὸν ἕκ τε χαλκευτικῆς καὶ οἰκοδομικῆς καὶ τεκτονικῆς καὶ ζωγραφικῆς καὶ τῆς ἐν τούτοις κατὰ χεῖρα ἀσκήσεως· τὸν μὲν οὖν ἐν ταῖς προειρημέναις ἐπιστήμαις ἐκ παιδὸς γενόμενον κἂν ταῖς προειρημέναις τέχναις ἔξιν εἰληφότα πρὸς δὲ τούτοις φύσιν εὐκίνητον ἔχοντα, κράτιστον ἔσεσθαι μηχανικῶν ἔργων εὐρετὴν καὶ ἀρχιτέκτονά φασιν.

8.1024

μὴ δυνατοῦ δ' ὄντος τὸν αὐτὸν μαθημάτων τε τοσοῦτων περιγενέσθαι καὶ μαθεῖν ἅμα τὰς προειρημένας τέχνας παραγγέλλουσι τῷ τὰ μηχανικὰ ἔργα μεταχειρίζεσθαι βουλομένῳ χρῆσθαι ταῖς οἰκείαις τέχναις ὑποχειρίοις ἐν ταῖς παρ' ἑκαστα χρεῖαις. Μάλιστα δὲ πάντων ἀναγκαϊόταται τέχναι τυγχάνουσιν πρὸς τὴν τοῦ βίου χρεῖαν [μηχανικὴ προηγουμένη τῆς ἀρχιτεκτονικῆς] ἢ τε τῶν μαγγαναρίων, μηχανικῶν καὶ αὐτῶν κατὰ τοὺς ἀρχαίους λεγομένων (μεγάλα γὰρ οὗτοι βάρη διὰ μηχανῶν παρὰ φύσιν εἰς ὕψος ἀνάγουσιν ἐλάττονι δυνάμει

κινουῦντες), καὶ ἡ τῶν ὀργανοποιῶν τῶν πρὸς τὸν πόλεμον ἀναγκαίων, καλουμένων δὲ καὶ αὐτῶν μηχανικῶν (βέλη γὰρ καὶ λίθινα καὶ σιδηρὰ καὶ τὰ παραπλήσια τούτοις ἐξαποστέλλεται εἰς μακρὸν ὁδοῦ μήκος τοῖς ὑπ' αὐτῶν γινομένοις ὀργάνοις καταπαλτικοῖς), πρὸς δὲ ταύταις ἡ τῶν ἰδίως πάλιν καλουμένων μηχανοποιῶν (ἐκ βάθους γὰρ πολλοῦ ὕδωρ εὐκολώτερον ἀνάγεται διὰ τῶν ἀντληματικῶν ὀργάνων ὧν αὐτοὶ κατασκευάζουσιν). καλοῦσι δὲ μηχανικοὺς οἱ παλαιοὶ καὶ τοὺς θαυμασιουργοὺς, ὧν οἱ μὲν διὰ πνευμάτων φιλοτεχνοῦσιν, ὡς Ἑρῶν πνευματικοῖς, οἱ δὲ διὰ νευρίων καὶ σπάρτων ἐμψύχων κινήσεις δοκοῦσι μιμεῖσθαι, ὡς Ἑρῶν αὐτομάτοις καὶ ζυγίοις, ἄλλοι δὲ διὰ τῶν ἐφ' ὕδατος ὀχουμένων, ὡς Ἀρχιμήδης ὀχουμένοις, ἢ τῶν δι' ὕδατος ὠρολογίων, ὡς Ἑρῶν ὑδρείοις, ἃ δὴ καὶ τῇ γνωμονικῇ θεωρίᾳ κοινωνοῦντα φαίνεται.

8.1026 μηχανικοὺς δὲ καλοῦσιν καὶ τοὺς τὰς σφαιροποιΐας [ποιεῖν] ἐπισταμένους, ὅφ' ὧν εἰκῶν τοῦ οὐρανοῦ κατασκευάζεται δι' ὁμαλῆς καὶ ἐγκυκλίου κινήσεως ὕδατος. Πάντων δὲ τούτων τὴν αἰτίαν καὶ τὸν λόγον ἐπεγνωκέναι φασὶν τινες τὸν Συρακόσιον Ἀρχιμήδη· μόνος γὰρ οὗτος ἐν τῷ καθ' ἡμᾶς βίῳ ποικίλῃ πρὸς πάντα κέχρηται τῇ φύσει καὶ τῇ ἐπινοίᾳ, καθὼς καὶ Γεμῖνος ὁ μαθηματικὸς ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν μαθημάτων τάξεως φησιν. Κάρπος δὲ πού φησιν ὁ Ἀντιοχεὺς Ἀρχιμήδῃ τὸν Συρακόσιον ἔν μόνον βιβλίον συντεταχέναι μηχανικὸν τὸ κατὰ τὴν σφαιροποιΐαν, τῶν δὲ ἄλλων οὐδὲν ἡξιωκέναι συντάξαι. καίτοι παρὰ τοῖς πολλοῖς ἐπὶ μηχανικῇ δοξασθεὶς καὶ μεγαλοφυῆς τις γενόμενος ὁ θαυμαστὸς ἐκεῖνος, ὥστε διαμεῖναι παρὰ πᾶσιν ἀνθρώποις ὑπερβαλλόντως ὑμνούμενος, τῶν τε προηγουμένων γεωμετρικῆς καὶ ἀριθμητικῆς ἐχομένων θεωρίας [καὶ] τὰ βραχύτατα δοκοῦντα εἶναι σπουδαίως συνέγραψεν· ὅς φαίνεται τὰς εἰρημένας ἐπιστήμας οὕτως ἀγαπήσας ὡς μηδὲν ἔξωθεν ὑπομένειν αὐταῖς ἐπεισάγειν. αὐτὸς δὲ Κάρπος καὶ ἄλλοι τινὲς συνεχρήσαντο γεωμετρίᾳ καὶ εἰς τέχνας τινὰς εὐλόγως· γεωμετρία γὰρ οὐδὲν βλάπτεται, σωματοποιεῖν πεφυκυῖα πολλὰς τέχνας, διὰ τοῦ συνεῖναι αὐταῖς [μήτηρ οὖν ὥσπερ οὔσα τεχνῶν οὐ βλάπτεται διὰ τοῦ φροντίζειν ὀργανικῆς καὶ ἀρχιτεκτονικῆς· οὐδὲ γὰρ διὰ τὸ συνεῖναι γεωμετρίᾳ καὶ γνωμονικῇ καὶ μηχανικῇ καὶ σκηνογραφίᾳ βλάπτεται τι], τούναντίον δὲ προάγουσα μὲν ταύτας φαίνεται, τιμωμένη δὲ καὶ κοσμουμένη δεόντως ὑπ' αὐτῶν.

8.1028 Τοιαύτης δὲ τῆς μηχανικῆς ἐπιστήμης ὁμοῦ καὶ τέχνης ὑπαρχούσης καὶ εἰς τοσαῦτα μέρη διηρημένης καλῶς ἔχειν ἐνόμισα τὰ τε λόγῳ γεωμετρικῶ θεωρούμενα [καὶ ἀναγκασιότατα περὶ τὴν τῶν βαρῶν κίνησιν κείμενα δὲ] παρὰ τοῖς παλαιοῖς καὶ τὰ ὅφ' ἡμῶν εὐχρήστως ἀνευρημένα θεωρήματα συντομώτερον καὶ σαφέστερον ἀναγράψαι βελτίονί τε λόγῳ τοῦ παρὰ τοῖς πρότερον ἀναγεγραμμένου συντάξαι, οἷον βάρους δοθέντος ὑπὸ δοθείσης [ὑποδοχῆς] ἀγομένου δυνάμεως ἐν τῷ παρὰ τὸν ὀρίζοντα ἐπιπέδῳ, καὶ ἐτέρου ἐπιπέδου κεκλιμένου πρὸς τὸ ὑποκείμενον δοθείσαν γωνίαν ὑποτιθέντος, εὑρεῖν τὴν δυνάμιν ὅφ' ὅσης ἀχθήσεται τὸ βάρος ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ (τοῦτο δὲ χρήσιμον τοῖς μηχανικοῖς μαγγαναρίοις προσθέντες γὰρ τῇ εὑρεθείσῃ δυνάμει ἐτέραν τινὰ δυνάμιν ἀνδρῶν θαρσοῦντες ἀνάγουσιν τὸ βάρος), καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ (διὰ γὰρ τοῦ θεωρήματος τούτου πᾶν τὸ δοθὲν στερεὸν σχῆμα κατὰ τὸν δοθέντα λόγον αὖξεται τε καὶ μειοῦται), καὶ πῶς δυνατόν ἐστι τυμπάνου δοθέντος καὶ τοῦ πλήθους τῶν σκυταλῶν αὐτοῦ [δοθέντων ἢ ὀδόντων] παραθεῖναι αὐτῷ τύμπανον δοθὲν ἔχον τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων καὶ εὑρεῖν τὴν διάμετρον τοῦ παρατιθεμένου τυμπάνου (τοῦτο γὰρ χρήσιμον εἰς πολλὰ καὶ τῇ τῶν μηχανοποιῶν τέχνῃ διὰ τὴν παράθεσιν τῶν σκυταλωτῶν τυμπάνων). ἕκαστον δὲ τούτων ἐν τῷ οἰκείῳ τόπῳ γενήσεται φανερόν μετὰ καὶ ἄλλων χρησίμων ἀρχιτέκτονι καὶ μηχανικῶ, ἐὰν πρότερον τὰ συνέχοντα τὴν κεντροβαρικήν πραγματείαν εἴπωμεν ἐξῆς. Τί μὲν οὖν ἐστὶν τὸ βαρὺ καὶ τὸ κοῦφον, καὶ τίς αἰτία τῆς ἄνω καὶ κάτω τοῖς σώμασι φορᾶς, καὶ αὐτὸ γε τὸ ἄνω καὶ

κάτω τίνος ἐννοίας ἔχεται καὶ τίσιν ἀφώρισται πέρασιν, οὐδὲν δεῖ λέγεσθαι παρ' ἡμῶν τὸ νῦν, ἐπειδὴ περὶ τούτων ἐν τοῖς μαθηματικοῖς ὑπὸ τοῦ Πτολεμαίου δεδήλωται, τὸ δὲ κέντρον τοῦ βάρους ἐκάστου σώματος, ὃ τῆς κεντροβαρικῆς πραγματείας ἀρχὴ καὶ στοιχεῖόν ἐστιν, ἐξ ἧς καὶ τὰ λοιπὰ μέρη τῆς μηχανικῆς ἀνήρτηται, τί ποτ' ἐστὶν καὶ τί βούλεται λεκτέον· ἐκ τούτου γάρ, οἶμαι, καὶ τὰ λοιπὰ τῶν ἐν τῇ πραγματείᾳ θεωρουμένων ἔσται σαφῆ.

8.1030 λέγομεν δὲ κέντρον βάρους ἐκάστου σώματος εἶναι σημεῖόν τι κείμενον ἐντός, ἀφ' οὗ κατ' ἐπίνοιαν ἀρτηθὲν τὸ βάρος ἡρεμεῖ φερόμενον καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν [οὐ μὴ περιτρεπόμενον ἐν τῇ φορᾷ]. τοῦτο δὲ τὸ σημεῖον οὐ μόνον ἐν τοῖς τεταγμένοις ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀτάκτως ἐσχηματισμένοις εὐρίσκεται σώμασιν ὑπάρχον, ἐφόδῳ τινὶ θεωρούμενον τοιαύτη. α'. Ὑποκείσθω γὰρ ἐπίπεδον ὀρθὸν τὸ ΑΒΓΔ νεῦον εἰς τὸ τοῦ παντὸς κέντρον, ἐφ' ὃ καὶ τὰ βάρους ἔχοντα πάντα τὴν ροπὴν ἔχειν δοκεῖ, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἐφ' οὗ βεβήκαμεν ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ τι τῶν βάρους ἐχόντων σωμάτων τιθῆται κατὰ τῆς ΑΒ εὐθείας οὕτως, ὥστε τετμηθῆται πάντως ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐκβαλλομένου, ἔξει ποτὲ θέσιν τοιαύτην, ὥστε μένειν ἀπερίτρεπτον καὶ μὴ ἀποπίπτειν. γενομένου δὲ τούτου ἐὰν νοηθῇ τὸ ΑΒΓΔ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον, τεμεῖ τὸ ἐπικείμενον σῶμα εἰς ἰσόρροπα δύο μέρη, οἷον περὶ ἄρτημα τὸ ἐπίπεδον ἰσορροποῦντα. πάλιν δὴ τὸ βάρος μετατεθέν, ὥστε καθ' ἕτερον μέρος ψαύειν τῆς ΑΒ εὐθείας, ἔξει ποτὲ θέσιν περιτρεπόμενον ὥστε μένειν ἀφεθὲν καὶ μὴ ἀποπίπτειν. ἐὰν οὖν πάλιν νοηθῇ τὸ ΑΒΓΔ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον, εἰς ἰσορροποῦντα μέρη τεμεῖ τὸ βάρος καὶ συμπεσεῖται τῷ πρότερον εἰς ἰσόρροπα τέμνοντι τὸ αὐτὸ βάρος ἐπιπέδῳ· εἰ γὰρ μὴ τεμεῖ, τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἰσόρροπα καὶ ἀνισόρροπα γενήσεται ἀλλήλοις, ὅπερ ἄτοπον.

8.1032 β'. Τούτων δὴ προειρημένων νοείσθω πάλιν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ὀρθὴ πρὸς τὸ ἐφ' οὗ βεβήκαμεν ἐπίπεδον, εἰς τὸ τοῦ παντὸς κέντρον δηλονότι νεύουσα, καὶ τὸ βάρος ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Α σημείου τιθέσθω, οἷον ὑποθέματι τῇ ΑΒ εὐθείᾳ χρώμενον [στήσεται δὴποτε κατὰ τοῦ Α σημείου ὥστε μένειν, εἴ γε δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ δι' αὐτῆς ἐπιπέδου τὸ βάρος ἡρεμεῖν ἐδύνατο]. ἐὰν δὴ μένοντος αὐτοῦ ἐκβληθῇ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, ἐναποληφθήσεται τι μέρος αὐτῆς. ἐν τῷ ὑποκειμένῳ σχήματι. νοείσθω δὴ τοῦτο μένον, καὶ πάλιν καθ' ἕτερον μέρος ἐπικείσθω τῇ εὐθείᾳ τὸ βάρος ὥστε ἡρεμεῖν· λέγω δὴ ὅτι ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΒ εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ πρότερον ἐναπειλημμένῃ. εἰ γὰρ μὴ συμπεσεῖται, δυνήσεται τινα δι' ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐκβληθέντα ἐπίπεδα μὴ συμπεσεῖν ἀλλήλοις ἐντὸς τοῦ σχήματος, καὶ ἐκάτερον αὐτῶν [ἐφαρμοζόμενον τῷ διὰ τῆς ΑΒ ἐπιπέδῳ] διελεῖν τὸ βάρος εἰς ἰσόρροπα καὶ ἀνισόρροπα τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἄτοπον· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ εἰρημέναι εὐθεῖαι ἐντὸς τοῦ σχήματος. ὁμοίως δὲ καὶ κατ' ἄλλας θέσεις τιθῆται τὸ βάρος ἐπὶ τοῦ Α σημείου ὥστε μένειν, ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΒ συμπεσεῖται ταῖς πρότερον ἐναπειλημμέναις [ὁμοίως] εὐθείαις. ἐξ οὗ φανερόν ὡς καθ' ἓν σημεῖον ἀλλήλας τεμοῦσιν αἱ τὸν εἰρημένον τρόπον ἐπινοούμεναι εὐθεῖαι· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο κέντρον τοῦ βάρους καλεῖται. καὶ φανερόν ὅτι ἐκ τοῦ κέντρου κατ' ἐπίνοιαν τὸ βάρος ἀρτῶμενον οὐ περιτραπήσεται, μενεῖ δὲ τὴν ἐξ ἀρχῆς φυλάσσον ἡντινοῦν θέσιν ἐν τῇ φορᾷ· πάντα γὰρ δι' αὐτοῦ ἐκβληθέντα ἐπίπεδα εἰς ἰσόρροπα μέρη διαιρεῖ τὸ βάρος, ὥστε μηδεμίαν αἰτίαν ἐπιδέχεσθαι περιτροπῆς [ἰσορρόπων αὐτοῦ κατὰ πᾶσαν θέσιν τῶν ἐφ' ἐκάτερα τοῦ σημείου γινομένων μερῶν]. Τὸ μὲν οὖν μάλιστα συνέχον τὴν κεντροβαρικὴν πραγματείαν τοῦτ' ἂν εἴη, μάθοις δ' ἂν τὰ μὲν στοιχειώδη ὄντα διὰ ταύτης δεικνύμενα τοῖς Ἀρχιμήδους περὶ ἰσορροπιῶν ἐντυχῶν καὶ τοῖς Ἑρῶνος μηχανικοῖς, ὅσα δὲ μὴ γνώριμα τοῖς πολλοῖς γράψομεν ἐφεξῆς, οἷον τὰ τοιαῦτα.

8.1034 γ'. Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τεμνέσθωσαν τοῖς Η Θ Κ σημείοις, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΗ πρὸς ΗΒ, τὴν ΒΘ πρὸς ΘΓ καὶ τὴν ΓΚ πρὸς ΚΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ ΘΚ ΚΗ· ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου καὶ τοῦ ΗΘΚ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστίν. Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ ΓΑ δίχα τοῖς Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΒΕ· τὸ Ζ ἄρα κέντρον

βάρους ἐστὶν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἂν γὰρ τὸ τρίγωνον ἐπὶ τινος ὀρθοῦ ἐπιπέδου ἐπισταθῇ κατὰ τὴν ΑΔ εὐθεΐαν, ἐπ' οὐδέτερον μέρος ῥέψῃ τὸ τρίγωνον διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. ἐπισταθὲν δὲ ὁμοίως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΕ ἐπὶ τοῦ ὀρθοῦ ἐπιπέδου ἐπ' οὐδέτερον μέρος ῥέψῃ διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ ΑΒΕ ΒΓΕ τρίγωνα. εἰ δὲ ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΑΔ ΒΕ ἰσορροπεῖ τὸ τρίγωνον, τὸ ἄρα κοινὸν αὐτῶν σημεῖον τὸ Ζ κέντρον ἔσται τοῦ βάρους. [νοεῖν δὲ δεῖ τὸ Ζ, ὡς προεῖρηται, κείμενον ἐν μέσῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἰσοπαχοῦς τε καὶ ἰσοβαροῦς δηλονότι ὑποκειμένου.] καὶ φανερόν ὅτι διπλασία ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῆς ΖΔ, ἡ δὲ ΒΖ τῆς ΖΕ, καὶ ὅτι ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΔΕ καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ καὶ ἡ ΑΖ πρὸς ΖΔ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι καὶ τὰ ΔΖΕ ΑΒΖ τρίγωνα καὶ τὰ ΓΔΕ ΑΒΓ.

8.1036 ἐπιζευχθεῖσα οὖν ἡ ΔΕ τεμνέτω τὴν ΘΚ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΒ πρὸς ΔΘ καὶ τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΓ, καὶ ἔστιν συνθέντι ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΚ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση ὡς ΓΔ πρὸς ΓΘ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΚ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΔ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΓΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΕ πρὸς ΕΚ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΓΚ πρὸς ΚΕ· σύγκειται ἄρα καὶ ὁ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΒ λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΓ. σύγκειται δ' ἔκ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΕ [καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΑΚ], ὡς δειχθήσεται· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΕ. καὶ εἰσὶν παράλληλοι αἱ ΑΒ ΔΕ, καὶ ἐπεζευγμένοι αἱ ΑΔ ΒΕ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η Ζ Λ· καὶ τοῦτο γὰρ ἐξῆς [εἰ μικρόν ἐστιν]. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΛ, διπλῇ δὲ ἡ ΒΖ τῆς ΖΕ, διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΗΖ τῆς ΖΛ.

8.1038 τριγώνου δὴ τοῦ ΗΘΚ διχοτομία ἡ ΗΛ, καὶ διπλῇ ἡ ΗΖ τῆς ΖΛ· τὸ Ζ ἄρα κέντρον βάρους ἐστὶν τοῦ ΗΘΚ τριγώνου. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ. δ'. Τὸ δὲ ὑπερτεθὲν νῦν δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΕ πρὸς ΕΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΕ ΘΚ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Λ· ὅτι ἴση μὲν ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΚΛ, ὁ δὲ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΓ καὶ τοῦ τῆς ΓΚ πρὸς ΚΕ. Ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΘΚ παράλληλος ἡ ΓΖ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΔΕ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ΔΛ ΛΕ, καὶ ἔξωθεν ἡ ΖΛ, ὁ ἄρα τῆς ΔΛ πρὸς ΛΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΔΛ πρὸς ΑΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΕΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν τῆς ΔΛ πρὸς ΑΖ λόγῳ ὁ αὐτός ἐστὶν ὁ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΓ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΓΖ τῇ ΚΘ, τῷ δὲ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΕ λόγῳ ὁ αὐτός ἐστὶν ὁ τῆς ΓΚ πρὸς ΚΕ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΓΕΖ ΕΚΛ τρίγωνα· καὶ ὁ τῆς ΔΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΘΓ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΓΚ πρὸς ΚΕ. κατὰ ταῦτα δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὁ τῆς ΚΛ πρὸς ΛΘ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΕ πρὸς ΕΓ καὶ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΘ, παραλλήλου ἀχθείσης τῇ ΕΔ διὰ τοῦ Γ τῆς ΓΜ καὶ συμπιπτούσης τῇ ΚΘ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν δύο εὐθεῖαί εἰσιν αἱ ΚΛ ΛΘ ἔξωθεν τῆς ΛΜ λαμβανομένης, ὁ ἄρα τῆς ΚΛ πρὸς ΛΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΛ πρὸς ΛΜ καὶ τοῦ τῆς ΛΜ πρὸς ΛΘ.

8.1040 ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΚΛ πρὸς ΛΜ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΚΕ πρὸς ΕΓ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι πάλιν τὴν ΕΔ τῇ ΓΜ, ὁ δὲ τῆς ΛΜ πρὸς ΛΘ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΘ διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΔΘΛ ΓΘΜ τρίγωνα· ὁ ἄρα τῆς ΚΛ πρὸς ΛΘ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΕ πρὸς ΕΓ, τουτέστιν τοῦ τῆς ΔΘ πρὸς ΔΓ, καὶ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΔΘ λόγου, ὃς τὸν τῆς ἰσότητος λόγον ποιεῖ· καὶ ὁ τῆς ΚΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΘ λόγος τῆς ἰσότητος ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ. ε'. Τὸ λοιπὸν τῶν ὑπερτεθέντων. ἔστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΒΔ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι ἡ διὰ τῶν Ζ Ε Θ εὐθεῖα ἐστίν. Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ διὰ τῶν Ζ Ε Η. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΗΔ, ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς ΓΗ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΗΔ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΘ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΔ, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ζ Ε Θ σημείων εὐθεῖα ἐστίν. ζ'. Παραλληλογράμμου δοθέντος ὀρθογωνίου τοῦ ΑΓ, διαγαγεῖν τὴν ΓΔ ὥστε τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου ἀρτηθέντος ἀπὸ τοῦ Δ τὰς ΑΔ ΒΓ παραλλήλους

εἶναι τῷ ὀρίζοντι. Γεγονέτω· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Δ καὶ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους τοῦ τραπεζίου ἀγομένη εὐθεῖα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸν ὀρίζοντα καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. ἔστω ἡ ΔΛ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΔΛ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ, ἐπεξεύχθω δὲ ἡ ΓΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ κατὰ τὸ Θ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΓΘ τῆς ΘΕ, καὶ ἡ ΕΖ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΘ τέμνουσα τὴν ΔΛ κατὰ τὸ Κ· τὸ μὲν ἄρα Η κέντρον βάρους ἐστὶν τοῦ ΒΔ παραλληλογράμμου, τὸ δὲ Θ κέντρον βάρους τοῦ ΓΔΛ τριγώνου· τοῦ ἄρα ὅλου τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐπὶ τῆς ΗΘ ἐστίν.

8.1042 ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΛ· τὸ Κ ἄρα κέντρον βάρους ἐστὶν τοῦ ΑΒΓΔ τραπεζίου. ἀλλὰ καὶ τοῦ μὲν ΒΔ παραλληλογράμμου τὸ Η, τοῦ δὲ ΔΛΓ τριγώνου τὸ Θ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔΓΛ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΗ. ἐὰν γὰρ ἀνὰ πείραν ἐπινοήσωμεν τοῦ μὲν ΒΔ παραλληλογράμμου [οὕτως ἔχον] τὸ βάρος ἐν ἑαυτῷ πᾶν συνῆχθαι πρὸς τῷ Η, τοῦ δὲ ΓΔΛ τριγώνου πᾶν τὸ βάρος ἐν τῷ Θ συνῆχθαι, γίνεται ὥσπερ ζυγὸς ἡ ΗΘ, ἐκ δὲ τῶν ἄκρων τὰ εἰρημένα βάρη. καὶ ἐὰν τμηθῇ· ἡ ΗΘ κατὰ τὸ Κ, ὥστε εἶναι ὡς τὸ πρὸς τῷ Η βάρος πρὸς τὸ πρὸς τῷ Θ, τουτέστιν τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΔΛ τρίγωνον, οὕτως τὴν ΘΚ εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΚΗ κατὰ τὸν ἀντιπεπονητότα τῶν βαρῶν ἐν τοῖς ζυγοῖς λόγον, ἔσται τὸ Κ σημεῖον ἐξ οὗ τὰ βάρη ἰσορροπήσει [ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ ἐκ τοῦ Κ ἰσορροπήσει]. ἤχθωσαν δὲ κάθετοι ἀπὸ τῶν Η Θ ἐπὶ τὴν ΒΓ αἱ ΗΜ ΘΝ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΔΛ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΗ, ἀλλ' ὡς τὸ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΛΓ, ὡς δὲ ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΛΜ διὰ τὸ εἰς παραλλήλους τὰς ΗΜ ΕΛ ΘΝ διηχθαι τὰς ΗΚΘ ΜΛΝ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΛΓ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΛΜ ἡμίσειαν οὔσαν τῆς ΒΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς τὴν διπλασίαν, τουτέστιν πρὸς τὴν ΛΓ, οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΛ, τουτέστιν τὴν ΒΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΓΛΝ.

8.1044 [ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, ἡ ΒΛ πρὸς ΛΝ.] ὡς δὲ ἡ ΓΛ πρὸς ΛΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΛ τετράγωνον. καὶ τριπλῆ ἐστὶν ἡ ΓΛ τῆς ΛΝ (ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΕ τριπλῆ ἐστὶν τῆς ΕΘ· διπλῆ γὰρ ἡ ΓΘ τῆς ΕΘ)· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ τοῦ ἀπὸ ΛΒ. καὶ δοθέντα τὰ Β Γ· δοθὲν ἄρα τὸ Λ, ὥστε καὶ τὸ Δ. διὸ δὴ τὴν ΒΓ τεμόντες κατὰ τὸ Λ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΛ τοῦ ἀπὸ ΛΒ εἶναι τριπλάσιον, ἔξομεν τὸ Δ τῆς ἀρτήσεως σημείου. τέμνεται δὲ ἡ ΒΓ οὕτως. Ζ'. Εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος εἶναι δυνάμει τριπλασίαν. Ἐστω εὐθεῖα ἡ ΑΔ καὶ τετμήσθω τῷ Γ, ὥστε τὴν ΑΓ τῆς ΓΔ εἶναι τριπλῆν, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΔ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΔ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΔΕ· ὅτι ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ δυνάμει τριπλασία ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ τῶν ΑΓ ΓΔ μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· τριπλασία ἄρα ἡ ΑΕ τῆς ΔΕ δυνάμει. Ὅμοίως καὶ εἰς τὸν δοθέντα λόγον δυνάμει τμηθήσεται ἡ ΑΔ εὐθεῖα καὶ πᾶσα ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. η'.

8.1046 Θέσει αἱ ΑΒ ΑΓ, καὶ δοθὲν τὸ Β, καὶ διήχθω ἡ ΓΔ ἀποτείνουσα δοθέντα λόγον τὸν τῆς ΑΓ πρὸς ΒΔ· δεῖξαι ὅτι τοῦ ΑΓΔ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους ἐστὶ πρὸς θέσει. Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, ὥστε τὴν ΕΖ τρίτον μέρος εἶναι τῆς ΕΔ· τὸ Ζ ἄρα κέντρον βάρους ἐστὶν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου (τοῦτο γὰρ προδέδεικται). ἤχθω δὲ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΖΗ, καὶ τῆς ΑΒ τρίτον μέρος ἔστω ἡ ΑΘ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΗ τρίτον μέρος τῆς ΑΔ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΕΔ· καὶ λοιπὸν οὖν ἡ ΘΗ τρίτον μέρος ἐστὶν τῆς ΒΔ. λόγος δὲ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς [τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΗ· τριπλασία γὰρ αὐτῆς ἐστίν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ΔΑ τῆς ΔΗ ἡμιολία ἐστίν, τουτέστιν ἡ ΑΕ τῆς ΖΗ, ἡ δὲ ΓΑ τῆς ΑΕ διπλῆ]· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΗΘ πρὸς τὴν ΗΖ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Η γωνία (καὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α)· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΖ γωνία. καὶ δοθὲν

τὸ Θ· θέσει ἄρα ἡ ΘΖ εὐθεΐα, καὶ ἔστιν ἐπ' αὐτῆς τὸ Ζ κέντρον. Ταῦτα μὲν οὖν καὶ τὰ τοιαῦτα θεωρίαν ἔχει, τὰ δὲ καὶ εἰς χρεῖαν δυνάμενα πεσεῖν μηχανικὴν τοιαῦτ' ἂν εἴη. Θ'.

8.1048 Ἐπίπεδον ἐκκλῖναι, ὥστε τὸ κλίμα αὐτοῦ ἐφ' ἑν νεύειν σημεῖον δοθέντος ἀκλινοῦς ἐπιπέδου, τουτέστιν παραλλήλου τῷ ὀρίζοντι, ἐν παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ κλίμα ἔστω ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ. Ἐστω τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον πρότερον ἰσοπλευρον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία, ἐν ἣ βουλόμεθα ἐκκλῖναι τὸ ἐπίπεδον, ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, ἀπὸ δὲ τῶν Α Β Δ σημείων τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν αἱ ΑΘ ΒΚ ΔΛ, τὸ δὲ Γ σημεῖον ἔστω ὅπου βουλόμεθα τὴν κλίσιν νεύειν, καὶ τῇ μὲν ΑΓ ἐπιζευχθεῖσιν ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, τῇ δὲ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΕΗ, τῇ δὲ ΗΕ ἴση κείσθω ἡ ΑΘ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἐπεζευγμένην τὴν ΘΓ, ἔσται ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων. ἦχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΜ, καὶ τῇ ΓΜ ἴση κείσθω ἡ ΖΝ, τῇ δὲ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΝΞ, τῇ δὲ ΝΞ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ΒΚ ΔΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΛ ΘΚ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ταῖς ΑΔ ΑΒ ἐκβληθείσαις κατὰ τὰ Π Ρ σημεία [ὅτι δὲ συμπίπτουσιν δῆλον· ἀπ' ἐλαττόνων γὰρ εἰσιν δύο ὀρθῶν καὶ αὐταὶ κάκειναι]· ἔσται δὴ τὸ ΘΚΛ ἐπίπεδον κεκλιμένον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΓΑ, τουτέστιν τῇ ὑπὸ ΕΖΗ.

8.1050 ἐὰν γὰρ νοήσωμεν τῇ ΑΘ παράλληλον ἡγμένην τὴν ΜΟ, καὶ ἐπεζευγμένην τὴν ΟΚ, ἔσται ἡ μὲν ΜΟ ἴση τῇ ΝΞ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΝΞ τρίγωνον τῷ ΜΟΓ, ἡ δὲ ΚΟ τῇ ΒΜ ἴση καὶ παράλληλος, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΚΒΜΟ ὀρθὸν πρὸς ὑποκείμενον. καὶ ἐπεὶ τὰ Π Γ Ρ σημεία ἐν δυσὶν ἅμα ἐπιπέδοις ἔστιν τῷ τε ὑποκειμένῳ ΑΒΓΔ [ἐν ᾧ ἔστιν καὶ τὰ Π Ρ σημεία, ἀλλὰ] καὶ ἐν τῷ ΚΘΛΓ, τὰ Π Γ Ρ ἄρα σημεία ἐπὶ μιᾷ ἔστιν εὐθείας τῆς ΠΡ, κοινῆς τομῆς οὕσης τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ Κ Ο Λ σημεία ἐπὶ τῆς κοινῆς ἔστι τομῆς τοῦ ΚΘΛΓ ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τῶν Κ Ο Λ παραλλήλου τῷ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ, ὥστε τὴν διὰ τῶν Κ Ο Λ εὐθεΐαν παράλληλον εἶναι τῇ ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΑΠ πρὸς ΠΔ, ἡ ΘΑ πρὸς ΛΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΡ πρὸς ΡΒ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΚ, καὶ ἴση ἔστιν ἡ ΔΛ τῇ ΒΚ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΠ τῇ ΑΡ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΠΡ τῇ ὑπὸ ΑΡΠ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΠΑΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΡΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΠ τῇ ὑπὸ ΑΓΡ· ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρα αὐτῶν, καὶ ἡ ΠΡ εὐθεΐα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμενεται ὑπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἔστιν αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς καὶ τῷ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἡ ΜΟ· καὶ ἡ ΟΓ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔστιν τῇ ΡΠ διὰ λῆμμα σφαιρικῶν· ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΠ ΟΓΠ· τὸ ΚΘΛΓ ἄρα ἐπίπεδον κέκλιται πρὸς τὸ [ἀπὸ] ΑΒΓΔ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ.

8.1052 Ἀλλὰ δὴ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τῶν ἄλλων ὑποκειμένων τῶν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΓΠ ὀξεῖα ἔστιν. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΑΠ πρὸς ΠΔ, ἡ ΘΑ πρὸς ΔΛ, ὡς δὲ ἡ ΑΡ πρὸς ΡΒ, ἡ ΘΑ πρὸς ΒΚ, καὶ ἴση ἔστιν ἡ ΔΛ τῇ ΒΚ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΠ πρὸς ΠΔ, ἡ ΑΡ πρὸς ΡΒ· καὶ διελόντι ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΠ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΡ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΒΡ. ἐλάττων δὲ ἡ ΑΔ τῆς ΑΒ· ἐλάττων ἄρα καὶ ἡ ΔΠ τῆς ΒΡ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΠ ἐλάττων ἔστιν τῆς ΑΡ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΡΠ ἐλάσσων ἔστιν τῆς ὑπὸ ΑΠΡ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΠΡ τῆς ὑπὸ ΑΡΠ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΠ τῆς ὑπὸ ΓΑΡ μείζων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΠ τοῦ ΑΓΠ τριγώνου λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΑΓΡ τοῦ ΑΓΡ τριγώνου ἐλάσσων ἔστιν· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΠ γωνία· ἡ κλίσις ἄρα τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων πρὸς τι σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ Π θεωρεῖται, ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΓΠ καθέτου ἀγομένης. ὡς οὖν ἐκκλῖναι δυνατόν ἔστιν ἐπίπεδον ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ πρὸς ἐπίπεδον, δυνατόν ἔστιν ἄρα καὶ ἐκκεκλιμένου τὴν κλίσιν εἰπεῖν, τουτέστιν ἐν ποίᾳ γωνίᾳ κέκλιται τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ παράλληλον τῷ ὀρίζοντι.

8.1054 ι'. Βάρους δοθέντος ὑπὸ δοθείσης ἀγομένου δυνάμεως ἐν τῷ παρὰ τὸν ὀρίζοντα ἐπιπέδῳ καὶ ἐτέρου ἐπιπέδου κεκλιμένου πρὸς τὸ ὑποκείμενον δοθεῖσαν γωνίαν ὑποτιθέντος, εὐρεῖν τὴν δύναμιν ὑφ' ὅσης ἀχθήσεται τὸ βάρος ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἐστω τὸ μὲν διὰ τῆς ΜΝ εὐθείας ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ διὰ τῆς ΜΚ κεκλιμένον πρὸς αὐτὸ γωνίαν δοθεῖσαν

τὴν ὑπὸ ΚΜΝ ὑποτιθέν, βάρος δέ τι τὸ Α κινεῖσθω ὑπὸ δυνάμεως τῆς Γ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, καὶ νοεῖσθω τῷ Α ἰσοβαρὴς σφαῖρα ἢ περὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ κείσθω ἐπὶ τοῦ διὰ τῶν Μ Κ ἐπιπέδου ψαύουσα αὐτοῦ κατὰ τὸ Λ σημεῖον, ὡς ἔστιν σφαιρικῶν γ' θεωρήματι· ἢ ἄρα ΕΛ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (καὶ τοῦτο γὰρ δέδεικται θεωρήματι δ' σφαιρικῶν), ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΚΜ κάθετός ἐστιν ἡ ΕΛ. ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΚΜ ΕΛ ἐπίπεδον καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ΛΗΞ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Ε κέντρου τῇ ΜΝ παράλληλος ἡ ΕΘ, καὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Λ ἡ ΛΖ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσα ἔστιν ἡ ὑπὸ ΕΘΛ γωνία (ἴση γάρ ἐστιν τῇ ὑπὸ ΚΜΝ δοθείσῃ [ὀξείᾳ] γωνίᾳ), δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΛΖ ἴση οὖσα τῇ ὑπὸ ΕΘΛ (ἰσογώνιον γάρ ἐστιν τὸ ΕΘΛ τῷ ΕΛΖ τριγώνῳ)· δοθέν ἄρα τὸ ΕΛΖ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΕΛ, τουτέστιν τῆς ΕΗ, πρὸς ΕΖ δοθείς· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ΖΗ πρὸς ΕΖ λόγος ἐστὶν δοθείς.

8.1056 πεποιήσθω οὖν ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ μὲν Α βάρος πρὸς τὸ Β, ἡ δὲ Γ δύναμις πρὸς τὴν Δ. καὶ ἔστιν τοῦ Α δύναμις ἡ Γ· καὶ τοῦ Β ἄρα δύναμις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΗΖ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ Α βάρος πρὸς τὸ Β, ἂν τεθῇ τὰ Α Β βάρη περὶ κέντρα τὰ Ε Η, ἰσορροπήσει ἀρτώμενα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου [ἢ ἐπὶ υποθέματος κείμενα τοῦ ΛΖ ὀρθοῦ πρὸς τὸν ὀρίζοντα]. κεῖται δὲ τὸ Α βάρος περὶ κέντρον τὸ Ε (ἀντ' αὐτοῦ γὰρ ἡ σφαῖρα)· τεθὲν ἄρα τὸ Β βάρος περὶ κέντρον τὸ Η ἰσορροπήσει τῇ σφαίρᾳ, ὥστε μὴ καταφέρεσθαι τὴν σφαῖραν διὰ τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου, ἀλλ' ἐφεστάναι ἀρρεπῇ, ὡς εἰ καὶ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐστῶσα ἐτύγχανεν. ἐκινεῖτο δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῆς Γ δυνάμεως κινήσεται ἄρα ἐν τῷ κεκλιμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς συναμφοτέρου τῆς τε Γ δυνάμεως καὶ τῆς τοῦ Β βάρους, τουτέστιν τῆς Δ δυνάμεως. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ Δ δύναμις. Ἡ μὲν οὖν γεωμετρικὴ τοῦ προβλήματος ἀνάλυσις ὑποδέδεικται, ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ παραδείγματος ποιησώμεθα τὴν τε κατασκευὴν καὶ τὴν ἀπόδειξιν, ἔστω τὸ μὲν Α βάρος ταλάντων, εἰ τύχοι, ζ' ἀγόμενον ἐν τῷ παραλλήλῳ ὀρίζοντι ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῆς Γ κινούσης δυνάμεως, τουτέστιν οἱ κινούμεντες ἔστωσαν ἄνθρωποι μ', ἡ δὲ ὑπὸ ΚΜΝ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΕΘΛ, διμοῖρου ὀρθῆς· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΛΘ τρίτου ὀρθῆς.

8.1058 καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΛΘ· διμοῖρου ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΛΖ· οἶων ἄρα αἱ δ' ὀρθαὶ τξ' τοιούτων ξ' ἡ ὑπὸ ΕΛΖ, καὶ τοῦ περιγραφομένου ἄρα περὶ τὸ ΕΖΛ τρίγωνον ὀρθογώνιον κύκλου ἡ μὲν ἐπὶ τῆς ΕΖ περιφέρεια τοιούτων ἔσται ρκ' οἶων ὁ κύκλος τξ', αὐτὴ δὲ ἡ ΕΖ τοιούτων ρδ' ἔγγιστα οἶων ἡ ΕΛ τοῦ κύκλου διάμετρος ρκ'· ταῦτα γὰρ δῆλα ἐκ τοῦ κανόνος τῶν ἐγκυκλίων εὐθειῶν τοῦ κατὰ Πτολεμαῖον [ὄντος] κειμένου ἐν τῷ α' τῶν μαθηματικῶν. λόγος ἄρα τῆς ΕΛ, τουτέστιν τῆς ΕΗ, πρὸς ΕΖ, ὃν ρκ' πρὸς ρδ'· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς ΗΖ πρὸς ΖΕ λόγος ὃν ις' πρὸς ρδ'. τούτῳ δὲ ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τοῦ Α βάρους πρὸς τὸ Β, καὶ τῆς Γ δυνάμεως πρὸς τὴν Δ, καὶ ἔστιν τὸ μὲν Α βάρος ταλάντων ζ', ἡ δὲ κινουσα δύναμις ἀνδρῶν μ'· ἔσται ἄρα καὶ τὸ μὲν Β βάρος ταλάντων , ατ', ἡ δὲ Δ δύναμις ἀνθρώπων σξ' (ὡς γὰρ ις' πρὸς ρδ', οὕτως ζ' πρὸς , ατ' καὶ μ' πρὸς σξ')· τοῦ ἄρα Α βάρους ταλάντων ζ' κινουμένου ἐν παραλλήλῳ τῷ ὀρίζοντι ἐπιπέδῳ ὑπὸ τῶν μ ἀνδρῶν, τὸ αὐτὸ βάρος κινήσεται ὑπὸ συναμφοτέρων τῶν προειρημένων ἀνθρώπων, τουτέστιν ὑπὸ τ' ὅλων, ἐν ἐπιπέδῳ κεκλιμένῳ πρὸς τὸν ὀρίζοντα, τῆς ὑπὸ ΚΜΝ γωνίας διμοῖρου ὀρθῆς ὑποκειμένης. ια'.

8.1060 Τῆς αὐτῆς δὲ ἐστὶν θεωρίας τὸ δοθέν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει κινῆσαι· τοῦτο γὰρ Ἀρχιμήδους μὲν εὕρημα [λέγεται] μηχανικόν, ἐφ' ᾧ λέγεται εἰρηκέναι· δός μοί (φησι) ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν. Ἦρων δὲ ὁ Ἀλεξανδρεὺς πάνυ σαφῶς αὐτοῦ τὴν κατασκευὴν ἐξέθετο ἐν τῷ καλουμένῳ βαρουλκῷ, λῆμμα λαβὼν ὅπερ ἐν τοῖς μηχανικοῖς ἀπέδειξεν, ἔνθα καὶ περὶ τῶν ε' δυνάμεων διαλαμβάνει, τουτέστιν τοῦ τε σφηνὸς καὶ μοχλοῦ καὶ κοχλίου καὶ πολυσπᾶστου καὶ ἄξονος ἐν τῷ περιτροχίῳ, δι' ὧν τὸ δοθέν βάρος τῇ δοθείσῃ δυνάμει κινεῖται [καθ' ἐκάστην δύναμιν]. ἐν δὲ τῷ βαρουλκῷ διὰ τυμπάνων ὀδοντωτῶν παραθέσεως ἐκίνει τὸ δοθέν βάρος τῇ δοθείσῃ

δυνάμει, τῆς διαμέτρου τοῦ τυμπάνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ἄξονος λόγον ἐχούσης ὃν ε' πρὸς α', τοῦ κινουμένου βάρους ὑποκειμένου ταλάντων χιλίων, τῆς δὲ κινούσης δυνάμεως ὑποκειμένης ταλάντων ε'. Ἐστω δὴ ἡμᾶς ἐπὶ διπλασίου λόγου τὸ αὐτὸ δεικνύναι, καὶ ταλάντων ρξ' ὄντος τοῦ κινουμένου βάρους ἀντὶ χιλίων, καὶ τῆς κινούσης αὐτὸ δυνάμεως ὑποκειμένης ταλάντων δ' ἀντὶ ε', τουτέστιν ὁ κινῶν ἄνθρωπος δυνάσθω καθ' αὐτὸν ἄνευ μηχανῆς ἔλκειν τάλαντα δ', καὶ ἔστω τὸ εἰρημένον ὑπ' αὐτοῦ γλωσσόκομον τὸ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ εἰς τοὺς μακροὺς καὶ παραλλήλους τοίχους ἔστω ἄξων διακείμενος εὐλύτως στρεφόμενος ὁ ΕΖ, τοῦτ' δὲ συμφυὲς ἔστω τύμπανον ὠδοντωμένον [ἀκτῖσιν ὀδοντωτοῖς] τὸ ΗΘ, ἔχον τὴν διάμετρον διπλασίαν τῆς διαμέτρου [τῆς ΕΖ διαγωνίου] τοῦ ἄξονος τῆς κατὰ κότεραφον [γίνεται γὰρ τετράγωνος μὲν περὶ μέσον ἐπὶ τοσοῦτον μήκος, ὅσον ἐστὶν τὸ πάχος τοῦ τυμπάνου εἰς ὃ ἐναρμόζεται ἀσφαλῶς, στρογγύλος δὲ πως ἢ λελορφωμένος ἐκ τῶν ἐφ' ἐκάτερα τοῦ τυμπάνου μερῶν].

8.1062 ἐὰν ἄρα τὰ ἐκ τοῦ βάρους τοῦ ἐλκομένου δεδεμένα σχοινία [καλούμενα δὲ ὅπλα] διὰ τινος ὀπῆς [μᾶλλον δὲ ἀνατομῆς πλατείας] οὔσης ἐν τῷ ΑΒ τοίχῳ ἐπειληθῇ περὶ τὸν ΕΖ ἄξονα [ἐφ' ἐκάτερα τοῦ ΗΘ τυμπάνου] καὶ στραφῇ τὸ ΗΘ τύμπανον, τοῦτο ἐπιστρέψει καὶ τὸν συμφυῆ ἄξονα κινούμενον περὶ τὰ ἄκρα ἐν δακτύλοις χαλκοῖς καὶ πυξίσιν ὁμοίως χαλκαῖς [κινουμέναις], κειμέναις δ' ἐν τοῖς εἰρημένοις ΑΒ ΓΔ τοίχοις.

8.1064 ἐπειλούμενα δὲ τὰ ἐκ τοῦ βάρους [ὃ καλεῖται φορτίον] ὅπλα κινήσει τὸ βάρος. ἵνα δὲ κινήθῃ τὸ ΗΘ τύμπανον, δεήσει δύναμιν παρασχεῖν ταλάντων πλεῖον π' διὰ τὸ τὴν διάμετρον τοῦ τυμπάνου τῆς διαμέτρου τοῦ ἄξονος εἶναι διπλασίαν· τοῦτο γὰρ πρόβλημά ἐστιν ὑπὸ Ἡρωνος δεικνύμενον ἐν τοῖς μηχανικοῖς. [καὶ ἄλλα πλεῖστα προβλήματα τῶν χρησιμωτάτων καὶ βιωφελῶν γέγραπται]. Ἐπεὶ οὖν οὐκ ἔχομεν τὴν δοθεῖσαν δύναμιν ταλάντων π', ἀλλὰ ταλάντων δ', γεγονέντω ἕτερος ἄξων παρακείμενος παράλληλος τῷ ΕΖ ὁ ΚΛ, ἔχων συμφυὲς τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ ΜΝ, ὥστε τοὺς ὀδόντας αὐτοῦ ἐναρμόζειν τοῖς ὀδοῦσι τοῦ ΗΘ τυμπάνου· τοῦτο δὲ γίνεται, ἐὰν ᾗ ὡς ἡ διάμετρος τοῦ ΗΘ τυμπάνου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ΜΝ, οὕτως τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ ΜΝ (πῶς δὲ τοῦτο γίνεται διὰ τῶν ἐξῆς δηλὸν ἔσται)· δοθὲν μὲν ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ΜΝ τύμπανον. τῷ δ' αὐτῷ ἄξονι τῷ ΚΛ συμφυὲς ἔστω τύμπανον τὸ ΕΘ, ἔχον τὴν διάμετρον διπλασίαν τῆς τοῦ ΜΝ τυμπάνου διαμέτρου. διὰ δὴ τοῦτο δεήσει τὸν βουλόμενον κινεῖν διὰ τοῦ ΕΘ τυμπάνου τὸ βάρος ἔχειν δύναμιν ταλάντων μ', ἐπειδήπερ τὰ π' τάλαντα διπλασία ἐστὶν τῶν μ' ταλάντων. Πάλιν δὲ παρακείσθω τῷ ΕΘ τυμπάνῳ [ὀδοντωθέντι] ἕτερον τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ ΠΡ συμφυὲς ἐτέρῳ ἄξονι, τῷ δ' αὐτῷ ἄξονι ἕτερον συμφυὲς τύμπανον τὸ ΣΤ, ἔχον μὲν ὁμοίως διπλασίαν τὴν διάμετρον τῆς τοῦ ΠΡ τυμπάνου διαμέτρου, τοὺς δὲ ὀδόντας μὴ συμπλεκόμενους τοῖς ὀδοῦσι τοῦ ΜΝ τυμπάνου· ἢ ἄρα διὰ τοῦ ΣΤ τυμπάνου κινουῖσα τὸ βάρος δύνάμεις ἔσται ταλάντων κ'.

8.1066 ἥν δὲ ἡ δοθεῖσα δύνάμεις ταλάντων δ' δεήσει οὖν πάλιν ἕτερον μὲν τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ ΥΦ παρακεῖσθαι τῷ ΣΤ [ὀδοντωθέντι], τῷ δὲ ἄξονι τοῦ ΥΦ τυμπάνου συμφυὲς γενέσθαι τὸ ΧΨ ὠδοντωμένον, οὗ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ΥΦ τυμπάνου διάμετρον λόγον ἔχέτω ὃν τὰ β' πρὸς α'· ἢ ἄρα κινουῖσα τὸ βάρος δύνάμεις διὰ τοῦ ΧΨ τυμπάνου ἔσται ταλάντων ι'. πάλιν δὲ παρακείσθω μὲν τῷ ΧΨ τυμπάνῳ ἕτερον τύμπανον ὠδοντωμένον τὸ ρλ, τῷ δὲ ἄξονι αὐτοῦ τύμπανον ἔστω συμφυὲς Μ α Μ β ὠδοντωμένον ὀδοῦσιν λοξοῖς, οὗ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ ρλ διάμετρον λόγον ἔχέτω ὃν ἔχει τὰ ι' τάλαντα πρὸς τὰ τῆς δοθείσης δυνάμεως τάλαντα δ'. Καὶ τούτων κατασκευασθέντων ἐὰν ἐπινοήσωμεν τὸ ΑΒΓΔ γλωσσόκομον μετέωρον κείμενον ἀμεταστάτως, καὶ ἐκ μὲν τοῦ ΕΖ ἄξονος βάρος ἐξάψωμεν, ἐκ δὲ τοῦ Μ α Μ β τυμπάνου τὴν ἔλκουσαν δύναμιν τὰ δ' τάλαντα, οὐδοπότερον αὐτῶν κατενεχθήσεται, εὐλύτως στρεφομένων

τῶν ἀξόνων καὶ τῆς τῶν τυμπάνων παραθέσεως ἀκριβῶς ἀρμοζούσης, ἀλλ' ὥσπερ ἐπὶ ζυγοῦ τινος ἰσορροπήσει ἡ δύναμις τῶν δ' ταλάντων τῷ βάρει τῶν ρξ' ταλάντων· ἐὰν ἄρα ἐνὶ αὐτῶν προσθῶμεν ὀλίγον τι βάρος, καταρρέψει καὶ ἐνεχθήσεται ἐφ' ὁπότερον μέρος ἡ πρόσθεσις γεγένηται· εἰ γὰρ λόγου χάριν τῇ τῶν δ' ταλάντων δυνάμει μναιαῖον προστεθῇ βάρος, κατακρατῆσαν ἐπισπάσεται τὸ βάρος τῶν ρξ' ταλάντων. ἀντὶ δὲ τῆς προσθέσεως παρακείσθω κοχλίας τῷ $M \alpha M \beta$ τυμπάνῳ ὁ ΩA , ἔχων τὴν ἑλικά ἀρμόζουσαν τοῖς λοξοῖς ὁδοῦσι τοῦ τυμπάνου τοῦ $M \alpha M \beta$.

8.1068 τοῦτο δὲ ὡς δεῖ ποιεῖν, ἐν τοῖς αὐτοῖς μηχανικοῖς Ἡρωνος γέγραπται, καὶ ἡμεῖς δὲ τοῦτο σαφέστερον ἐξῆς γράψομεν. στρεφέσθω δὲ ὁ κοχλίας εὐλύτως περὶ τὸν τῶν ΓA τοῖχον, καὶ ἡ ὑπεροχὴ τετραγωνισθεῖσα λαβέτω χειρολάβην τὴν ς , B , δι' ἧς ἐπιλαβόμενοι καὶ ἐπιστρέφοντες τὸν κοχλίαν ἐπιστρέψομεν καὶ τὸ $M \alpha M \beta$ τύμπανον, ὥστε καὶ τὸ $\varphi \lambda$ συμφυῆς αὐτῷ. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ παρακείμενον αὐτῷ τὸ $X \Psi$ στραφήσεται, καὶ τὸ συμφυῆς αὐτῷ τὸ $Y \Phi$, καὶ τὸ παρακείμενον αὐτῷ τὸ ΣT , καὶ τὸ τούτῳ συμφυῆς τὸ ΠP , καὶ τὸ τούτῳ παρακείμενον τὸ ΞO , καὶ τὸ τούτῳ συμφυῆς τὸ $M N$, καὶ τὸ τούτῳ παρακείμενον τὸ $H \Theta$, ὥστε καὶ ὁ τούτῳ συμφυῆς ἄξων ὁ $E Z$, περὶ ὃν ἐπειλοῦντες τὰ ἐκ τοῦ φορτίου ὅπλα κινήσομεν τὸ βάρος. ὅτι γὰρ κινήσεται δῆλον ἐκ τοῦ προστεθεῖσθαι ἑτέραν δυνάμιν τὴν τῆς χειρολάβης, ἥτις περιγράφει κύκλον τῆς τοῦ κοχλίου περιμέτρου μείζονα· ἀπεδείχθη γὰρ ἐν τῷ περὶ ζυγῶν Ἀρχιμήδους καὶ τοῖς Φίλωνος καὶ Ἡρωνος μηχανικοῖς, ὅτι οἱ μείζονες κύκλοι κατακρατοῦσιν τῶν ἐλασσόνων κύκλων, ὅταν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἢ κύλισις αὐτῶν γίνηται. ιβ' . Τὰ μὲν οὖν μάλιστα συνέχοντα τὴν μηχανικὴν θεωρίαν ταῦτ' ἂν εἴη. τῆς δὲ ὀργανικῆς πολλὰ μὲν εἶδη καὶ μέρη· τὰ μὲν γὰρ ὑπὸ τῆς μηχανικῆς καὶ γνωμονικῆς καὶ τῆς περὶ ὑδρείων πραγματείας λόγῳ θεωρούμενα δι' αὐτῶν τῶν ὀργάνων ὑπὸ ταύτης κατασκευαζόμενα δείκνυται, πολλὰ δὲ καὶ χωρὶς τῶν μηχανικῶν ἔξωθεν ὑπ' αὐτῆς ἐπιτελεῖται, καὶ τινὰ ταῖς γεωμετρικαῖς ἐφόδοις δυσχερίστα μεταλαβοῦσα τοῖς ὀργάνοις εἰς ῥαδιεστέραν ἤγαγε κατασκευὴν.

8.1070 αὐτίκα γοῦν τὸ καλούμενον Δηλιακὸν πρόβλημα τῇ φύσει στερεὸν ὑπάρχον οὐχ οἷόν τ' ἦν κατασκευάσαι τῷ γεωμετρικῷ λόγῳ κατακολουθοῦντας, ἐπεὶ μὴδὲ τὰς τοῦ κώνου τομὰς ῥάδιον ἐν ἐπιπέδῳ γράφειν ἦν, τοῖς δ' ὀργάνοις μεταληφθὲν εἰς χειρουργίαν καὶ κατασκευὴν ἐπιτήδειον [μᾶλλον τῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐκτεθειμένης οὕτως] ἂν ἀναχθείη [τὸ προκείμενον], λέγω δὲ τὸ κύβον κύβου διπλάσιον εὐρεῖν. οὐ μόνον δὲ διπλάσιος εὐρίσκεται διὰ τοῦ ὑποκειμένου ὀργάνου, ἀλλὰ καὶ καθόλου λόγον ἔχων τὸν ἐπιταχθέντα. Κατεσκευάσθω γὰρ ἡμικύκλιον τὸ $AB \Gamma$, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω ἡ ΔB , καὶ κινείσθω κανόνιον τι περὶ τὸ A σημεῖον οὕτως ὥστε τὸ μὲν ἐν πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίῳ τινὶ κατὰ τὸ A σημεῖον ἐστῶτι, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινεῖσθαι μεταξὺ τῶν $B \Gamma$. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὐρεῖν λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους δοθέντα, καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς $B \Delta$ πρὸς ΔE , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓE ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z . παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξὺ τῶν $B \Gamma$, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξὺ τῶν $Z E$ $E B$ εὐθειῶν ἴσον γένηται τῷ μεταξὺ τῆς $B E$ εὐθείας καὶ τῆς $B K \Gamma$ περιφερείας· τοῦτο γὰρ πειράζοντες αἰεὶ καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον ῥαδίως ποιήσομεν.

8.1072 γεγονέντω δὴ, καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν $A H \Theta K$, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς $H \Theta$ ΘK . λέγω ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς $B \Delta$ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς $\Delta \Theta$ κύβον λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστιν τὸν τῆς $B \Delta$ πρὸς ΔE . Νοείσθω γὰρ ὁ κύκλος προσαναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $K \Delta$ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛH · παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ $B \Delta$ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν $K \Theta$ τῇ ΘH , τὴν δὲ $K \Delta$ τῇ $\Delta \Lambda$. ἐπεζεύχθω δὴ καὶ ἡ $\tau \epsilon$ $A \Lambda$ καὶ ἡ $\Lambda \Gamma$. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $H A \Lambda$ ἐν ἡμικυκλίῳ καὶ κάθετος ἡ $A M$, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΛM πρὸς τὸ ἀπὸ $M A$, τουτέστιν ὡς ἡ ΓM πρὸς $M A$, οὕτως τὸ

ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ MH. κοινὸς προσκείσθω λόγος ὁ τῆς AM πρὸς MH· ὁ ἄρα συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τῆς GM πρὸς MA καὶ τοῦ τῆς AM πρὸς MH, τουτέστιν ὁ τῆς GM πρὸς MH, λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς AM πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς MH καὶ ἐκ τοῦ τῆς AM πρὸς MH. ὁ δὲ συγκείμενος ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς AM πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς MH καὶ τοῦ τῆς AM πρὸς MH ὁ αὐτός ἐστιν τῷ λόγῳ ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς AM κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς MH κύβον· καὶ ὁ τῆς GM ἄρα πρὸς τὴν MH λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς AM κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς MH κύβον. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ GM πρὸς MH, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, ὥς δὲ ἡ AM πρὸς MH, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ πρὸς ΔΘ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ὥς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον. Πρόβλημα ὀργανικὸν ἐπὶ κυλίνδρου. ιγ'. Τὰ δ' ὀργανικὰ ἐν τοῖς μηχανικοῖς λεγόμενα προβλήματα [ἐστὶν ὅτι] γίνεται τῆς γεωμετρικῆς ἐξουσίας ἀφαιρούμενα, οἷά ἐστιν καὶ τὰ ἐνὶ διαστήματι γραφόμενα καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ τὰς βάσεις ἀμφοτέρας λελωβημένου κυλίνδρου προτεινόμενον ὑπὸ τῶν ἀρχιτεκτόνων.

8.1074 ἀξιούσι γὰρ μέρους ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυλίνδρου δοθέντος, οὗ μηδὲν μέρος ὑγιὲς φυλάσσεται τῶν ἐν ταῖς βάσεσι περιφερειῶν, εὐρεῖν τὸ πάχος τοῦ κυλίνδρου, τουτέστιν τοῦ κύκλου τὴν διάμετρον ἀφ' οὗ τὴν γένεσιν ἔσχεν ὁ κύλινδρος. εὐρίσκεται δὲ μεθοδευθὲν οὕτως. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς δοθείσης ἐπιφανείας δύο σημεῖα τὰ Α Β, καὶ κέντροις αὐτοῖς ἐνὶ διαστήματι σεσημειώσθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πρῶτον τὸ Γ, καὶ πάλιν κέντροις αὐτοῖς τοῖς Α Β διαστήματι τοῦ προτέρου μείζονι σεσημειώσθω τὸ Δ, καὶ ἄλλῳ διαστήματι τὸ Ε, καὶ ἄλλῳ τὸ Ζ, καὶ ἄλλῳ τὸ Η. ἔσται δὴ τὰ ε' σημεῖα τὰ Γ Δ Ε Ζ Η ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ διὰ τὸ καὶ τὴν ἐπιζευγνύουσιν ἕκαστον αὐτῶν ὥς κορυφὴν ἰσοσκελοῦς τριγώνου τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἐπιζευγνύουσης εὐθείας τὰ Α Β ὥς βάσεως κοινῆς τῶν τριγώνων ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὴν ΑΒ [καὶ ἐν ἐνὶ γίνεσθαι ἐπιπέδῳ τὰς ε' εὐθείας, καὶ δῆλον ὅτι τὰ Γ Δ Ε Ζ Η σημεῖα].

8.1076 ταῦτα δὲ εἰς ἐπίπεδον ἐκθησόμεθα οὕτως· ἐκ τριῶν μὲν εὐθειῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ Γ Δ Ε τρίγωνον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ συνεστάτω τὸ ΘΚΛ, ἐκ τριῶν δὲ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ Δ Ε Ζ τὸ ΚΛΜ, ἐκ τριῶν δὲ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ Ε Ζ Η σημεῖα τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΛΜΝ· ἔσται ἄρα ἐκκείμενα τὰ ΘΚΛ ΚΛΜ ΛΜΝ τρίγωνα ἀντὶ τῶν ΓΔΕ ΔΕΖ ΕΖΗ τριγώνων. ἂν δὴ περὶ τὰ Θ Κ Λ Μ Ν σημεῖα γράψωμεν ἔλλειψιν, ὁ ἐλάσσων αὐτῆς ἄξων διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου τοῦ τὸν κύλινδρον ἀπεργασαμένου. ιδ'. Ζητούμενου δὴ περὶ πέντε τὰ δοθέντα σημεῖα ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ κείμενα τὰ Θ Κ Λ Μ Ν ἔλλειψιν γράψαι, περιγεγράφθω, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΝ ΜΚ πρότερον ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ δίχα τετμήσθω ἑκάτερα αὐτῶν τοῖς Α Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ε Ζ τῆς ἐλλείψεως σημεῖα· ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἐστὶν τῆς ἐλλείψεως διὰ τὸν ι' ὅρον τῶν κωνικῶν, θέσει δεδομένη· δοθὲν γὰρ καὶ ἑκάτερον τῶν Α Β σημείων τῇ θέσει. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΛΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΚ ΛΜ συμπιπτεύωσαν τῇ ΘΝ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὰ Π Η· δοθέντα ἄρα τὰ Γ Η (δοθὲν γὰρ ἕκαστον τῶν Λ Μ Θ Ν).

8.1078 καὶ ἐπεὶ ὥς τὸ ὑπὸ ΞΔΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΜΔΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΛ πρὸς ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΗΓΠ ΝΓΘ, ἔσται ἄρα ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΓΠ τῷ ὑπὸ ΝΓΘ. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ ὑπὸ ΝΓΘ (δοθεῖσα γὰρ ἑκάτερα)· δοθὲν ἄρα τὸ Π. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΠΞ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΛΓΞ· δοθὲν ἄρα τὸ Ξ. καὶ ἔστιν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. ἐπιζευχθεῖσαι δὴ αἱ ΝΞ ΛΘ συμπιπτεύωσαν τῇ ΕΖ διαμέτρῳ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὰ Ρ Σ· ἔσται δὴ πάλιν ὥς τὸ ὑπὸ ΝΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΑΘ πρὸς ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΡΑΣ ΕΑΖ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσον τὸ ὑπὸ ΡΑΣ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ. καὶ ἔστιν δοθὲν τὸ ὑπὸ ΡΑΣ (δοθεῖσαι γὰρ εἰσιν αἱ ΡΑ ΑΣ)· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΑ ΑΖ. τῷ δ' ὁμοίῳ τρόπῳ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΕΒΖ δοθέν. καὶ δοθέντα τὰ Α Β· δοθέντα ἄρα καὶ τὰ Ε Ζ, ὥς ἐξῆς δειχθήσεται· ὥστε ἡ ΕΖ διάμετρος δέδοται τῷ μεγέθει. δῆλον δ' ὅτι καὶ ἡ συζυγὴς αὐτῇ· δέδοται γὰρ ὁ τῆς ΕΖ πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν αὐτῆς λόγος ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ ὑπὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ.

8.1080

ιε'. Τὸ ὑπερτεθέν. ἔστω δοθέν ἐκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΓΒ ΑΔΒ, καὶ δοθέντα τὰ Γ Δ· ὅτι τὰ Α Β δοθέντα ἐστίν. Ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΓΕ, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΔΒ ἴσον τὸ ὑπὸ ΓΔΖ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΔ (διὰ γὰρ τὴν κατασκευὴν ἐκάτερος λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΔ)· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΕΓ ΖΔ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ, ὥστε καὶ τὸ Α σημεῖον δοθέν. ὁμοίως καὶ τὸ Β. ιζ'. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ τὰ Ν Θ Μ Κ δεδομένα ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως σημεῖα ἐπιζευγνύουσαι παράλληλοι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΝΚ ΜΘ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Τ, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἦχθω τῇ ΜΘ ἢ ΛΥΦ· ἔσται δὲ λόγος τοῦ ὑπὸ ΝΥΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΥΦ δοθείς (ὁ αὐτός γὰρ τῷ τοῦ ὑπὸ ΝΤΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΤΘ). καὶ δοθέν τὸ ὑπὸ ΝΥΚ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΛΥΦ· καὶ δοθέντα τὰ ΛΥ· δοθέν ἄρα τὸ Φ· ἀπῆκται οὖν εἰς τὸ προγεγραμμένον, περὶ πέντε σημεῖα τὰ Ν Μ Λ Φ Θ γράψαι ἔλλειψιν τὴν ΝΜΛΦΘ παραλλήλων ὑποκειμένων τῶν ΜΘ ΦΛ. ιζ'.

8.1082 ῥάδιον δὲ συζυγῶν διαμέτρων ἐλλείψεως πορισθεῖσων ὠντινωονοῦν τοὺς ἄξονας αὐτῆς ὀργανικῶς εὐρεῖν. μεθοδεύεται δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. Ἐκκείσθωσαν αἱ προερευθεῖσαι τῆς ἐλλείψεως διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ ΓΔ δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΗ, τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΑΘ, καὶ ἡ ΕΘ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Κ· ἔσται δὲ τὸ Κ μεταξὺ τῶν Α Θ (μείζων γὰρ ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆς ΕΑ), καὶ τῇ ΕΘ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ Κ ἦχθω ἡ ΚΛ τέμνουσα τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Λ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Λ διὰ τοῦ Ε γραφομένη κύκλου περιφέρεια τεμνέτω τὴν ΗΖ κατὰ τὰ Ζ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ ΕΖ, καὶ κάθετοι ἦχθωσαν ἐπ' αὐτάς αἱ ΑΜ ΑΝ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ ΗΕΜ ἴσον κείσθω ἐκάτερον τῶν ἀπὸ ΕΟ ΕΠ, τῷ δὲ ὑπὸ ΖΕΝ ἐκάτερον τῶν ἀπὸ ΕΡ ΕΣ· ἔσονται οὖν εὐρημένοι τῆς ἐλλείψεως ἄξονες οἱ ΟΠ ΡΣ, ὧν ὁ ἐλάχιστος ἴσος ἔσται τῷ τοῦ κυλίνδρου πάχει, καθὼς ἐν ἀρχῇ προεῖρηται.

8.1084 ιη'. Σφαίρας μετεώρου δοθεῖσαν θέσιν ἐχούσης πρὸς τὸ ὑποκείμενον, εὐρεῖν τό τε σημεῖον ἐφ' ὃ πίπτει καθετικῶς ἐνεχθεῖσα [καὶ καθ' ὃ πίπτει σημεῖον] καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀποτεμνομένην ἀπὸ τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν δύο σημείων τοῦ τε κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κατὰ τὸ ἐπίπεδον. προγράφεται δὲ τὸ κύκλου δοθέντος μετεώρου μὴ ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ὑποκείμενον εὐρεῖν τὴν τε κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἀμφοτέρων καὶ τὴν κλίσιν. Ἔστω μετέωρος κύκλος, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτοῦ τρία σημεῖα τὰ Α Β Γ, καὶ ἦχθωσαν ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι. ἀχθήσονται δὲ οὕτως ἀπὸ τοῦ Γ προσπεσοῦσα εὐθεῖα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὡς ἡ ΓΔ περιενηνέχθω καὶ ψαυέτω τοῦ ἐπιπέδου καθ' ἕτερα δύο σημεῖα τὰ Ε Ζ, καὶ εἰλήφθω τοῦ περὶ τὰ Δ Ε Ζ κύκλου κέντρον τὸ Κ· ἡ οὖν ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὸ Κ σημεῖον πεσεῖται, καὶ δοθέν ἔσται τὸ Κ.

8.1086 ἦχθωσαν καὶ ἀπὸ τῶν Α Β κάθετοι ὁμοίως αἱ ΒΘ ΑΛ· ἐπιζευχθεῖσαι δὲ αἱ ΚΛ ΘΛ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ἡ ΓΚ πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ, ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ΘΟ πρὸς ΟΛ [δοθέντα ἄρα τὰ Μ Ο ... ἐφ' ἡμῖν γὰρ ἐστὶ τοιαύτας καθέτους λαβεῖν ὥστε ἐλαχίστην ἐν αὐταῖς εἶναι μίαν, ὡς τὴν ΑΛ]· εὐθεῖαι ἄρα αἱ ΜΑΓ ΒΑΟ. καὶ ἔσονται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ἡ ἄρα κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἐστὶν ἡ ΜΟ. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΜΟ κάθετος ἡ ΛΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝ· καὶ ἡ ΑΝ ἄρα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ΜΟ· πεπόρισται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΝΛ γωνία, τῶν ἐπιπέδων ἡ κλίσις. ιθ'. Τούτου προδειχθέντος ἔστω σφαῖρα μετέωρος, καὶ προκείσθω τό τε σημεῖον εὐρεῖν, ἐφ' ὃ πεσεῖται καθετικῶς ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἐνεχθεῖσα, καὶ τὴν ἐλαχίστην ἀποτεμνομένην ἀπὸ τῆς καθέτου μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἔστω ἡ σφαῖρα μετέωρος κειμένη περὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστός τις ἐγγεγράφθω κύκλος ὁ ΑΒΓ· ἦτοι δὲ ἐν ὀρθῷ ἔσται ἐπιπέδῳ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἢ οὐ, γνωσόμεθα δὲ οὕτως λαβόντες ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τρία τυχόντα σημεῖα καθέτους ἄξομεν ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὡς μεμαθήκαμεν, κἂν μὲν τὰ σημεῖα ἐφ' ἃ πίπτουσιν αἱ κάθετοι ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις ὦσιν, ὀρθὰ πρὸς ἀλλήλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα, ἐὰν δὲ μή, κεκλιμένα.

- 8.1088 Ἐστω δὴ πρότερον ὀρθά, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α Γ σημείων κάθετοι αἱ ΑΔ ΓΗ· ἦτοι δὴ ἴσαι, ἔσονται ἢ οὐ. Ἐστῶσαν ἴσαι, καὶ τετμήσθω ἡ ΔΗ ἐπιζευχθεῖσα δίχα τῷ Ζ· ἔσται δὴ τὸ Ζ τὸ ζητούμενον σημεῖον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ διχοτομία τῆς ΑΒΓ περιφερείας τὸ Β ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐφαρμόζον τῷ Ζ, καὶ ἡ ΒΖ ἐλαχίστη κάθετος, ὡς προεῖρηται. κ'. Μὴ ἔστῶσαν δὲ ἴσαι αἱ κάθετοι, ἀλλὰ ἐλαχίστη ἡ ΑΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΔ, ἐκβληθείσης τῆς ΗΔ· ἔσται δὴ τὸ Θ, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Α συμπίπτει τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, καὶ δοθεῖσα ἔσται ἡ τε ΑΘ εὐθεῖα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΔ γωνία. τούτων γενομένων ἐκκείσθω κύκλος ἴσος τῷ μεγίστῳ περὶ διάμετρον τὴν ΚΛ, καὶ προσκείσθω ἡ ΛΜ ἴση τῇ ΑΘ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΘΔ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΚΜΝ, καὶ ἀπὸ τῶν Κ Λ κάθετοι αἱ ΛΟ ΚΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡ ΣΠ, καὶ τῇ μὲν ΛΡ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΟΠ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΔΖ [τὸ δὲ αὐτὸ ἦν λέγειν δίχα ἡ ΔΗ τῷ Ζ].
- 8.1090 ἔσται οὖν τὸ μὲν Ζ σημεῖον, ἐφ' ὃ ἡ σφαῖρα καταφερομένη πεσεῖται, τὸ δὲ Β τὸ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐλαχίστη κάθετος ἡ ΒΖ. κα'. Μὴ ἔστω δὲ ὁ ΑΒΓ κύκλος ἐν [ἐνὶ] ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ εἰλήφθω ἡ κοινὴ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἡ ΔΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου σημεῖα τὰ Α Γ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις κείμενα οὕτως ὥστε τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην τὴν ΓΑ συμπίπτειν τῇ κοινῇ τομῇ τῇ ΔΘ [ἔστιν γὰρ ἐπ' ἐμοὶ διὰ τὴν ΔΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐπιπέδῳ εἶναι]. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Θ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΘ καὶ ἡ Θ γωνία. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΘ ἡ ΕΒΔ. ἀχθήσεται οὕτως ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΗΖΛ ἴσος τῷ μεγίστῳ τῷ ΑΒΓ περὶ διάμετρον τὴν ΖΗ, καὶ προσκείσθω ἡ ΗΚ ἴση τῇ ΓΘ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΘΔ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΖΚΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο κέντρου κάθετος ἡ ΟΛΜ, καὶ τῇ μὲν ΗΛ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΓΒ, τῇ δὲ ΚΜ εὐθείᾳ ἡ ΘΔ· ἡ ΔΒ ἄρα ἴση ἐστὶν τῇ ΜΛ καὶ κάθετος ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΔΘ καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Ε κέντρον πίπτει· ταῦτα γὰρ δῆλα ἐκ τῆς ὁμοιότητος.
- 8.1092 ἤχθω δὴ τῇ ΔΘ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΙ· ἡ ΔΘ ἄρα ὀρθὴ πρὸς τὸ διὰ τῶν Ε Δ Ι ἐπίπεδον, ὥστε καὶ ὁ ΑΒΓ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ διὰ τῶν Ε Δ Ι ἐπίπεδον· ἐκβληθὲν ἄρα τὸ διὰ τῶν Ε Δ Ι ἐπίπεδον κύκλον ποιήσει ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΑΒΓ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ πίπτοντα καὶ διὰ τῶν Β Ο σημείων, ὥστε, ἐὰν τοῦ ΑΒΓ τὸν πόλον λαβόντες τὸν Π διὰ τοῦ Π καὶ ἐκατέρου τῶν Β Ο γράψωμεν κύκλον, οὗτος ἔσται ὁ γινόμενος μέγιστος ἐν τῇ σφαίρᾳ [ὑπὸ τοῦ διὰ τῶν Ο Δ Ι ἐπιπέδου].
- 8.1094 γεγράφθω ὁ ΒΠΟ, καὶ ἐκκείσθω πάλιν κύκλος ὁ ΡΝΤ περὶ διάμετρον τὴν ΡΤ, καὶ προσκείσθω ἡ ΡΦ ἴση τῇ ΒΔ, καὶ τῇ ὑπὸ ΒΔΙ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΡΦΞ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κέντρου κάθετος ἡ ΛΝΞ, καὶ τῇ μὲν ΡΝ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἐπὶ τοῦ ΠΒΟ κύκλου ἡ ΒΥ, τῇ δὲ ΦΞ ἴση ἡ ΔΙ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΙΥ· ἡ ΙΥ ἄρα ἴση ἔσται τῇ ΞΝ καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Ε κέντρον πεσεῖται καὶ ἔσται κάθετος ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ ἐπὶ τὴν ΙΔ· τὸ μὲν ἄρα Ι σημεῖον ἔσται ἐφ' ὃ πίπτει ἡ σφαῖρα, τὸ δὲ Υ καθ' ὃ πίπτει, ἡ δὲ ἐλαχίστη κάθετος ἡ ΙΥ. κβ'. Σφαίρας ὑποκειμένης καὶ σημείου δοθέντος ἐκτὸς αὐτῆς, εὑρεῖν τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐστὶν δὲ φανερόν· ἂν γὰρ ἡτίσουσιν ἀπὸ τοῦ δοθέντος εὐθεῖα προσπεσοῦσα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν περιενεχθῇ, καὶ αὕτη γράψῃ κύκλον καὶ πόλος αὐτοῦ τὸ ζητούμενον ἔσται σημεῖον. Ὑποκείσθω πάλιν ἡ σφαῖρα, καὶ δύο σημεῖα δεδόσθω τῆς ἐπιφανείας ἐκτὸς ἀμφοτέρω, καὶ προκείσθω τὰ σημεῖα λαβεῖν καθ' ἃ ἡ ἐπὶ τὰ δοθέντα ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν. Κείσθω γὰρ ἡ σφαῖρα περὶ κέντρον τὸ Β, καὶ τὰ δοθέντα σημεῖα ἐκτὸς ἔστω τὰ Α Γ, καὶ καθ' ἃ συμβάλλουσιν τῇ ἐπιφανείᾳ αἱ ἀπὸ τῶν Α Γ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνύμεναι εἰλήφθω σημεῖα τὰ Δ Ε, δι' ὧν γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ΔΕΖΗ· δοθεῖσαι ἄρα αἱ ΑΔ ΓΕ (λῆμμα γάρ)· καὶ διὰ τὸ δεδοσθαι τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ὅλαι δοθήσονται αἱ ΑΒ ΓΒ.

ἔστιν δὲ καὶ ἡ τὰ δοθέντα ἐπιζευγνύουσα ἡ ΑΓ δοθεῖσα. ἐκ τριῶν οὖν τῶν ΑΒ ΑΓ ΓΒ τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΘΚΛ, καὶ περὶ κέντρον τὸ Θ γεγράφθω κύκλος ἴσος τῷ ΕΔΖΗ ὁ ΣΜΝΟ. ἐὰν μὲν οὗτος τέμνῃ τὴν ΚΛ, δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἐπὶ τὰ Α Γ ἐπιζευγνυμένη τέμνει τὴν σφαῖραν, εἰ δὲ μή, οὐ τέμνει. τεμνέτω οὖν ὁ κύκλος τὴν ΚΛ κατὰ τὰ Μ Ν, καὶ τῇ μὲν ΣΜ περιφερείᾳ ἴση ἀπειλήφθω ἡ ΔΗ, τῇ δὲ ΟΝ ἡ ΕΖ. φανερόν δὴ ὅτι τὰ Η Ζ σημεία ἔσται καθ' ἃ τέμνει ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ Α Γ σημεία τὴν τῆς σφαίρας ἐπιφάνειαν. κγ'. Χρήσιμα καὶ τὰ ἐν τοῖς ἰδίως λεγομένοις ὀργανικοῖς καὶ μάλισθ' ὅταν ἐπὶ τὸ εὐκόλον ὑπὸ τῆς ἀναλύσεως χειραγωγούμενα τὴν ἀνάλογον πεῖραν διαφεύγειν δύνηται, οἷον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐπτά ἐξάγωνα ἐγγράψαι, τὸ μὲν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ κύκλῳ, τὰ δὲ λοιπὰ ἐξ ἀπὸ μὲν τῶν τοῦ μέσου πλευρῶν ἀναγεγραμμένα, τὰς δὲ ἀντικειμένους πλευρὰς ἔχοντα ἐνηρμοσμένας ἐκάστην εἰς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος περὶ κέντρον τὸ Η, καὶ κείσθω περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἐξαγώνου πλευρὰ ἡ ΘΚ, ὥστε ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ ἀναγραφὴν ἐξαγώνον τὴν ΜΝ πλευρὰν ἔχον ἐνηρμοσμένην τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν τῇ ΚΛ πλευρᾷ τοῦ ἐξαγώνου, διὰ τὸ διμοίρου μὲν εἶναι τὴν ὑπὸ ΗΚΘ, ὀρθῆς δὲ καὶ τρίτου τὴν ὑπὸ ΘΚΛ.

8.1098 ἐπεζεύχθω ἡ ΗΝ. ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΗΚ ΚΛ, διπλῇ ἐστὶν ἡ ΗΛ τῆς ΛΝ. καὶ δοθεῖσα ἡ Λ γωνία (ὀρθῆς γὰρ καὶ τρίτου)· δοθὲν ἄρα τὸ ΝΛΗ τρίγωνον τῷ εἶδει· λόγος ἄρα τῆς ΗΝ πρὸς ΝΛ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ ΗΝ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΝΛ πλευρὰ τοῦ ἐξαγώνου. Τὸ δὲ ὀργανικὸν οὕτως ἐκκείσθω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τρίτον μέρος ἡ ΑΓ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τμημα κύκλου τὸ ΑΒΓ γωνίαν δεχόμενον διμοίρου ὀρθῆς, καὶ οἷων ἐστὶν ἡ ΑΓ ε', τοιούτων δ' ἀπειλήφθω ἡ ΓΕ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΒΕ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἐπιζευχθεῖσα ἴση ἐστὶν τῇ ΘΚ τοῦ ἐξαγώνου πλευρᾷ. Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΑΒ ἴση ἀφηρήσθω ἡ ΒΔ· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΑΒΔ. καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἡ ΑΖ. ἐπεὶ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ λόγον ἔχει ὃν τὰ Θ' πρὸς δ', ἔξει καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τὸν αὐτὸν λόγον· ἡμιολία ἄρα ἡ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΒΔ, τῆς ΒΓ· διπλῇ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΓ τῆς ΓΑ· καὶ ἡ ΒΖ ἄρα ἐπιζευχθεῖσα τῆς ΑΔ, τουτέστιν τῆς ΑΒ, ἐστὶν διπλῇ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΗΛ τῆς ΛΝ διπλῇ, καὶ ἴσας περιέχουσιν γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΝΛΗ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΖ τῇ ΝΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΛΝ ἢ τῇ ΘΚ. Τὸ αὐτὸ ἄλλως σαφέστερον. κδ'. Ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δοθέντος κύκλου ἴση ἡ ΑΖ, καὶ ἀπειλήφθω αὐτῆς τὸ γ' μέρος, καὶ ἔστω ἡ ΑΓ, ἐφ' ἧς τμημα κύκλου γεγράφθω τὸ ΑΒΓ δεχόμενον γωνίαν διμοίρου ὀρθῆς, καὶ οἷων ἐστὶν ἡ ΑΓ ε', τοιούτων δ' ἀπειλήφθω ἡ ΓΕ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη τοῦ τμήματος ἡ ΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ τε ΑΒ καὶ ἡ ΖΒ, καὶ ἔτι ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ.

8.1100 ἐπεὶ οὖν εἰς κύκλον διήχθησαν ἡ τε ΕΓΑ καὶ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον ἡ δὲ ἐφάπτεται, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΓΕ· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ διὰ κ' τοῦ ζ'. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τὰ Θ' πρὸς δ'· ἡμιολία ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΒΓ· διπλασία ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῆς ΓΑ διπλασία· ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. καὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Γ γωνίαι· ἴση ἄρα καὶ ἡ μὲν Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ, ἡ δὲ Ζ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΓ. ἐναλλάξ ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. διπλασία δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· διπλασία ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΑΔ, τουτέστιν τῆς ΑΒ. καὶ ἔστιν διμοίρου ἡ Δ· διμοίρου ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ. ὅλη δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ μιᾶς ὀρθῆς καὶ γ'.

8.1102 ἐὰν οὖν ἔχωμεν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ Η, ἴσην ἔχοντα τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΑΖ εὐθείᾳ, καὶ διαγάγωμεν ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τὴν ΗΞ εὐθεΐαν, καὶ ἴσην θῶμεν τῇ ΖΒ τὴν ΗΛ εὐθεΐαν, καὶ

πρὸς τῇ ΗΛ εὐθείᾳ καὶ τῷ Λ σημείῳ ἴσην γωνίαν συστησώμεθα τὴν ὑπὸ ΗΛΝ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΗΝ, ἰσογώνιον γίνεται τὸ ΗΛΝ τρίγωνον τῷ ΑΖΒ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΖ ἴση τῇ ΗΝ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΑΒ. καὶ φανερόν ὅτι ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΑΒ εὐθείας γίνεται ἡ τῶν Ζ' εἰς τὸν κύκλον ἐξαγώνων ἐγγραφή. κε'. Πῶς δὲ καὶ ἡ τῶν προειρημένων τυμπάνων γίνεται παράθεσις, νῦν ἐροῦμεν. Ἐστω γὰρ δύο τύμπανα ἔντορνα καὶ παρακείμενα ἀλλήλοις τὰ Α Β, καὶ ἔστω ὡς ἡ διάμετρος τοῦ Α πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Β, οὕτως τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β· οὕτως γὰρ ἡ παράθεσις τῶν τυμπάνων σῶζεται διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περίμετρον, οὕτως τὴν διάμετρον πρὸς τὴν διάμετρον (τοῦτο γὰρ ἐξῆς).

8.1104 ὑποκείσθω δὴ τὸ μὲν Α ὀδόντων ξ', τὸ δὲ Β ὀδόντων μ'. λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ τάχος τοῦ Α πρὸς τὸ τάχος τοῦ Β, οὕτως τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α. Ἐπεὶ γὰρ παράκειται ἀλλήλοις τὰ Α Β, ὅσους ἂν ὀδόντας κινηθῇ τὸ Β, τοσούτους ὀδόντας κινηθήσεται καὶ τὸ Α· ὅταν ἄρα τὸ Β στρεφόμενον μίαν ἀποκατάστασιν ποιήσεται, τότε τὸ Α μ' ὀδόντας κινηθήσεται, ὥστε καί, ὅταν τὸ Β ξ' ἀποκαταστάσεις ποιήσεται, ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α, τότε τὸ Α ὀδόντας κινηθήσεται, βυ', ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καί, ὅταν τὸ Α μ' ἀποκαταστάσεις ποιήσεται, ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β, τότε τὸ Β ὀδόντας κεκινημένον, βυ', ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α· ὅταν ἄρα τὸ Α ἀποκαταστάσεις ποιήσεται μ', ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β, τότε καὶ τὸ Β ἀποκαταστάσεις ποιεῖται ξ', ὅσον ἔστιν τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ τάχος τοῦ Α πρὸς τὸ τάχος τοῦ Β, οὕτως τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Β πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α. κζ'. Ὅτι δὲ αἱ τῶν κύκλων περιφέρειαι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ διαμέτροι, νῦν δείξομεν. Ἐστῶσαν γὰρ δύο κύκλοι οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ διαμέτροι αὐτῶν αἱ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ ΓΔ κύκλου περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΒ διάμετρος πρὸς τὴν ΓΔ.

8.1106 Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ὁ ΑΒ κύκλος πρὸς τὸν ΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστιν τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τε τῆς ΑΒ διαμέτρου καὶ τῆς τοῦ ΑΒ περιφερείας, τοῦ δὲ ΓΔ κύκλου τετραπλάσιόν ἐστιν τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς τοῦ ΓΔ περιφερείας (τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὀρθογώνιον διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης, καὶ ὡς ἐν τῷ εἰς τὸ πρῶτον τῶν μαθηματικῶν σχολίῳ δέδεικται καὶ ὑφ' ἡμῶν δι' ἐνὸς θεωρήματος), καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῆς τοῦ ΓΔ κύκλου περιφερείας, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ ΑΒ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ ΓΔ κύκλου περιφερείας καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρεια πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ τοῦ ΓΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔ (τοῦτο γὰρ πρῶτόν ἐστιν ἐν τῷ ζ' λαμβανόμενον), καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ τοῦ ΑΒ περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ ΓΔ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. κζ'. Τυμπάνου δοθέντος καὶ τοῦ πλήθους τῶν ὀδόντων αὐτοῦ, ἐπιτετάχθω παραθεῖναι αὐτῷ τύμπανον δοθὲν ἔχον τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων καὶ εὔρεῖν τὴν διάμετρον τοῦ παρατιθεμένου τυμπάνου.

8.1108 Ἐστω τύμπανον τὸ Α, οὗ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων ἔστω ὁ Β ἀριθμὸς [μονάδων ξ'], καὶ παρακείσθω τῷ Α τὸ Γ τύμπανον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν ὀδόντων ἔστω ὁ Δ ἀριθμὸς [μονάδων μ']· δεῖ δὴ τοῦ Γ τὴν διάμετρον εὔρεῖν. Ἐπεὶ οὖν ὁ Β ἀριθμὸς πλῆθός ἐστιν ὀδόντων τοῦ Α, ὁ δὲ Δ πλῆθός ἐστιν ὀδόντων τοῦ Γ [καὶ ἔστιν τὸ μὲν πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Α ἡ περίμετρος αὐτοῦ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὀδόντων τοῦ Γ ἡ περίμετρος αὐτοῦ], ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ,

οὕτως ἡ περίμετρος τοῦ Α πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ Γ. ὥς δὲ ἡ περίμετρος πρὸς τὴν περίμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. λόγος δὲ τοῦ Β ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν δοθείς [ἔστιν γὰρ ὁ τῶν ξ' πρὸς τὰ μ']. λόγος ἄρα καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ Α πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ Γ δοθείς [ὁ τῶν ξ' πρὸς τὰ μ']. καὶ ἔστιν δοθεῖσα ἡ διάμετρος τοῦ Α· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ διάμετρος τοῦ Γ [δεῖ γὰρ ποιεῖν ὥς τὸν ξ' ἀριθμὸν πρὸς τὸν μ', οὕτως τὴν διάμετρον τοῦ Α πρὸς ἄλλην τινά, καὶ ὁ περὶ διάμετρον ἐκείνην γραφόμενος κύκλος ἴσος ἔσται τῷ ζητούμενῳ τυμπάνῳ]. Ὀργανικῶς δὲ οὕτως ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ τετμημένη εἰς ἴσα, ἴσα τὸ πλῆθος τοῖς ὁδοῦσι τοῦ Α τυμπάνου [τουτέστιν ξ'], καὶ πρὸς ὁρθὰς αὐτῇ ἀχθεῖσα κείσθω διάμετρω τοῦ Α τυμπάνου ἴση ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ, καὶ [οἷων ἡ ΕΖ ξ', τοιούτων μ'] ἀπειλήφθω ἡ ΕΘ τοῦ πλήθους τῶν ὁδόντων τοῦ Γ γινομένη, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΖΗ ἤχθω ἡ ΘΚ· καὶ ἔσται ἄρα ἡ ΘΚ ἴση τῇ διαμέτρῳ τοῦ Γ τυμπάνου (φανερὰ γὰρ ἡ ἀποδείξις). κη'. Πῶς δὲ κατασκευάζεται κοχλίας τὴν ἔλिका ἀρμοστήν ἔχων τοῖς λοξοῖς ὁδοῦσι τοῦ δοθέντος τυμπάνου, φανερόν οὕτως ἔσται. Νοείσθω κύλινδρος ἰσοπαχῶς τετορνευμένος ὁ ΑΔΕΖ, πλευρὰ δ' αὐτοῦ ἡ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω μονοστροφῶν ἔλικος ἐπ' αὐτῆς διάστημα τὸ ΑΒ, καὶ λεπίδιον χαλκοῦν γεγενήσθω, οὗ τὸ μὲν ΗΘΚ μέρος τρίγωνον ὀρθογώνιον ἔστω ὀρθὴν ἔχον τὴν Θ γωνίαν, τὸ δὲ λοιπὸν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΘΚΛ, ἴση δὲ κείσθω ἡ ΘΗ τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ περιμέτρῳ τοῦ ΑΔΕΖ κυλίνδρου, καὶ περικαμπτέσθω τὸ λεπίδιον περὶ τὸν κύλινδρον, ἵνα καὶ τὸ ΘΚΛ παραλληλόγραμμον κύλινδρος γένηται ἀπτόμενος τοῦ ΔΕ, ὅταν εἰσαχθῇ, καὶ κείσθω τὸ μὲν Θ ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ Η ἐπὶ τὸ Β, καὶ οὕτως γράψομεν διὰ τῆς ΗΚ ὑποτείνουσας καμφθείσης [δὲ] τὴν καλουμένην μονόστροφον ἔλिका ὡς τὴν ΒΑ.

8.1110 καὶ πάλιν μεταθέντες τὸ λεπίδιον, ὥστε τὸ μὲν Θ κατὰ τὸ Β εἶναι τὸ δὲ Η κατὰ τὸ Γ, γράψομεν διὰ τῆς ΗΚ ἑτέραν ἔλिका μονόστροφον, ὥστε τὴν ὅλην εἶναι δίστροφον. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ τὸ Α ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται ὁμαλῶς κινούμενον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου κινηθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκαθίσταται καὶ τὸ εἰρημένον φέρεσθαι σημεῖον κατὰ τῆς ΑΒ εὐθείας γράψει τὴν μονόστροφον ἔλिका· τοῦτο γὰρ Ἀπολλώνιος ὁ Περγεὺς ἀπέδειξεν. [ἐὰν οὖν καὶ ἑκατέραν τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ τὰς ἐξῆς ἄχρι τοῦ Ε δίχα τέμνωμεν καὶ διὰ τῶν σημείων τῷ λεπιδίῳ γράψωμεν μονοστροφούς ἔλικας ἀπ' αὐτῶν κατὰ τὸ βάθος τῆς ἔλικος ὁ βουλούμεθα λάβωμεν καὶ ἀπὸ τοῦ βάθους λοιπὸν καὶ τῆς γραφείσης ἔλικος, ῥαδίως τὴν ἔλिका φακοειδῆ ῥινήσαντες ἔξομεν ἀπηρτισμένην.] κθ'. Πάλιν νοείσθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ δοθέντος τυμπάνου περὶ τὸν κότρυφον κύκλος, οὗ περιφέρεια ἡ ΡΥΤ κέντρον δὲ τὸ Ξ, καὶ τὰ Ρ Υ Τ ἴσον ἀπ' ἀλλήλων ἀπέχοντα, λόγου χάριν τοῦ πανὸς κύκλου εἰς εἴκοσι τέσσαρα διηρημένου, καὶ ἀπὸ τῶν Ρ Υ Τ ἐπὶ τὸ Ξ κέντρον νεύουσαι διήχθωσαν ἄχρι τοῦ περὶ τὸ Ξ κέντρον γεγραμμένου κύκλου τοῦ ΜΝΠΦ αἱ ΡΟ ΥΟ ΤΟ, καὶ ἀπὸ τῶν διχοτομούντων τὰς ΟΟ περιφερείας σημείων διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Ρ Υ Τ σημεῖα αἱ ΜΡ ΝΡ ΝΥ ΠΥ ΠΤ ΤΦ, καὶ ἀπὸ τῆς ΟΡ εὐθείας προήχθω ἐν τῇ κυρτῇ τοῦ τυμπάνου ἐπιφανείᾳ ἡ ΡΣ μέχρι τῆς περιφερείας οὔσα τοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ τυμπάνου περὶ τὸν κότρυφον ὁμοίως γραφομένου τοῦ ΧΩ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ Σ τῇ μὲν ἡμισείᾳ τῆς ΡΥ περιφερείας [ὡς λοξώσεως] ἴση κείσθω ἡ ΣΧ, τῇ δὲ ΡΥ ἡ ΧΩ, καὶ οὕτως ἐξῆς ἴσην θέντες τῇ ΥΤ τὴν ΩΨ καὶ τὰς λοιπὰς, καὶ ἐπιζεύξαντες τὰς ΡΧ ΥΩ ΤΨ ἔξομεν τὰς τῶν ὁδόντων λοξώσεις.

8.1112 καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΡΥ κύκλος τῷ ΧΩ κύκλῳ, γράψομεν κὰν τῇ ἑτέρᾳ ἐπιφανείᾳ τοῦ τυμπάνου περὶ κέντρον τὸ ἀντικείμενον τῷ Ξ σημείῳ κύκλον ἴσον τῷ ΜΝ, καὶ ἀπὸ τῶν Χ Ω ἀγαγόντες ἐπ' αὐτὸν εὐθείας νεούσας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ, καὶ τὰ αὐτὰ ποιήσαντες τοῖς ἐπὶ τῆς ΡΥΤ περιφερείας [τοῦ κύκλου] ἔξομεν καὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τυμπάνου καταγεγραμμένην. καὶ λοιπὸν ἐκκόψαντες τὰ μεταξὺ τῶν γραμμῶν σχήματα ὡς τὰ ΝΡΥ ΥΠΤ καὶ τὰ ἀντικείμενα ἔξομεν τὸ τύμπανον ὠδοντωμένον ὁδοῦσιν λοξοῖς.

8.1114 ἐμβαίνει δὲ ἕκαστος εἰς τὴν τοῦ κοιλίου ἔλικα, ἐπεὶ καὶ τὸ μεταξὺ διάστημα τὸ ΡΥ ἴσον ἐστὶν τῷ ΑΒ διαστήματι τῆς τοῦ κοιλίου ἔλικος. καὶ δῆλον ὡς καθ' ἑκάστην στροφὴν τοῦ κοιλίου εἰς ὁδοὺς παρενεχθήσεται· τοῦτο γὰρ Ἦρων ἀπέδειξεν ἐν τοῖς μηχανικοῖς, γραφήσεται δὲ καὶ ὑφ' ἡμῶν, ἵνα μηδὲν ἔξωθεν ἐπιζητῶμεν. λ'. Νοείσθω γὰρ κοιλίας ὁ ΑΒ, ἡ δὲ ἐν αὐτῷ ἔλιξ ἡ ΑΓΔΕΖΒ [νοείσθωσαν δὲ μονόστροφοι αἱ εἰρημέναι ἔλικες], τύμπανον δὲ ἕστω [τὸ] παρακείμενον καὶ ὠδοντωμένον τὸ ΗΓΕΘ ὀδόντας ἔχον τοὺς ΗΓ ΓΕ ΕΘ ἀρμόζοντας τῇ ἔλικι [οἱ ἄρα λοιποὶ οὐκ ἐναρμόσουσιν εἰς τὰς λοιπὰς ἔλικας]. ἐὰν οὖν ἐπιστρέφωμεν τὸν κοιλίαν, ὥστε τὸ Ε σημεῖον παρωθεῖσθαι ἐπὶ τὰ Γ μέρη, παρέσται τὸ Ε ἐπὶ τὸ Γ, ὅταν ὁ κοιλίας ἀποκατάστασιν μίαν ποιήσεται, καὶ ἔξει ὁ μὲν ΓΕ ὁδοὺς τὴν τοῦ ΓΗ θέσιν, ὁ δὲ ΕΘ τὴν τοῦ ΓΕ, καὶ πάλιν ὁ ΕΘ θέσιν ἐσχηκῶς τὴν ΓΕ ἐν μιᾷ τοῦ κοιλίου περιστροφῇ ὅλος παραχθήσεται. καὶ ἐπὶ τῶν ἐξῆς ὀδόντων τὰ αὐτὰ ἐπινοεῖν χρή, ὥστε, ὅσους ἂν ὀδόντας ἔχῃ τὸ τύμπανον, τοσαυτάκις ὁ κοιλίας κινηθεὶς μίαν ἀποκατάστασιν τοῦ τυμπάνου ποιήσεται. λα'. Τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ τοῦ βαρουλκοῦ, τῶν δὲ προειρημένων ε' δυνάμεων ἐκ τῶν Ἦρωνος τὴν ἔκθεσιν ἐπιτομώτερον ποιησόμεθα πρὸς ὑπόμνησιν τῶν φιλομαθούντων, προσθέντες ἔτι καὶ τὰ περὶ τῆς μονοκώλου καὶ δικώλου καὶ τρικώλου καὶ τετρακώλου μηχανῆς ἀναγκαίως λεγόμενα, μή ποτε καὶ τῶν βιβλίων ἐν οἷς ταῦτα γέγραπται ἀπορία γένηται τῷ ζητοῦντι· καὶ γὰρ ἡμεῖς κατὰ πολλὰ μέρη διεφθαρμένοι ἐνετύχομεν ἀνάρχους τε καὶ ἀτελεσι βιβλίοις.

8.1116 πέντε τοίνυν οὐσῶν δυνάμεων δι' ὧν τὸ δοθὲν βάρος τῇ δοθείσῃ βίᾳ κινεῖται, ἀναγκαῖόν ἐστιν τὰ τε σχήματα αὐτῶν καὶ τὰς χρεῖας ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀνόματα ἐκθέσθαι. ἀποδέδοται δὲ ὑπὸ τοῦ Ἦρωνος καὶ Φίλωνος καὶ διότι αἱ προειρημέναι δυνάμεις εἰς μίαν ἄγονται φύσιν, καίτοι παρὰ πολὺ διαλλάσσουσιν τοῖς σχήμασιν. ὀνόματα μὲν οὖν ἐστὶν τάδε· ἄξων ἐν περιτροχίῳ, μοχλός, πολύσπαστον, σφήν, καὶ πρὸς τούτοις ὁ καλούμενος ἄπειρος κοιλίας. Ὁ μὲν οὖν ἄξων ὁ ἐν τῷ περιτροχίῳ κατασκευάζεται οὕτως· ξύλον δεῖ λαβεῖν εὐτονον τετράγωνον (καθάπερ δοκίδα) καὶ τούτου τὰ ἄκρα σιμῶσαντα στρογγύλα ποιῆσαι καὶ χοινικίδας περιθεῖναι χαλκᾶς συναραρυίας τῷ ἄξονι, ὥστε ἐμβληθείσας αὐτὰς εἰς τρήματα στρογγύλα ἐν ἀκινήτῳ τινὶ πήγματι εὐλύτως στρέφεσθαι τῶν τρημάτων τριβεῖς χαλκοῦς ἐχόντων ὑποκειμένους ταῖς χοινικίσι· καλεῖται δὲ τὸ εἰρημένον ξύλον ἄξων. περὶ δὲ μέσον τὸν ἄξωνα περιτίθεται τύμπανον ἔχον τρήμα τετράγωνον ἀρμοστὸν τῷ ἄξονι, ὥστε ἅμα στρέφεσθαι τὸν τε ἄξωνα καὶ τὸ περιτρόχιον. Ἡ μὲν οὖν κατασκευὴ δεδήλωται, χρεῖα δ' ἐστὶν ἡ μέλλουσα λέγεσθαι.

8.1118 ὅταν γὰρ βουλώμεθα μεγάλα βάρη κινεῖν ἐλάσσονι βίᾳ, τὰ ἐκδεδεμένα ἐκ τοῦ βάρους ὅπλα περιθέντες περὶ τὰ σεσιμωμένα τοῦ ἄξωνος, καὶ ἐμβαλόντες σκυτάλας εἰς τὰ ἐν τῷ περιτροχίῳ τρήματα, ἐπιστρέφομεν τὸ περιτρόχιον κατάγοντες τὰς σκυτάλας, καὶ οὕτως εὐκόπως κινηθήσεται τὸ βάρος ὑπὸ ἐλάσσονος δυνάμεως τῶν ὅπλων περὶ τὸν ἄξωνα ἐπειλουμένων [ἢ καὶ διαμνησμένων ὑπὸ τινος πρὸς τὸ μὴ ἅπαν τὸ ὅπλον περικεῖσθαι τῷ ἄξονι]. τοῦ δὲ εἰρημένου ὀργάνου τὸ μὲν μέγεθος ἀρμόζεσθαι δεῖ πρὸς τὰ μέλλοντα κινεῖσθαι βάρη, τὴν δὲ συμμετρίαν πρὸς τὸν λόγον ὃν ἔχει τὸ κινούμενον βάρος πρὸς τὴν κινούσαν δύναμιν, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται. Ἦν δὲ δευτέρα δύναμις ἡ διὰ τοῦ μοχλοῦ [καὶ τάχα ἡ προεπίνοια τῆς περὶ τὰ ὑπεράγαν βάρη κινήσεως]· προελόμενοι γάρ τινες μεγάλα βάρη κινεῖν, ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς γῆς ἔδει πρῶτον μετεωρίσαι, λαβὰς δὲ οὐκ εἶχον διὰ τὸ πάντα τὰ μέρη τῆς ἔδρας τοῦ φορτίου ἐπικεῖσθαι τῷ ἐδάφει, ὑπορύξαντες βραχὺ καὶ ξύλον μακροῦ τὸ ἄκρον ὑποβαλόντες ὑπὸ τὸ φορτίον κατήγον ἐκ τοῦ ἐτέρου ἄκρου, ὑποθέντες τῷ ξύλῳ παρ' αὐτὸ τὸ φορτίον λίθον, ὃ δὴ καλεῖται ὑπομόχλιον. φανείσης δ' αὐτοῖς τῆς κινήσεως πάνυ εὐκόπου ἐνόησαν ὅτι δυνατόν κινεῖσθαι μεγάλα βάρη διὰ τοῦ τρόπου τούτου. καλεῖται δὲ τὸ ξύλον μοχλός, εἴτε τετράγωνον εἴη εἴτε στρογγύλον. ὅσῳ δ' ἂν ἐγγυτέρω τιθῇται τοῦ φορτίου τὸ ὑπομόχλιον, τοσοῦτ' εὐχερέστερον κινεῖται τὸ βάρος, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται. Ἔστιν δὲ ἡ τρίτη δύναμις ἡ κατὰ τὸ πολύσπαστον. ὅταν

γὰρ βουλώμεθ' αὖτις βάρος ἔλκειν, ἐξάψαντες ὅπλον ἐξ αὐτοῦ ἐπισπώμεθα τοσαύτη βία, ὅση τῷ φορτίῳ ἰσορροπός ἐστιν.

8.1120 ἐὰν δὲ ἐλκύσαντες ἐκ τοῦ φορτίου τὸ ὅπλον τὴν μὲν μίαν αὐτοῦ ἀρχὴν ἐκδήσωμεν ἕκ τινος μένοντος χωρίου, τὴν δὲ ἑτέραν βάλῃμεν διὰ τροχίλου ἐκδεδεμένου ἐκ τοῦ φορτίου καὶ ταύτην ἐπισπώμεθα, εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. πάλιν δὲ ἐὰν ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάψωμεν ἕτερον τροχίλον καὶ τὴν ἀγομένην ἀρχὴν διαβαλόντες διὰ τούτου ἐπισπώμεθα, ἔτι μᾶλλον εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. καὶ πάλιν ἐὰν ἐκ τοῦ φορτίου τροχίλον ἕτερον ἐκδήσωμεν καὶ τὴν ἀγομένην ἀρχὴν διὰ τούτου διαβαλόντες ἐπισπώμεθα, πολλῷ μᾶλλον εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. αἱ δὲ τροχίλους ἕκ τε τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάπτοντες καὶ ἐκ τοῦ φορτίου καὶ διαβάλλοντες ἐναλλάξ τὴν ἀγομένην ἀρχὴν εἰς τοὺς τροχίλους εὐχερέστερον κινήσομεν τὸ βάρος. [ὅσῳ δ' ἂν εἰς πλείονα κῶλα τὸ ὅπλον κάμπηται, τὸ βάρος εὐκοπώτερον κινήθησεται· δεῖ δὲ τὴν ἐκδεννυμένην ἀρχὴν ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου ἐξάπτεσθαι.] ἵνα οὖν μὴ καθ' ἓνα τοὺς τροχίλους ἕκ τε τοῦ μένοντος χωρίου καὶ ἐκ τοῦ φορτίου ἐξάπτωμεν, οἱ μὲν εἰρημένοι εἰς τὸ μένον εἶναι χωρίον εἰς ἓν ζύλον ἐντίθενται περὶ ἄξονα κινούμενοι, ὃ καλεῖται μάγγανον, τοῦτο δὲ ἐξάπτεται ἐκ τοῦ μένοντος χωρίου διὰ τινος ἑτέρου ὅπλου, οἱ δὲ πρὸς τῷ φορτίῳ εἰς ἕτερον μάγγανον τούτῳ ἴσον, ὃ δὴ πάλιν ἐξάπτεται ἐκ τοῦ φορτίου μόνον. οὕτως δὲ δεῖ κατατετάχθαι ἐν τοῖς μαγγάνοις τοὺς τροχίλους, ὥστε τὰ κῶλα μὴ ἐμπλεκόμενα πρὸς ἄλληλα δυσπειθῆ γίνεσθαι.

8.1122 δι' ἣν δ' αἰτίαν πλειόνων τῶν κῶλων γινομένων εὐκοπία παρακολουθεῖ, δείξομεν, καὶ δι' ἣν αἰτίαν ἢ ἑτέρα ἀρχὴ ἐκ τοῦ μένοντος ἐξάπτεται χωρίου. Ἡ δὲ ἐξῆς δύναμις ἢ διὰ τοῦ σφηνὸς καὶ αὕτη μεγάλας χρεῖας παρεχομένη πρὸς τε τὰς μυρεψικὰς πιέσεις καὶ τὰς διὰ τῆς τεκτονικῆς ὑπεραγούσας κολλήσεις, τὸ δὲ πάντων μέγιστον, ὅταν τοὺς ἐκ τῶν λατομιῶν λίθους ἀποσπᾶν δέῃ τῆς κατὰ τὸ κάτω μέρος συνεχείας, οὐδεμία τῶν ἄλλων δυνάμεων ἐνεργεῖν δύναται, οὐδ' ἂν ἅμα πᾶσαι συζευχθῶσιν, μόνος δὲ ὁ σφὴν ἐνεργεῖ διὰ τῆς τυχούσης, καὶ ἄνεσις μὲν οὐδ' ἡτισοῦν γίνεται κατὰ τὰ διαλήμματα τῶν ἐργαζομένων, καρτερὰ δὲ ἢ ἐπίτασις. τοῦτο δὲ φανερόν ἐκ τοῦ καὶ μὴ πλησσομένου τοῦ σφηνὸς ἐνίοτε ψόφους καὶ ῥήγματα γίνεσθαι διὰ τῆς τοῦ σφηνὸς ἐνεργείας. ὅσῳ δ' ἂν ἡ τοῦ σφηνὸς γωνία ἐλάσσων γίνηται, τοσοῦτ' εὐχερέστερον ἐνεργεῖ, τουτέστιν δι' ἐλάσσονος πληγῆς, ὡς δείξομεν. Τὰ μὲν οὖν προειρημένα ὄργανα φανεράς καὶ αὐτοτελεῖς ἔχει τὰς κατασκευὰς πολλαχοῦ ἐν ταῖς χρεῖαις φαινομένης, ὃ δὲ κοχλίας ἔχει τι περίεργον περὶ τε τὴν κατασκευὴν καὶ τὴν χρῆσιν. ὅτε μὲν [οὖν] γὰρ αὐτὸς καθ' αὐτὸν μόνος ἐνεργεῖ, ὅτε δὲ καὶ προσλαμβάνων ἔτι δύναμιν, πλὴν ὅτι οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν ἢ σφὴν εἰλημένος, ἀπολειπόμενος τῆς πληγῆς, διὰ μοχλοῦ δὲ καὶ στροφῆς τὴν κίνησιν ποιούμενος.

8.1124 τοῦτο δ' ἔσται δῆλον ἐκ τῶν μελλόντων λέγεσθαι. φύσις μὲν οὖν ὑπάρχει τῆς περὶ αὐτὸν πραγματείας τοιαύτης· ἐὰν κυλίνδρου πλευρὰ φέρεται κατὰ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, πρὸς δὲ τῷ πέρατι ταύτης σημεῖόν τι ἅμα κατὰ αὐτῆς τῆς πλευρᾶς φέρεται, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ ἢ τε πλευρὰ μίαν ἀποκατάστασιν ποιήσεται καὶ τὸ σημεῖον τὸ πᾶν τῆς πλευρᾶς διεξέλθῃ, ἢ γενομένη ὑπὸ τοῦ σημείου ἐν τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ γραμμὴ ἔλξῃ ἐστίν, ἣν δὴ κοχλίαν καλοῦσιν. καταγράφεται δὲ ἐν τῷ κυλίνδρῳ οὕτως· ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθείας ἐκθώμεθα ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν ἡ μὲν μία ἴση ἐστὶν τῇ τοῦ εἰρημένου κυλίνδρου πλευρᾷ, ἡ δὲ ἑτέρα τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ, ὅς ἐστιν βάσις τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν εἰρημένων εὐθειῶν ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τεθῇ δὲ ἡ ἴση τῇ τοῦ κυλίνδρου πλευρᾷ ἐπὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου πλευράν, ἡ δὲ ἑτέρα τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἐπειληθῇ κατὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, εἰληθήσεται καὶ ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν κατὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, καθ' ἣς ἔσται ἡ εἰρημένη ἔλξις. ἔξεστιν δὲ διελόντα τὴν τοῦ κυλίνδρου πλευρὰν εἰς ἴσα, ὁπότε ἂν τις

προαιρῆται, καθ' ἕκαστον αὐτῆς μέρος περιγράφειν ἔλικα, ὡς προεῖρηται [ὥστε ἐν τῷ κυλίνδρῳ πλείονας ἔλικας γράφεσθαι, καλείσθω δὲ ἡ ἅπαξ εἰληθεῖσα ἔλιξ μονόστροφος, τουτέστιν ἡ περὶ τὰ παρὰ ἑκάστου μέρους γινομένη γραμμή].

8.1126 κατὰ αὐτῆς οὖν τῆς γραμμῆς σωλῆνα ἐντεμόντες εἰς τὸ βάθος τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐκκόψαντες, ὥστε ἐν τῷ σωλῆνι τύλον ἐναρμόσαι στερεόν, χρῶνται τῷ κοχλίᾳ οὕτως· τὰ ἄκρα αὐτοῦ στρογγύλα ποιήσαντες ἐναρμόζουσιν εἰς τινὰ διαπήγματα ἐν στρογγύλοις τρήμασιν, ὥστε εὐκόπως αὐτὸν στρέφεσθαι, ὑπὲρ δὲ τὸν κοχλίαν κανόνα διατιθέντες παράλληλον αὐτῷ σωλῆνα ἔχοντα μέσον ἐν τῇ ἄνω ἐπιφανείᾳ ἐναρμόζουσιν εἰς τοῦτον τὸν σωλῆνα τὸν εἰρημένον τύλον, ὥστε τὸ μὲν ἕτερον ἄκρον τοῦ τύλου μένειν ἐν τῷ τοῦ κοχλίου σωλῆνι, τὸ δὲ ἕτερον ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐτέρῳ σωλῆνι τῷ ἐν τῷ κανόνι. ὅταν οὖν βούλωνται φορτίον κινεῖν διὰ τούτου τοῦ ὀργάνου, ὅπλον λαβόντες τούτου τὴν μὲν μίαν ἀρχὴν ἐξάπτουσιν ἐκ τοῦ φορτίου, τὴν δὲ ἐτέραν ἐκ τοῦ προειρημένου τύλου, καὶ τρημάτων ὄντων τῇ κεφαλῇ τοῦ κοχλίου σκυτάλας ἐμβalόντες κατὰγουσιν, καὶ οὕτως ὑπὸ τῆς ἔλικος ὁ τύλος παραγόμενος ἐν τῷ σωλῆνι ἐπισπᾶται τὸ ὅπλον δι' οὗ καὶ τὸ φορτίον. ἔξεστιν δὲ ἀντὶ τῶν σκυταλῶν χειρολάβην τινὰ περιθεῖναι τῷ ἄκρῳ τοῦ κοχλίου ὑπερέχοντι εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ διαπήγματος καὶ οὕτως στρέφοντα τὸν κοχλίαν ἐπισπᾶσθαι τὸ φορτίον. ἢ δ' ἐν τῷ κοχλίᾳ ἔλιξ ὅτε μὲν τετράγωνος γίνεται ὅτε δὲ φακοειδής, τετράγωνος μὲν, ὅταν ὁ ἐν αὐτῷ σωλῆνι ὀρθὰς ἔχη τὰς ἐντομάς, φακοειδής δέ, ὅταν λοξὰς καὶ εἰς μίαν συναγομένης γραμμὴν.

8.1128 καλεῖται δὲ ὁ μὲν τετράγωνος, ὁ δὲ φακωτός. Ὅταν μὲν οὖν αὐτὸς καθ' αὐτὸν ὁ κοχλίας ἐνεργῇ, ταύτην λαμβάνει τὴν κατασκευὴν, γίνεται δὲ καὶ ἐτέρως· προσλαβόντες γάρ τινὰ ἐτέραν δύναμιν τὴν διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ ἐν τῷ περιτροχίῳ καλουμένου [κατασκευῇ] νοήσομεν τὸ περὶ τὸν ἄξονα τύμπανον ὠδοντωμένον εἶναι, κοχλίαν δὲ τινὰ παρακεῖσθαι τῷ τυμπάνῳ ἥτοι ὀρθὸν κείμενον πρὸς τὸ ἑδάφος ἢ παράλληλον τῷ ἐδάφει, ἔχοντα τὴν μὲν ἔλικα ἐμπεπλεγμένην τοῖς ὀδοῦσι τοῦ τυμπάνου τὰ δὲ ἄκρα ἐν στρογγύλοις τρήμασιν πολευόμενα ἔντισιν διαπήγμασιν, καθάπερ καὶ προεῖρηται, καὶ ὑπεροχῆς οὔσης τοῦ ἄκρου τοῦ κοχλίου εἰς τὸ ἐκτὸς τοῦ διαπήγματος μέρος, ἥτοι χειρολάβην τινὰ περικεῖσθαι, δι' ἧς ἐπιστραφήσεται ὁ κοχλίας, ἢ τρήματα, ὥστε σκυταλῶν ἐμβληθεισῶν ὁμοίως ἐπιστρέφεσθαι· αὐτόν. πάλιν οὖν τὰ ἐκ τοῦ φορτίου ὅπλα περιβαλόντες περὶ τὸν ἄξονα ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τυμπάνου καὶ ἐπιστρέφοντες τὸν κοχλίαν, δι' οὗ καὶ τὸ ὠδοντωμένον τύμπανον, ἐπισπασόμεθα τὸ βάρος.

8.1130 Αἱ μὲν οὖν κατασκευαὶ καὶ αἱ χρήσεις τῶν προειρημένων πέντε δυνάμεων δεδῆλῶνται, τίς δὲ ἐστὶν ἡ αἰτία, δι' ἣν δι' ἑκάστης αὐτῶν μεγάλη βάρη κινεῖται μικρὰ παντάπασιν δυνάμει, Ἡρῶν ἀπέδειξεν ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἐν δὲ τοῖς ἐξῆς ἐκ τοῦ γ' τῶν Ἡρῶνος μηχανὰς γράψομεν πρὸς εὐκοπίαν καὶ λυσιτέλειαν ἀρμοζούσας, δι' ὧν πάλιν μεγάλη βάρη κινήσεται. τὰ μὲν οὖν ἀγόμενα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, φησὶν, ἐπὶ χελώνας ἄγεται. ἡ δὲ χελώνη πῆγμά ἐστιν ἐκ τετραγώνων ξύλων συμπεπηγός, ὧν τὰ ἄκρα ἀνασεσίμωται. τούτοις οὖν ἐπιτίθεται τὰ βάρη, καὶ ἐκ τῶν ἄκρων αὐτῶν ἥτοι πολύσπαστα ἐκδέννυται ἢ ὅπλων ἀρχαί. ταῦτα δὲ ἥτοι ἀπὸ χειρὸς ἔλκεται ἢ εἰς ἐργάτας ἀποδίδοται, ὧν περιανομένων ἢ χελώνῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους σύρεται ὑποβαλλομένων σκυταλίων ἢ σανίδων. ἐὰν μὲν γὰρ μικρὸν ᾖ τὸ φορτίον, σκυτάλαις χρῆσθαι δεῖ, ἐὰν δὲ μεῖζον, ταῖς σανίσιν διὰ τὸ ταύτας μὴ εὐκόλως σύρεσθαι· αἱ γὰρ σκυτάλαι κυλιόμεναι κίνδυνον ἔχουσιν τοῦ φορτίου ὀρμὴν λαβόντος. ἔνιοι δὲ οὔτε σκυτάλαις οὔτε σανίσιν χρῶνται, ἀλλὰ τροχοὺς ναστοὺς προσθέντες ταῖς χελώνας ἄγουσιν.

8.1132 λβ'. Ἐπὶ δὲ τῶν εἰς ὕψος βασταζομένων φορτίων, φησὶν, μηχαναὶ γίνονται αἱ μὲν μονόκωλοι, αἱ δὲ δίκωλοι, αἱ δὲ τρίκωλοι, αἱ δὲ τετράκωλοι. αἱ μὲν οὖν μονόκωλοι οὕτως ξύλον εὐτονον λαμβάνεται ὕψος ἔχον μεῖζον ἢ οὗ βουλόμεθα τὸ φορτίον μετεωρίσαι, κἂν μὲν αὐτὸ καθ' αὐτὸ ἰσχυρὸν ᾖ, ὅπλον βάλλοντες περὶ αὐτὸ [καὶ σφίγγοντες] καὶ διαμηρυόμενοι κατὰ ἐπείλησιν

ἀποσφίγγουσιν. τῶν δὲ ἐπειλήσεων τὸ μεταξὺ διάστημα οὐ πλεῖον γίνεται παλαιστῶν δ', καὶ οὕτως εὐτονώτερόν τε γίνεται τὸ ξύλον καὶ αἱ τοῦ ὅπλου ἐπειλήσεις ὥσπερ βαθμοὶ τοῖς ἐργαζομένοις καὶ βουλομένοις εἰς τὸ ἄνω μετεωρίζεσθαι εὐχρηστοὶ γίνονται. ἐὰν δὲ μὴ ἢ εὐτονον τὸ ξύλον, ἐκ πλειόνων συμβλητὸν γίνεται. [στοχάζεσθαι δεῖ τῶν μελλόντων βαστάζεσθαι φορτίων, ὅπως μὴ ἀσθενέστερον τὸ κῶλον ὑπάρχη.] ἴσταται οὖν τὸ κῶλον ὀρθὸν ἐπὶ τινος ξύλου καὶ ἐκ τοῦ ἄκρου αὐτοῦ ὅπλα ἐκδέννυνται τρία που ἢ τέσσαρα καὶ ἀποτεθέντα ἀποδίδεται πρὸς τινα μένοντα χωρία, ὅπως τὸ ξύλον, ὅπου ἂν τις βιάζεται, μὴ παραχωρῇ κατεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεταμένων ὅπλων. ἐκ δὲ τοῦ ἄνω μέρους αὐτοῦ πολύσπαστα ἐξάψαντες καὶ ἀποδιδόντες εἰς τὸ φορτίον ἐπισπῶνται ἥτοι ἀπὸ χειρὸς ἢ εἰς ἐργάτας ἀποδόντες, εἰς ὅταν μετεωρισθῇ τὸ φορτίον. καὶν δέη τὸν λίθον ἐκτεθῆναι ἐπὶ τείχος ἢ ὅπου βούλεται τις, ἐκλύσαντες ἔν τῶν ἐκδεννυμένων ἐκ τοῦ ἄκρου ὅπλων τὸ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ φορτίου κείμενον ἐγκλίνουσιν τὸ κῶλον, ἢ τὰς σκυτάλας ὑποβάλλοντες ὑπὸ τὸ φορτίον ἐν τοῖς μέρεσιν, ἐν οἷς ἡ σφενδόνη ἐν τῷ λίθῳ οὐκ ἐπείληται, χαλῶσι τὰ ἀγόμενα τῶν πολυσπαστῶν ἄχρι ἂν ἐπικαθίσῃ τὸ φορτίον ταῖς σκυτάλαις, εἴτ' ἐκλύσαντες τὴν σφενδόνην μοχλεύουσι τὸ φορτίον ἄχρι οὗ εἰς ὃν βούλονται τόπον παράξωσιν.

8.1134

εἴτα πάλιν τὸ ὑποκείμενον τῷ κῶλῳ ξύλον ὅπλῳ ἐπισπασάμενοι ἀπὸ χειρὸς περιάγουσιν ἐπὶ ἕτερον μέρος τοῦ οἰκοδομήματος ἅμα ἀνιέντες τοὺς ἀποτόμους, καὶ πάλιν ἐκδήσαντες χρῶνται, ὥς προεῖρηται.