

eul_wid: owy-aa

Νικόμαχος ὁ Γερασηνός · Nicomachus of Gerasa

Arithmetic Introduction

Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή

Period: *Ῥωμαϊκὴ* [Roman](#)

Dialect: *Κοινή* [Koine](#)

Domain: *Μαθηματικά* [Mathematics](#)

Format: *Πραγματεία* [Treatise](#)

1.1 ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΗΝΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΕΙΣ ΔΥΟ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ. Οἱ παλαιοὶ καὶ πρῶτοι μεθοδεύσαντες ἐπιστήμην κατάρξαντος Πυθαγόρου ὠρίζοντο φιλοσοφίαν εἶναι φιλίαν σοφίας, ὥς καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα ἐμφαίνει, τῶν πρὸ Πυθαγόρου πάντων σοφῶν καλουμένων συγκεχυμένῳ ὀνόματι, ὥσπερ καὶ τέκτων καὶ σκυτοτόμος καὶ κυβερνήτης καὶ ἀπλῶς ὁ τέχνης τινὸς ἢ δημιουργίας ἔμπειρος· ἀλλ' ὅ γε Πυθαγόρας συστειλάς πάντων τὸ ὄνομα ἐπὶ τὴν τοῦ ὄντος.

1.1.1 ἐπιστήμην καὶ κατάληψιν καὶ μόνην τὴν ἐν τούτῳ γνῶσιν τῆς ἀληθείας σοφίαν ἰδίως καλέσας εἰκότως καὶ τὴν ταύτης ὄρεξιν καὶ μεταδίωξιν φιλοσοφίαν προσηγόρευσεν, οἷον σοφίας ὄρεξιν.

1.1.2 ἀξιοχρεώτερος δέ ἐστι τῶν ἄλλως ὀριζομένων, παρ' ὅσον ἰδίου ὀνόματος καὶ πράγματος ἔννοιαν δηλοῖ· καὶ ταύτην δὲ τὴν σοφίαν ὠρίζετο ἐπιστήμην τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας, ἐπιστήμην μὲν οἰόμενος εἶναι κατάληψιν τοῦ ὑποκειμένου ἄπταιστον καὶ ἀμετακίνητον, ὄντα δὲ τὰ κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡσαύτως αἰεὶ διατελοῦντα ἐν τῷ κόσμῳ καὶ οὐδέποτε τοῦ εἶναι ἐξιστάμενα οὐδὲ ἐπὶ βραχύ· ταῦτα ἂν εἴη τὰ αἶθρα καὶ ὧν κατὰ μετουσίαν ἕκαστον λοιπὸν τῶν ὁμωνύμων ὄντων καὶ καλουμένων τότε τι λέγεται καὶ ἔστι.

1.1.3 τὰ μὲν γὰρ σωματικὰ δῆπου καὶ ὑλικά ἐν διηνεκεῖ ῥύσει καὶ μεταβολῇ διὰ παντός ἐστι μιμούμενα τὴν τῆς ἐξ ἀρχῆς αἰδίου ὕλης καὶ ὑποστάσεως φύσιν καὶ ιδιότητα· ὅλη γὰρ δι' ὅλης ἦν τρεπτή καὶ ἀλλοιωτή· τὰ δὲ περὶ αὐτὴν ἢ καὶ σὺν αὐτῇ θεωρούμενα ἀσώματα, οἷον ποιότητες, ποσότητες, σχηματισμοί, μεγέθη, μικρότητες, ἰσότητες, σχέσεις, ἐνέργειαι, διαθέσεις, τόποι, χρόνοι, πάντα ἀπλῶς, οἷς περιέχεται τὰ ἐν ἐκάστῳ σώματι, ὑπάρχει καθ' ἑαυτὰ ἀκίνητα καὶ ἀμετάπτωτα, συμβεβηκότως δὲ μετέχει καὶ παραπολαύει τῶν περὶ τὸ ὑποκείμενον σῶμα παθῶν. τῶν δὲ τοιούτων ἐξαιρέτως ἐπιστήμη ἐστὶν ἡ σοφία, συμβεβηκότως δὲ καὶ τῶν μετεχόντων αὐτῶν, ὅ ἐστι σωματῶν.

1.2.1 Ἀλλ' ἐκεῖνα μὲν αἶθρα καὶ αἰδία καὶ ἀτελεύτητα καὶ διὰ παντός ὅμοια καὶ ἀπαράλλακτα πέφυκε διατελεῖν, ὡσαύτως τῇ αὐτῶν οὐσίᾳ ἐπιδιαμένοντα, καὶ ἕκαστον αὐτῶν κυρίως ὃν λέγεται, τὰ δὲ ἐν γενέσει τε καὶ φθορᾷ καὶ αὐξήσει καὶ μειώσει καὶ μεταβολῇ παντοῖα καὶ μετουσία φαίνεται διηνεκῶς τρεπόμενα καὶ λέγεται μὲν ὁμωνύμως ἐκείνοις ὄντα, καθ' ὅσον αὐτῶν μετέχει, ἔστι δὲ τῇ ἑαυτῶν φύσει οὐκ ὄντως ὄντα· οὐδὲ γὰρ τὸ βραχύτατον ἐπὶ ταύτου διαμένει, ἀλλ' αἰεὶ μεταβαίνει παντοίως ἀλλασσόμενα κατὰ τὸν παρὰ Πλάτωνι Τίμαιον, ὃς φησι· τί τὸ ὄν

αεί, γένεσιν δὲ οὐκ ἔχον, καὶ τί τὸ γινόμενον μέν, ὃν δὲ οὐδέποτε, τὸ μὲν δὴ νοήσῃ μετὰ λόγου περιληπτόν, αἰεὶ καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ὄν, τὸ δ' αὖ δόξῃ μετ' αἰσθήσεως ἀλόγου δοξαστόν, γινόμενόν τε καὶ ἀπολλύμενον, ὄντως δὲ οὐδέποτε ὄν.

- 1.2.3 εὐλογον ἄρα καὶ ἀναγκαιότατον, εἰ τοῦ προσήκοντος καὶ ἀνθρώπῳ πρέποντος τέλους ἐφίεμεθα, τουτέστιν εὐζωίας (αὕτη δὲ διὰ φιλοσοφίας μόνης, ὅφ' ἑτέρου δὲ οὐδενὸς συντελεῖται· φιλοσοφία δὲ ἡμῖν, ὡς ἔφην, σοφίας ὄρεξις, σοφία δὲ ἐπιστήμη τῆς ἐν τοῖς οὖσιν ἀληθείας, ὄντα δὲ τὰ μὲν κυρίως λεγόμενα, τὰ δὲ ὁμωνύμως), ἀκριβῶς διελεῖν καὶ διαρθρῶσαι τὰ τοῖς οὖσι συμβεβηκότα.
- 1.2.4 τῶν τοίνυν ὄντων τῶν τε κυρίως καὶ τῶν καθ' ὁμωνυμίαν, ὅπερ ἐστὶ νοητῶν τε καὶ αἰσθητῶν, τὰ μὲν ἐστὶν ἡνωμένα καὶ ἀλληλουχούμενα, οἷον ζῶον, κόσμος, δένδρον καὶ τὰ ὅμοια, ἅπερ κυρίως καὶ ἰδίως καλεῖται μεγέθη, τὰ δὲ διηρημένα τε καὶ ἐν παραθέσει καὶ οἷον κατὰ σωρείαν, ἃ καλεῖται πλήθη, οἷον ποίμνη, δήμος, σωρός, χορὸς καὶ τὰ παραπλήσια.
- 1.2.5 τῶν ἄρα δύο εἰδῶν τούτων ἐπιστήμην νομιστέον τὴν σοφίαν· ἀλλ' ἐπεὶ πᾶν πλήθος καὶ πᾶν μέγεθος ἄπειρα τῇ αὐτῶν φύσει ἐξ ἀνάγκης ἐστί (τὸ μὲν γὰρ πλήθος ἀπὸ ὠρισμένης ρίζης ἀρξάμενον οὐ παύεται προκόπτον, τὸ δὲ μέγεθος ἀπὸ ὠρισμένης ὁλότητος διαιρούμενον οὐδαμῇ δύναται παύειν τὴν τομὴν, ἀλλ' ἐπ' ἄπειρον διὰ ταῦτα προχωρεῖ), αἱ δὲ ἐπιστήμαι πάντως πεπερασμένων εἰσὶν ἐπιστήμαι, ἀπείρων δὲ οὐδέποτε, φαίνεται δὴ, ὅτι οὔτε περὶ ἀπλῶς μέγεθος οὔτε περὶ ἀπλῶς πλήθος συσταίῃ ἄν ποτε ἐπιστήμη (ἀόριστον γὰρ ἐκάτερον καθ' ἑαυτὸ ἐστὶ, πλήθος μὲν ἐπὶ τὸ πλεῖον, μέγεθος δὲ ἐπὶ τὸ ἔλαττον), ἀλλὰ περὶ τι ἀπ' ἀμφοῖν ἀφωρισμένον, ἀπὸ μὲν πλήθους περὶ τὸ ποσόν, ἀπὸ δὲ μεγέθους περὶ τὸ πηλίκον. Πάλιν δὲ ἐξ ἀρχῆς, ἐπεὶ τοῦ ποσοῦ τὸ μὲν ὁράται καθ' ἑαυτὸ, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν ἔχον, οἷον ἄρτιον, περιττόν, τέλειον, τὰ ἐοικότα, τὸ δὲ πρὸς ἄλλο πως ἤδη ἔχον καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον σχέσει ἐπινοούμενον, οἷον διπλάσιον, μεῖζον, ἔλαττον, ἥμισυ, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, τὰ ἐοικότα, δηλονότι ἄρα δύο μέθοδοι ἐπιλήψονται ἐπιστημονικαὶ καὶ διευκρινήσουσι πᾶν τὸ περὶ τοῦ ποσοῦ σκέμμα, ἀριθμητικὴ μὲν τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτὸ, μουσικὴ δὲ τὸ περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο.
- 1.3.2 πάλιν δὲ ἐπεὶ τοῦ πηλίκου τὸ μὲν ἐστὶν ἐν μονῇ καὶ στάσει, τὸ δὲ ἐν κινήσει καὶ περιφορᾷ, δύο ἕτεροι κατὰ τὰ αὐτὰ ἐπιστήμαι ἀκριβώσουσι τὸ πηλίκον, τὸ μὲν μένον καὶ ἡρεμοῦν γεωμετρία, τὸ δὲ φερόμενον καὶ περιπολοῦν σφαιρικὴ. οὐκ ἄρα τούτων ἄνευ δυνατὸν τὰ τοῦ ὄντος εἶδη ἀκριβῶσαι οὐδ' ἄρα τὴν ἐν τοῖς οὖσιν ἀλήθειαν εὐρεῖν, ἥς ἐπιστήμη σοφία, φαίνεται δέ, ὅτι οὐδ' ὀρθῶς φιλοσοφεῖν· ὅπερ γὰρ ζωγραφίῃ συμβάλλεται τέχναις βαναύσοις πρὸς θεωρίας ὀρθότητα, τοῦτο τοι γραμμαὶ καὶ ἀριθμοὶ καὶ ἀρμονικὰ διαστήματα καὶ κύκλων περιπολήσεις πρὸς λόγων σοφῶν μαθήσιας συνεργίην ἔχουσιν, Ἀνδροκύδης φησὶν ὁ Πυθαγορικός.
- 1.3.4 ἀλλὰ καὶ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος ἀρχόμενος τοῦ ἀρμονικοῦ τὸ αὐτὸ οὕτω πως λέγει· καλῶς μοι δοκοῦντι περὶ τὰ μαθήματα διαγνώμεναι καὶ οὐδὲν ἄτοπον αὐτοὺς ὀρθῶς, οἷα ἐντί, περὶ ἐκάστου φρονέειν. περὶ γὰρ τᾶς τῶν ὄλων φύσιος καλῶς διαγνόντες ἔμελλον καὶ περὶ τῶν κατὰ μέρος, οἷα ἐντί, καλῶς ὀψεῖσθαι περὶ τε δὴ τᾶς γεωμετρικᾶς καὶ ἀριθμητικᾶς καὶ σφαιρικᾶς παρέδωκαν ἅμιν σαφῇ διάγνωσιν, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ περὶ μουσικᾶς. ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἔμμεναι ἀδελφεὰ· περὶ γὰρ ἀδελφεὰ τὰ τοῦ ὄντος πρώτιστα δύο εἶδεα τὰν ἀναστροφὰν ἔχει.
- 1.3.5 καὶ Πλάτων δὲ ἐπὶ τέλει τοῦ τρισκαίδεκάτου τῶν νόμων, ὅπερ τινὲς φιλόσοφον ἐπιγράφουσιν, ὅτι ἐν αὐτῷ περισκοπεῖ καὶ διορίζεται, ποταπὸν χρὴ τὸν ὄντως φιλόσοφον εἶναι, ἀνακεφαλαιούμενος τὰ διὰ πλειόνων προδιαλεχθέντα καὶ προδιαβεβαιωθέντα ἐπιφέρει· ἅπαν διάγραμμα ἀριθμοῦ τε σύστημα καὶ ἀρμονίας σύστασιν ἅπασαν τῆς τε τῶν ἄστρον φορᾶς τὴν ἀναλογίαν μίαν ἀναφανῆναι δεῖ τῷ κατὰ τρόπον μανθάνοντι, φανήσεται δ' ἂν ὁ λέγομεν

ὀρθῶς, εἴ τις εἰς ἓν βλέπων πάντα μαθάνει· δεσμός γὰρ ἀπάντων τούτων εἷς ἀναφανήσεται· εἰ δέ τις ἄλλως μεταχειριεῖται φιλοσοφίαν, τύχην δεῖ καλεῖν συνεργόν· οὐ γὰρ ἄνευ τούτων ἡ ὁδός ποτε, ἀλλ' οὗτος ὁ τρόπος, ταῦτα τὰ μαθήματα εἴτε χαλεπὰ εἴτε ῥάδια, ταύτη ἰτέον, ἀμελεῖν δὲ οὐ δεῖ. τὸν δὲ ταῦτα πάντα οὕτω λαβόντα, ὡς ἐγὼ λέγω, τοῦτον ἐγὼ καλῶ σοφώτατον καὶ δισχυρίζομαι παίζων τε καὶ σπουδάζων.

1.3.6 δῆλον γάρ, ὅτι κλίμαξί τισι καὶ γεφύραις ἔοικε ταῦτα τὰ μαθήματα διαβιβάζοντα τὴν διάνοιαν ἡμῶν ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν καὶ δοξαστῶν ἐπὶ τὰ νοητὰ καὶ ἐπιστημονικὰ καὶ ἀπὸ τῶν συντρόφων ἡμῖν καὶ ἐκ βρεφῶν ὄντων συνήθων ὑλικῶν καὶ σωματικῶν ἐπὶ τὰ ἀσυνήθη τε καὶ ἐτερόφουλα πρὸς τὰς αἰσθήσεις, τῇ δὲ ἀυλὶ καὶ αἰδιότητι συγγενέστερα ταῖς ἡμετέραις ψυχαῖς καὶ πολὺ πρότερον τῷ ἐν αὐταῖς νοητικῷ. καθὰ καὶ ὁ παρὰ Πλάτωνι ἐν τῇ πολιτείᾳ Σωκράτης τοῦ προσδιαλεγομένου αἰτίας τινὰς εὐλόγους ἐπιφέρειν δοκοῦντος τοῖς μαθήμασιν, ὡς εὐχρηστά εἰσι πρὸς τὸν ἀνθρώπινον βίον, ἡ μὲν ἀριθμητικὴ πρὸς λογισμοὺς καὶ διανομὰς καὶ συνεισφοράς καὶ ἀμείψεις καὶ κοινωνίας, ἡ δὲ γεωμετρία πρὸς στρατοπεδεύσεις πόλεων τε καὶ ἱερῶν συγκτίσεις καὶ γεωμορίας, ἡ δὲ μουσικὴ πρὸς ἐορτὰς καὶ θυμηδίας καὶ θεῶν θρησκείας, σφαιρικὴ δὲ καὶ ἀστρονομία πρὸς γεωργίας τε καὶ ναυτιλίαν καὶ τὰς ἄλλας καταρχὰς τῶν πράξεων εὐχερείας καὶ ἐπιτηδειότητος προδηλοῦσα, ἐπιπλήττων φησίν· ὡς ἡδὺς εἶ, ὅτι ἔοικας δεδιέναι, μὴ ἄρα ἄχρηστα ταῦτα τὰ μαθήματα προστάττοιμι· τὸ δὲ ἐστὶ παγχάλεπον, μᾶλλον δὲ ἀδύνατον· ὅμμα γὰρ τῆς ψυχῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων ἀποτυφλούμενον καὶ κατορυπτόμενον διὰ τούτων μόνων ἀναζωπυρεῖται καὶ ἀνεγείρεται κρεῖττον ὃν σωθῆναι μυρίων σωματικῶν ὁμμάτων· μόνῳ γὰρ αὐτῷ ἢ περὶ τοῦ παντὸς ἀλήθεια ὁράται.

1.4.1 Τίνα οὖν ἀναγκαῖον πρωτίστην τῶν τεσσάρων τούτων μεθόδων ἐκμανθάνειν; ἢ δηλονότι τὴν φύσει πασῶν προυπάρχουσαν καὶ κυριωτέραν ἀρχῆς τε καὶ ρίζης καὶ οἰονεῖ πρὸς τὰς ἄλλας μητρὸς λόγον ἐπέχουσαν.

1.4.2 ἔστι δὲ αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ οὐ μόνον, ὅτι ἔφαμεν αὐτὴν ἐν τῇ τοῦ τεχνίτου θεοῦ διανοίᾳ προυποστῆναι τῶν ἄλλων ὥσανεὶ λόγον τινὰ κοσμικὸν καὶ παραδειγματικόν, πρὸς ὃν ἀπεριδόμενος ὁ τῶν ὄλων δημιουργὸς ὡς πρὸς προκέντημά τι καὶ ἀρχέτυπον παράδειγμα τὰ ἐκ τῆς ὕλης ἀποτελέσματα κοσμεῖ καὶ τοῦ οἰκείου τέλους τυγχάνειν ποιεῖ, ἀλλὰ καὶ ὅτι φύσει προγενεστέρα ὑπάρχει, ὅσῳ συναναιρεῖ μὲν ἑαυτὴ τὰ λοιπὰ, οὐ συναναιρεῖται δὲ ἐκείνοις· οἷον τὸ ζῶον πρότερον τοῦ ἀνθρώπου φύσει ἐστίν· ἀναιρεθέντος γὰρ τοῦ ζώου ἀναιρεῖται καὶ ὁ ἄνθρωπος, οὐκέτι δὲ ἀναιρεθέντος τοῦ ἀνθρώπου συναναιρεῖται καὶ τὸ ζῶον· καὶ πάλιν ἄνθρωπος προγενέστερος γραμματικοῦ· μὴ γὰρ ὄντος ἀνθρώπου οὐδὲ γραμματικός ἐστὶ, μὴ ὄντος δὲ γραμματικοῦ δυνατόν ἄνθρωπον εἶναι· ὥστε ἐπεὶ συναναιρεῖ, διὰ τοῦτο καὶ πρεσβύτερον.

1.4.3 καὶ ἐκ τοῦ ἐναντίου δὲ νεώτερον λέγεται καὶ ὑστερογενέστερον, ὃ συνεπιφέρει μὲν ἑαυτῷ τὸ λοιπόν, οὐ συνεπιφέρεται δὲ ἐκείνῳ, οἷον ὁ μουσικός· συνεπιφέρει γὰρ ἑαυτῷ πάντως τὸν ἄνθρωπον· καὶ πάλιν ἵππος· συνεπιφέρεται γὰρ πάντως τὸ ζῶον τούτῳ, οὐκ ἔμπαλιν δὲ· ζῶον γὰρ ὄντος οὐκ ἀναγκαῖον εἶναι ἵππον οὐδὲ ἀνθρώπου ὑπάρχοντος συνεπιφέρεισθαι μουσικόν.

1.4.4 οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν προλεχθεισῶν ἐπιστημῶν· οὕσης μὲν γὰρ γεωμετρίας ἀνάγκη καὶ τὴν ἀριθμητικὴν συνεπιφέρεισθαι· ἅμα γὰρ ταύτη τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ ὀκτάεδρον ἢ εἰκοσάεδρον ἢ διπλάσιον ἢ ὀκταπλάσιον ἢ ἡμιόλιον ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον, ὃ γεωμετρία λέγει, καὶ οὐκ ἄνευ τῶν ἐκάστῳ συνεπιφερομένων ἀριθμῶν ἐπιννοεῖσθαι τὰ τοιαῦτα δύναται· πῶς γὰρ οἷόν τε τριπλάσιόν τι εἶναι ἢ λέγεσθαι μὴ προυποκειμένου τοῦ γ ἀριθμοῦ ἢ ὀκταπλάσιον μὴ ὑποκειμένου τοῦ η; ἔμπαλιν δὲ εἴη ἂν τὰ γ καὶ τὰ δ καὶ τὰ ἐξῆς μὴ ὄντων τῶν παρωνύμων

σχημάτων. συναναιρεί ἄρα ἡ ἀριθμητικὴ τὴν γεωμετρίαν, ἀλλ' οὐ συναναιρεῖται ὑπ' αὐτῆς, καὶ συνεπιφέρεται μὲν ἐκείνῃ, οὐ συνεπιφέρει δὲ αὐτήν.

- 1.5.1 Πάλιν δὲ ἐπὶ τῆς μουσικῆς· οὐ γὰρ μόνον ὅτι προγενέστερον τὸ καθ' αὐτὸ τοῦ πρὸς ἄλλο, καθάπερ τὸ μέγα τοῦ μείζονος καὶ τὸ πλούσιον τοῦ πλουσιωτέρου καὶ ὁ ἄνθρωπος τοῦ πατρός, ἀλλ' ὅτι καὶ αἱ μουσικαὶ συμφωνίαι διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν κατὰ ἀριθμὸν εἰσιν ὠνομασμέναι· ὁμοίως καὶ τοὺς ἀρμονικοὺς λόγους ἀριθμητικοὺς πάντως ἔχουσιν, ἢ μὲν διὰ τεσσάρων ἐπίτριτος, ἢ δὲ διὰ πέντε ἡμιόλιος, ἢ δὲ διὰ πασῶν διπλάσιος, τριπλάσιος δὲ ἢ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε, τετραπλάσιος δὲ ἢ τελειοτάτῃ ἢ δις διὰ πασῶν.
- 1.5.2 ἐκδηλότερόν γε μὴν ἡ σφαιρικὴ δι' ἀριθμητικῆς τυγχάνει πάντων τῶν προσηκόντων αὐτῇ σκευμάτων οὐ μόνον, ὅτι γεωμετρίας μεταγενεστέρα ἐστίν (ἡ γὰρ κίνησις φύσει μετὰ τὴν μονήν), οὐδ' ὅτι ἀρμονίας ἐκ παντὸς ἐμμελοῦς τὰ τῶν ἀστέρων κινήματα τέτευχεν, ἀλλ' ὅτι καὶ ἀριθμῶν περιόδοις καὶ ποσότησιν ἀνατολαί τε καὶ δύσεις καὶ προποδισμοὶ καὶ ἀναποδισμοὶ καὶ ἐπιπροσθήσεις καὶ φάσεις παντοῖαι διαρθροῦνται. ὥς οὖν προγενεστέρας φύσει καὶ τιμιωτέρας καὶ πρεσβυτέρας ὥσανεἰ μητρὸς καὶ τιθήνης καλῶς προτέραν τὴν τεχνολογίαν ὑπεστησάμεθα, τὴν δὲ ἀρχὴν τῆς τεχνολογίας τοῦ σαφοῦς χάριν ἐντεῦθεν ποιησόμεθα.
- 1.6.1 Πάντα τὰ κατὰ τεχνικὴν διέξοδον ὑπὸ φύσεως ἐν τῷ κόσμῳ διατεταγμένα κατὰ μέρος τε καὶ ὅλα φαίνεται κατὰ ἀριθμὸν ὑπὸ τῆς προνοίας καὶ τοῦ τὰ ὅλα δημιουργήσαντος νοῦ διακεκρίσθαι τε καὶ κεκοσμηθῆσαι βεβαιουμένου τοῦ παραδείγματος οἷον λόγον προχαράγματος ἐκ τοῦ ἐπέχειν τὸν ἀριθμὸν προυποσάντα ἐν τῇ τοῦ κοσμοποιοῦ θεοῦ διανοίᾳ, νοητὸν αὐτὸν μόνον καὶ παντάπασιν ἄυλον, οὐσίαν μέντοι τὴν ὄντως τὴν αἰδίον, ἵνα πρὸς αὐτὸν ὡς λόγον τεχνικὸν ἀποτελεσθῇ τὰ σύμπαντα ταῦτα, χρόνος, κίνησις, οὐρανός, ἄστρα, ἐξελιγμοὶ παντοῖοι.
- 1.6.2 ἀναγκαῖον ἄρα, τὸν ἐπιστημονικὸν ἤδη ἀριθμὸν ἐπὶ τῶν τοιούτων ὑπάρχοντα καθ' ἑαυτὸν ἡρμόσθαι καὶ οὐχ ὑπ' ἄλλου, ἀλλ' ὑφ' ἑαυτοῦ.
- 1.6.3 πᾶν δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἡρμостαι καὶ ὄντων γε· οὔτε γὰρ τὰ μὴ ὄντα ἡρμοσθῆναι οἷά τε οὔτε τὰ ὄντα μέν, ὅμοια δὲ ἀλλήλοις, οὔτε τὰ διαφέροντα μέν, ἄλογα δὲ πρὸς ἄλληλα· ὑπολείπεται δὴ τά, ἐξ ὧν ἀρμόζεται, καὶ ὄντα εἶναι καὶ διάφορα καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχοντα.
- 1.6.4 ἐκ τοιούτων ἄρα καὶ ὁ ἐπιστημονικὸς ἀριθμὸς· ἔστι γὰρ τὰ ἐν αὐτῷ πρώτιστα εἶδη δύο οὐσίαν τε ἔχοντα τὴν τῆς ποσότητος καὶ διαφέροντα ἀλλήλων καὶ οὐχ ἑτερογενῆ, περιττὸν καὶ ἄρτιον, καὶ ἐναλλάξ ὑπὸ θαυμαστῆς καὶ θείας φύσεως διηρμοσμένα ἀλλήλοις ἀχωρίστως καὶ ἐνοειδῶς, ὡς αὐτίκα εἰσόμεθα. Ἀριθμὸς ἐστὶ πλῆθος ὠρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον, τοῦ δὲ ἀριθμοῦ πρώτη τομὴ τὸ μὲν ἄρτιον, τὸ δὲ περιττόν.
- 1.7.2 ἔστι δὲ ἄρτιον μέν, ὃ οἷόν τε εἰς δύο ἴσα διαιρεθῆναι μονάδος μέσον μὴ παρεμπιπτούσης, περιττόν δὲ τὸ μὴ δυνάμενον εἰς δύο ἴσα μερισθῆναι διὰ τὴν προειρημένην τῆς μονάδος μεσιτείαν. οὗτος μὲν οὖν ὁ ὅρος ἐκ τῆς δημῶδους ὑπολήψεως· κατὰ δὲ τὸ Πυθαγορικὸν ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ τὴν εἰς τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα κατὰ ταῦτο τομὴν ἐπιδεχόμενος, μέγιστα μὲν πηλικότητι, ἐλάχιστα δὲ ποσότητι, κατὰ φυσικὴν τῶν δύο τούτων γενῶν ἀντιπεπόνθησιν, περισσὸς δὲ ὁ μὴ δυνάμενος τοῦτο παθεῖν, ἀλλ' εἰς ἄνισα δύο τεμνόμενος.
- 1.7.4 ἐτέρῳ δὲ τρόπῳ κατὰ τὸ παλαιὸν ἄρτιός ἐστὶν ὁ καὶ εἰς δύο ἴσα τμηθῆναι δυνάμενος καὶ εἰς ἄνισα δύο, πλὴν τῆς ἐν αὐτῷ ἀρχοειδοῦς δυνάδος θάτερον τὸ διχοτόμημα μόνον ἐπιδεχομένης τὸ εἰς ἴσα, ἐν ᾗ τινι οὖν τομῇ παρεμφαίνων τὸ ἕτερον εἶδος μόνον τοῦ ἀριθμοῦ, ὅπως ἂν διχασθῇ, ἀμέτοχον τοῦ λοιποῦ· περισσὸς δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ καθ' ἡντιναοῦν τομὴν εἰς ἄνισα

πάντως γινομένην ἀμφοτέρα ἅμα ἐμφαίνων τὰ τοῦ ἀριθμοῦ δύο εἶδη οὐδέποτε ἄκρατα ἀλλήλων, ἀλλὰ πάντοτε σὺν ἀλλήλοις.

- 1.7.5 ἐν δὲ τῷ δι' ἀλλήλων ὄρω περιττός ἐστιν ὁ μονάδι ἐφ' ἑκάτερα διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ, τουτέστιν ἐπὶ τὸ μείζον καὶ ἔλαττον, ἄρτιος δὲ ὁ μονάδι διαφέρων ἐφ' ἑκότερον περισσοῦ ἀριθμοῦ, τουτέστι μονάδι μείζων καὶ μονάδι ἐλάσσων. Πᾶς ἀριθμὸς τῶν παρ' ἑκάτερα συντεθέντων ἅμα ἡμισύς ἐστι καὶ τῶν ὑπὲρ ἓνα ἐκατέρωθεν κειμένων ὁμοίως ἡμισύς ἐστι καὶ ἔτι τῶν ὑπὲρ ἐκείνους καὶ τοῦτο μέχρις οὗ δυνατόν.
- 1.8.2 μονωτάτη δὲ ἡ μονὰς διὰ τὸ μὴ ἔχειν ἐκατέρωθεν αὐτὴν δύο ἀριθμοὺς ἐνὸς μόνου τοῦ παρακειμένου ἡμισύς ἐστιν· ἀρχὴ ἄρα πάντων φυσικῇ ἡ μονὰς.
- 1.8.3 καθ' ὑποδιαίρεσιν δὲ τοῦ ἀρτίου τὸ μὲν ἀρτιάκις ἄρτιον, τὸ δὲ περισσάρτιον, τὸ δὲ ἀρτιοπέριπτον· ἐναντία μὲν ἀλλήλοις ὥσπερ ἀκρότητες τὸ ἀρτιάκις ἄρτιον καὶ τὸ ἀρτιοπέρισσον, κοινὸν δὲ ἀμφοτέρων ὥσπερ μεσότης τὸ περισσάρτιον. Ἀρτιάκις οὖν ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ αὐτός τε εἰς δύο ἴσα δυνάμενος διχασθῆναι κατὰ τὴν τοῦ γένους φύσιν καὶ τῶν ἑαυτοῦ μερῶν ὁποτερονοῦν τοιοῦτον ἔχων δίχα διαιρετὸν καὶ πάλιν κατὰ τὰ αὐτὰ τῶν ἐν ἐκείνῳ μερῶν ὁποτερονοῦν εἰς δύο ἴσα διαιρετὸν καὶ μέχρις ἂν εἰς τὴν φύσει ἄτομον μονάδα καταντήσῃ ἡ τῶν ἀεὶ ὑπομερισμῶν διαίρεσις.
- 1.8.5 οἷον ὑποδείγματος χάριν ὁ ξδ· τούτου γὰρ ἡμισὺς ὁ λβ καὶ τούτου ὁ ις καὶ τούτου ἡμισὺς ὁ η καὶ τούτου ὁ δ καὶ τούτου ὁ β, ἔπειτα τὸ τελευταῖον μονὰς τούτου ἡμίσεια, ἥτις φύσει ἄτομος οὔσα οὐκέτι ἐπιδέχεται τὸ ἡμισυ.
- 1.8.6 παρακολουθεῖ δὲ αὐτῷ καί, ὅ τι ἂν ἐν αὐτῷ μέρος ληφθῇ, πάντως ἀρτιάκις ἀρτιώνυμον εἶναι τὴν προσηγορίαν, τὸ δὲ αὐτὸ καὶ τῇ ποσότητι τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων ἀρτιάκις ἀρτιοδύναμον, μηδέποτε δὲ ἐτέρῳ γένει κοινωνεῖν ἑκότερον τούτων.
- 1.8.7 μήτοι δὲ ἄρα καὶ παρὰ τοῦτο ἀρτιάκις ἄρτιος ὠνόμασται, ὅτι αὐτὸς ἄρτιος ὢν καὶ τὰ μέρη καὶ τὰ τῶν μερῶν μέρη μέχρι μονάδος ἄρτια ἀεὶ ἔχει ὀνόματί τε καὶ δυνάμει· καὶ ἐτέρως πᾶν μέρος, ὃ ἐὰν ἔχη, ἀρτιάκις ἄρτιον κατὰ τὸ ὄνομά ἐστι, τὸ δὲ αὐτὸ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιόν ἐστι κατὰ τὴν δύναμιν.
- 1.8.8 γένεσις δὲ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου, ὥστε μηδένα διαφυγεῖν, ἀλλ' ἐξ ἐνὸς πάντας ὑποπίπτειν αὐτῇ, εἰ γένοιτο ἂν οὕτως· ἀπὸ μονάδος ὡς ἀπὸ ρίζης κατὰ τὸν διπλασίον λόγον προχωροῦντι μέχρις ἀπείρου, ὅσοι καὶ ἂν γένωνται, οὗτοι πάντες ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσιν, ἄλλους δὲ παρὰ τούτους ἀμήχανόν ἐστιν εὑρεῖν, οἷον πρὸς ὑπόδειγμα α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς, φιβ καὶ ἐφ' ὅσονοῦν.
- 1.8.10 ἕκαστος δὲ τῶν προκειμένων γέγονε μὲν κατὰ τὸν ἀπὸ μονάδος διπλασίονα ἀεὶ λόγον, ὑπάρχει δὲ ἀρτιάκις ἄρτιος πάντως καὶ πᾶν δὲ μέρος, ὃ ἂν εὑρεθῇ ἔχων, πάντως καὶ παρώνυμόν ἐστιν ἐνὸς τῶν ἐντὸς αὐτοῦ καὶ μονάδος σύστημα ἐν τούτῳ ὑπάρχει τοσοῦτον, ὅπόσος τῶν ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τις ἐστί, κατὰ ἀντιπερίστασιν μέντοι καὶ ἀμοιβήν, ἐὰν μὲν ὥσιν ἄρτιοι αἱ ἐκθέσεις τῶν ἀπὸ μονάδος διπλασιασμῶν· μία μὲν οὐχ οἷα τε μεσότης εὑρεθῆναι, πάντως δὲ δύο, ἀφ' ὧν ἀρχομένη ἡ ἀντιπερίστασις καὶ ἀμοιβὴ μερῶν πρὸς δυνάμεις καὶ δυνάμεων πρὸς μέρη προχωρήσει τάξει, πρῶτον μὲν ἐπὶ τοὺς παρ' ἑκάτερα δύο, εἴτα ἐπὶ τοὺς ὑπερκειμένους ἐκατέρωθεν, μέχρις ἂν ἐπὶ τοὺς ἀκροτάτους ἀφίκηται, ὥστε καὶ τὸ ὅλον ἀντιπαρωνυμεῖσθαι τῇ μονάδι καὶ τὴν μονάδα τῷ ὅλῳ· οἷον λόγου χάριν, ἐὰν τὸν ρκη θῶμεν τὸν μέγιστον, ἀρτιογενεῖς ἔσονται αὐτῷ αἱ ἐκθέσεις τῶν ὄρων, ὁκτώ γὰρ αἱ μέχρις αὐτοῦ πᾶσαι, καὶ μίαν μεσότητα οὐχ ἔξουσιν, ἀδύνατον γὰρ ἐν ἀρτίῳ, ἀλλ' ἀναγκαίως δύο, τὴν τε η καὶ τὴν ις, αἵτινες ἀνταποκρινόυνται ἀλλήλαις παρὰ μέρος· τοῦ γὰρ ὅλου τοῦ ρκη ὄγδοον μὲν ἐστὶ τὰ ις, ἔμπαλιν δὲ ἐκκαιδέκατον τὰ η· καὶ προϊόντες ἐφ' ἑκότερον τέταρτον μὲν τὰ λβ, τριακοστόδουον δὲ τὰ δ,

καὶ πάλιν ἥμισυ μὲν τὰ ξδ, ἐξηκοστοτέταρτον δὲ τὰ β, καὶ τελευταῖον κατὰ τὰς ἀκρότητας ἑκατοστοεικοστόγδοον μὲν ἢ μονάς, ὅλον δὲ κατὰ τὴν μονάδα ἔμπαλιν τὰ ρκη'.

- 1.8.11 ἐὰν δὲ ἐν περισσοῖς ὅροις ἢ ἔκθεσις γένηται, οἷον ἐν ἑπτὰ, προχειρισμένων ἡμῶν τὰ ξδ, ἢ μεσότης ἀναγκαίως μία ἔσται κατὰ τὴν τῶν περισσῶν φύσιν καὶ αὐτὴ μὲν ἑαυτῇ ἀνταποκρινεῖται διὰ τὸ σύζυγον μὴ ἔχειν, οἱ δὲ ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἀεὶ ἀλλήλοις, μέχρις ἂν εἰς τὰ ἄκρα ἢ ἀνταπόκρισις τελευτήσῃ· οἷον ἐξηκοστοτέταρτον μὲν ἢ μονάς ἔσται, ὅλον δὲ κατὰ τὴν μονάδα ξδ, καὶ ἥμισυ μὲν τὰ λβ, τριακοστόδουον δὲ τὰ β, καὶ τέταρτον μὲν τὰ ις, ἑκκαιδέκατον δὲ τὰ δ, ὄγδοον δὲ ἄνευ ἀντιδιαστολῆς αὐτὰ τὰ η.
- 1.8.12 συμβέβηκε δὲ πάσαις ταῖς ἐκθέσεσι συντεθειμέναις σωρηδὸν ἴσαις εἶναι τῷ μετ' αὐτὰς παρὰ μονάδα, ὥστε ἀναγκαίως ἢ ὅπως οὖν συγκεφαλαίωσις περισσὸς ἀριθμὸς ἔσται· αἰεὶ γὰρ ὁ παρὰ μονάδα ἴσος τῷ ἀρτίῳ περισσὸς ἐστί.
- 1.8.13 χρησιμεύσει δ' ἡμῖν αὕτη ἢ ἐπίγνωσις, ὅσον οὐδέπω, πρὸς τὴν τῶν τελείων ἀριθμῶν σύστασιν· ὑποδείγματος δὲ χάριν τῷ σνς οἱ ἐντὸς αὐτοῦ μέχρι μονάδος ἴσοι εἰσι συγκεφαλαιωθέντες παρὰ μίαν μονάδα, τῷ δὲ ρκη τῷ εὐθύς ὑπ' αὐτὸν οἱ ἐντὸς αὐτοῦ πάντες ὁμοίως εἰσὶν ἴσοι παρὰ μίαν μονάδα καὶ τοῖς συνεχέσι δὲ ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ οἱ ἐντός, καθὰ καὶ αὕτη ἢ μονὰς παρὰ μονάδα ἴση τῷ μετ' αὐτήν, ὃ ἐστί τῷ β, καὶ οἱ συναμφοτέροι παρὰ μονάδα τῷ μετ' αὐτοὺς καὶ οἱ σύντρεις παρὰ μονάδα τῷ ἐξῆς, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον προχωροῦν ἄπαιστον εὐρήσεις.
- 1.8.14 κἀκεῖνο δὲ μεμνησθαι ἀναγκαιότατον· ἐὰν μὲν γὰρ ἄρτιοι ὣσιν αἱ τοῦ προκεχειρισμένου ἀρτιάκις ἀρτίου ἐκθέσεις, πάντως τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς ἀλλήλα πολυπλασιαζομένων συντελούμενον ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων πρὸς ἀλλήλα, ἐὰν δὲ περισσαί, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου πρὸς ἑαυτό· ἅπαξ γὰρ ρκη ἐν ἀρτίαις ἐκθέσεσιν ἴσόν ἐστί τῷ ὀκτάκις ις καὶ ἔτι τῷ δις ξδ καὶ πάλιν τῷ τετράκις λβ καὶ τοῦτο δι' ὅλου· ἐν δὲ περισσαῖς ἐκθέσεσιν ἴσον τὸ ἅπαξ ξδ τῷ δις λβ καὶ τοῦτο τῷ τετράκις ις καὶ τοῦτο πάλιν τῷ ὀκτάκις η μόνον μέσου πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου. Ἀρτιοπéριττος δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ τῷ γένει καὶ αὐτὸς ἄρτιος ὢν, ἀντιδιαστελλόμενος δὲ ἰδικῶς τῷ προφρασθέντι ἀρτιάκις ἀρτίῳ, ὁ τὴν μὲν εἰς δύο ἴσα διαίρεσιν ἐπιδεχόμενος κατὰ τὸ κοινὸν γένος, τῶν μέντοι μερῶν ἑκάτερον εὐθύς εἰς δύο ἴσα ἄτμητον ἔχων, οἷον ὁ ζ, ὁ ι, ὁ ιδ, ὁ ιη, ἢ κβ, ὁ κς, οἱ ὅμοιοι· μετὰ γὰρ τὸ διχασθῆναι ἕκαστον τούτων ἀδίχαστα εὐθύς τὰ μέρη εὐρίσκεται.
- 1.9.2 συμβέβηκε δὲ αὐτῷ πᾶν, ὃ ἐὰν εὐρεθῇ μέρος ἔχων, ἐναντιώνυμον τῇ δυνάμει εἶναι καὶ πᾶσαν μέρους ποσότητα ἐναντιοδύναμον τῷ ὀνόματι, μηδέποτε δὲ μηδενὶ τρόπῳ ὁμογενῇ τὴν δύναμιν τοῦ μέρους τῷ αὐτῷ ὀνόματι ὑπάρχειν· οἷον ἐφ' ἑνὸς τοῦ ιη τὸ μὲν ἥμισυ ἀρτιακῶς ὠνομασμένον ὑπάρχει θ, περισσὸν τῇ δυνάμει, τὸ δὲ τρίτον ἔμπαλιν περισσῶς ὠνοματοποποιημένον ζ ἄρτιον τῇ δυνάμει· τὸ δὲ ζ ὃν ἐξ ἀντιστροφῆς γ καὶ τὸ θ ὃν β, καπὶ τῶν ἐτέρων ὁ αὐτὸς εὐρεθήσεται τρόπος.
- 1.9.3 μήτοι δὲ ἄρα καὶ παρὰ τοῦτο τοιαύτης προσηγορίας τέτευχεν, ὅτι ἄρτιος ὢν περισσῶν τῶν ἡμισευμάτων εὐθύς τετύχηκε.
- 1.9.4 γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος τῶν ἀπὸ μονάδος δυάδι διαφερόντων, ὃ ἐστὶ περισσῶν, εὐτάκτως ἐκτεθέντων, μέχρις οὗ βούλει, δυάδι πολυπλασιασθέντων· οἱ γὰρ ἀποτελούμενοι γένοιντο ἂν τάξει οὗτοι ζ, ι, ιδ, ιη, κβ, κς, λ, καὶ μέχρις ἂν προχωρεῖν ἐθέλῃς· διαφέρουσι δὲ ἀλλήλων τετράδι οἱ μείζονες ἀεὶ τῶν ἐγγὺς ἐλαττόνων· αἴτιον δὲ τούτου, ὅτι οἱ ἐξ ἀρχῆς γνώμονες αὐτῶν, τουτέστιν οἱ περισσοί, δυάδι ἀλλήλων ὑπερφέροντες δυάδι ἐμῆκύνθησαν, ἵνα οὗτοι γένωνται, δυὰς δὲ δυάδα πολυπλασιάσασα τετράδα ποιεῖ.

1.9.5

ἐν οὖν τῷ φυσικῷ ὕφει τοῦ ἀριθμοῦ εὐρεθήσονται οἱ ἀρτιοπερίσσοι πέμπτοι μὲν ἀπ' ἀλλήλων, τετράδι δὲ ὑπερέχοντες, τρεῖς δὲ ὑπερβαίνοντες, δυάδι δὲ μηκυνομένων τῶν περισσῶν γεννώμενοι.

- 1.9.6 ἐναντιοπαθεῖν δὲ λέγονται τοῖς ἀρτιάκις ἀρτίοις, ὅτι τούτων μὲν τὸ μέγιστον ἄκρον μόνον διαιρετόν, ἐκείνων δὲ τὸ ἐλάχιστον μόνον ἦν ἀδιαίρετον· καὶ δὴ καί, ὅτι ἐπ' ἐκείνων μὲν ἡ ἀντιπερίστασις τῶν μερῶν ἀπ' ἀκροτήτων εἰς μεσότητα ἢ μεσόσητας ἀπετέλει τὸ ὑπό—ἴσον τῷ ἀπό—ἢ τῷ ὑπό—· τούτων δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀμοιβὴν καὶ ἐξέτασιν ὑποδιπλάσιον τὸ μέσον τῶν δύο ἄκρων συντεθέντων, ἢ εἰ δύο εἴη τὰ μέσα, καὶ αὐτὰ ἴσα ἀμφοτέρω τοῖς δυσὶν ἄκροις. Περισσάρτιος δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ τὸ τρίτον εἶδος τοῦ ἀρτίου ἐμφαίνων, κοινὸς ὢν ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων ὥσανει δύο ἀκροτήτων μία τις ὢν αὐτὸς μεσότης· ὁμοῖος γὰρ κατὰ μὲν τι τῷ ἀρτιάκις ἀρτίῳ ὑπάρχει, κατὰ δὲ τι τῷ ἀρτιοπερίσσω, καὶ ὧ μὲν τοῦ ἐτέρου ἀπήλλακται, τούτῳ κοινωνεῖ τῷ λοιπῷ, ὧ δὲ κοινόν τι ἔχει πρὸς ἕτερον, τούτῳ διαφέρει τοῦ λοιποῦ.
- 1.10.2 ἔστι δέ, ὅταν ἀριθμὸς ἄρτιος εἰς δύο ἴσα διαιρεθῇ· διαιρούμενος ὁμοίως τὰ ἑαυτοῦ μέρη ἔχη, ἔστι δ' ὅτε καὶ τῶν μερῶν τὰ μέρη, μέχρι μέντοι μονάδος μὴ δυνάμενος τὴν τῶν μερῶν λύσιν ἀγαγεῖν· οἷός ἐστιν ὁ κδ, ὁ κη, ὁ μ· ἡμισυ μὲν γὰρ ἕκαστος τούτων ἴδιον ἔχει καὶ πάντως ἡμίσιος ἡμισυ· ἔστι δ' ὅτε ἐν αὐτοῖς τις εὐρίσκεται καὶ ἐπὶ πλέον τὸν διχασμὸν ἐπιδεχόμενος εἰς τὰ μέρη, οὐδεὶς μέντοι τὸ παράπαν μέχρι τῆς φύσει ἀτόμου μονάδος τὰ μέρη μεριστὰ εἰς ἡμίση ἔξει.
- 1.10.3 τῷ μὲν οὖν πλείονας μιᾶς τομῆς ἐπιδέχεσθαι ὁμοιοῦται μὲν τῷ ἀρτιάκις ἀρτίῳ, ἀφίσταται δὲ τοῦ ἀρτιοπερίσσου, τῷ δὲ μὴ ἀπολήγειν ποτὲ εἰς μονάδα αὐτοῦ τὰς τομὰς ὁμοιοῦται μὲν τῷ ἀρτιοπερίσσω, ἀφίσταται δὲ τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου.
- 1.10.4 συμβέβηκε δ' αὐτῷ μόνῳ ὕφ' ἑν τὰ ἐκατέρω ἐκείνων ἰδίως συμβεβηκότα καὶ πάλιν ἂ μηδετέρῳ· καὶ γὰρ ἐκείνων ὁ μὲν τὸ μέγιστον μόνον μέρος εἶχε τμητόν, ὁ δὲ τὸ μικρότατον μόνον ἄτμητον, οὗτος δὲ οὐδέτερον· πλείονα μὲν γὰρ τοῦ ἐνὸς τμήματα ἐν τῷ μείζονι μέρει ἔχων ὁράται, πλείονα δὲ τοῦ ἐνὸς ἄτμητα ἐν τῷ ἐλάττω. καὶ πάλιν ἐστὶν ἐν αὐτῷ τινα μὲν μέρη μὴ ἐναντιωνυμοῦντα ταῖς δυνάμεσι μὴδ' ἑτερογενοῦντα πρὸς αὐτὰς κατ' εἰκόνα τοῦ ἀρτιάκις ἀρτίου, ἔνεστι δὲ πάντως καὶ ἕτερα ἐναντιωνυμούμενα ἑτερογενῶς ὑπὸ τῶν δυνάμεων κατ' εἰκόνα τοῦ ἀρτιοπερίσσου· οἷον ἐν τῷ κδ οὐκ ἐναντιωνυμεῖ μὲν μέρη δυνάμεσι, τέταρτον ς, ἡμισυ ιβ, ἔκτον δ, δωδέκατον β, ἐναντιοπαθεῖ δὲ τρίτον η, ὀγδοον γ, εἰκοστοτέταρτον α· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν παραπλησίως.
- 1.10.6 γεννᾶται δὲ οὗτος ἐφόδῳ τινὶ ποικιλωτέρᾳ σημαίνων τρόπον τινὰ καὶ ἐν τῇ γενέσει αὐτοῦ, ὅτι μῖγμα ἀμφοτέρων ἐστίν· ἐπειδὴ γὰρ ὁ μὲν ἀρτιάκις ἄρτιος ἐξ ἀρτίων ὑφίσταται τῶν ἀπὸ μονάδος διπλασίων ἐς αἰί, ὁ δὲ ἀρτιοπερίσσος ἀπὸ περισσῶν τῶν ἀπὸ τριάδος προϊόντων ἐς αἰί, ἀναγκαῖον τοῦτον ἐξ ἀμφοτέρων τῶν γενῶν συνυφαίνεσθαι, ὥς κοινὸν ἀμφοτέρων.
- 1.10.7 ἐκθώμεθα δὴ τοὺς ἀπὸ τριάδος περιττοὺς ἰδίᾳ εὐτάκτως ἐν ἐνὶ στίχῳ γ, ε, ζ, θ, ια, ιγ, ιε, ιζ, ιθ καὶ ἐφεξῆς, τοὺς δὲ ἀπὸ τετράδος ἀρτιάκις ἀρτίους πάλιν ἐφεξῆς ἐν ἐτέρῳ στίχῳ κατὰ τὴν τάξιν τὴν αὐτῶν δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς καὶ ἐφεξῆς, μέχρις οὗ βούλει.
- 1.10.8 ἀπὸ ὁποτέρου δὴ στίχου (ἀδιάφορον γάρ) τῷ πρώτῳ κειμένῳ ἀριθμῷ πολυπλασίαζε ἐξ ἀρχῆς πάντας ἐξῆς τοὺς ἐν τῷ λοιπῷ στίχῳ καὶ τοὺς ἀποτελουμένους σημειοῦ, εἴτα πάλιν τοῦ αὐτοῦ στίχου τῷ δευτέρῳ ἀριθμῷ πολυπλασίαζε τοὺς αὐτοὺς ἄνωθεν, μέχρις οὗ ἔχεις, καὶ τοὺς γινομένους ἀπογράφου· εἴτα τῷ τρίτῳ πάλιν ἀριθμῷ τοὺς αὐτοὺς ἄνωθεν, καὶ μέχρις ἂν προχωρῇς, οὐδένες ἄλλοι σοι ἀπογεννήσονται πλὴν οἱ περισσάρτιοι.
- 1.10.9 χάριν δὲ ὑποδείγματος χρῆσώμεθα τῷ πρώτῳ ἀριθμῷ τοῦ στίχου τῶν περισσῶν καὶ πολυπλασιάσωμεν αὐτῷ τοὺς ἐν τῷ ἐτέρῳ στίχῳ τάξει πάντας, τρεῖς δ, τρεῖς η, τρεῖς ις, τρεῖς λβ,

καὶ τοῦτο μέχρις ἀπείρου· ἔσονται γὰρ ιβ, κδ, μη, ρς, οὐς δεῖ σημειώσασθαι ἐν ἐνὶ στίχῳ· εἴτα ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς πάλιν τῷ δευτέρῳ ἀριθμῷ τὸ αὐτὸ ποίει, πεντάκις δ, πεντάκις η, πεντάκις ις, πεντάκις λβ· ἀποτελεσθήσονται γὰρ οἶδε κ, μ, π, ρξ· εἴτα πάλιν τῷ τρίτῳ ἀριθμῷ τῷ ζ τὸ αὐτὸ ποίει, ἐπτάκις δ, ἐπτάκις η, ἐπτάκις ις, ἐπτάκις λβ· οἱ γὰρ γινόμενοί εἰσιν κη, νς, ριβ, σκδ, καὶ κατὰ τὰ αὐτά, μέχρις οὗ βούλει, προχωρεῖν συμφωνήσει σοι· ὅταν δὴ τοὺς ἐξ ἐκάστου πολυπλασιασμοὺς ἐν ἰδίῳ στίχῳ τάξης παραλλήλους ποιούμενος τοὺς στίχους, φανήσεται σοι θαυμαστῶς κατὰ μὲν τὸ πλάτος συμβαῖνον τὸ τῶν ἀρτιοπερίσσω ἰδίωμα, ὅτι αἱ τῶν ἄκρων ὁ μέσος ὑποδιπλάσιος, εἰ εἷς εἴη, εἰ δὲ δύο μέσοι, ἴσοι κατὰ σύνθεσιν· κατὰ δὲ τὸ μήκος τὸ τῶν ἀρτιάκις ἀρτίων· τὸ γὰρ ὑπό—ἴσον τῷ ἀπό—, εἰ μία εἴη μεσότης, ἢ τῷ ὑπό, εἰ δύο εἴησαν· ὥστε τὰ ἀμφοτέρων ἰδιώματα τούτῳ μόνῳ συμβέβηκεν, ὥς ὄντι φυσικῷ μίγματι αὐτῶν.

1.11.1 Τοῦ δὲ περισσοῦ καὶ πάλιν καθ' ὑποδιαίρεσιν διακεκριμένου πρὸς τὸν ἄρτιον καὶ κατὰ μηδὲν κοινωνοῦντος, εἴπερ ἐκεῖνος μὲν διχῇ εἰς ἴσα διαιρετός, οὗτος δὲ εἰς δύο ἴσα ἀδιαίρετος, τρία ὁμοίως εἶδη εὐρίσκεται ἀλλήλων διαφέροντα, ὧν τὸ μὲν καλεῖται πρῶτον καὶ ἀσύνθετον, τὸ δὲ ἀντικείμενον τούτῳ δεύτερον καὶ σύνθετον, τὸ δὲ ἐν μεταχμῷ ἀμφοῖν τούτοις θεωρούμενον ὡς μεσότης ἐν ἀκρότησιν, ὃ καθ' ἑαυτὸ μὲν δεύτερον καὶ σύνθετον, πρὸς ἄλλο δὲ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον. Τὸ μὲν οὖν πρῶτιστον εἶδος τὸ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον γίνεται, ὅταν ἀριθμὸς περισσὸς μόνιον μηδὲν ἕτερον ἐπιδέχεται, εἰ μὴ τὸ παρώννυμον ἑαυτῷ, ὃ καὶ ἐξ ἀνάγκης μονὰς ἔσται, οἷον ὁ γ, ὁ ε, ὁ ζ, ὁ ια, ὁ ιγ, ὁ ιζ, ὁ ιθ, ὁ κγ, ὁ κθ, ὁ λα· τούτων δὲ ἕκαστος οὐδεμιᾷ μηχανῇ εὐρεθήσεται ἔχων ἐτερόννυμον μόνιον, ἀλλὰ μόνον τὸ ἑαυτῷ παρώννυμον καὶ τοῦτο μονάδα πάντως ἐν ἐκάστῳ· ὁ μὲν γὰρ γ μόνον τρίτον [τὸ ἑαυτοῦ παρώννυμον καὶ τοῦτο πάντως μονάδα], ὁ δὲ ε μόνον πέμπτον καὶ ὁ ζ μόνον ἑβδομον καὶ ὁ ια μόνον ἐνδέκατον, καὶ ἐν πᾶσι ταῦτα τὰ μέρη μονὰς ὑπάρχει.

1.11.3 τέτευχε δὲ τοῦ ὀνόματος τούτου, ὅτι τῷ κοινῷ πάντων ἀριθμῷ καὶ πρωτίστῳ μονάδι μόνῃ δύναται μετρεῖσθαι, ἐτέρῳ δὲ οὐδενί, ἀλλὰ καὶ ὑπ' οὐδενὸς ἐτέρου ἀριθμοῦ ἑαυτῷ συντεθέντος γεγένηται, ἀλλὰ μόνῃς μονάδος, πεντάκις μὲν συντεθείσης ὁ ε, ἐπτάκις δὲ ὁ ζ, καὶ οἱ λοιποὶ κατὰ τὴν ἑαυτῶν ποσότητα· αὐτῶν μέντοι συντεθέντων ἑαυτοῖς δύναται· ἂν ἄλλοι γενέσθαι ἀπὸ πηγῆς ὥσανεὶ καὶ ρίζης αὐτῶν τούτων ἀρχόμενοι, διόπερ πρῶτοι καλοῦνται ὥσανεὶ ἀρχαὶ ἐκείνων προυποκείμενοι· ἀρχὴ δὲ πᾶσα στοιχειώδης καὶ ἀσύνθετος, εἰς ἣν πάντα ἀναλύεται καὶ ἐξ ἧς πάντα συνίσταται, αὐτὴ δὲ εἰς οὐδὲν καὶ ἐξ οὐδενός. Δεύτερος δὲ καὶ σύνθετός ἐστιν ἀριθμὸς περισσὸς μὲν διὰ τὸ ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ γένους διακεκρίσθαι, ἀρχοειδὲς δὲ οὐδὲν ἔχων ἐν ἑαυτῷ· συντεθέντος γὰρ ἐτέρου τινὸς τὴν γένεσιν αὐτὸς ἔσχε· διόπερ συμβαίνει αὐτῷ πρὸς τῷ παρωνύμῳ μέρει ἔτι καὶ ἐτερόννυμον ἢ ἐτερόννυμα κεκτῆσθαι, τὸ μὲν παρώννυμον καθὰ καὶ ἐπὶ πάντων μονάδα εἶναι πάντως, τὸ δὲ ἐτερόννυμον ἢ ἐτερόννυμα οὐδέποτε μονάδα, ἀλλὰ πάντως ἢ ἐκεῖνον ἢ ἐκεῖνους, ὧν συντεθέντων ἀπετελέσθη, οἷον θ, ιε, κα, κε, κζ, λγ, λε, λθ· τούτων γὰρ ἕκαστος καὶ ὑπὸ μονάδος μετρεῖται ὥς οἱ ἕτεροι καὶ παρώννυμον ἔχει μέρος ὡς κάκεῖνοι διὰ τὴν τοῦ κοινοῦ γένους φύσιν, ἐξηλλαγμένως δὲ καὶ ἰδιαίτερον ἔτι καὶ ἐτερωνύμῳ μέρει ἢ μέρεσι χρῆται, ὁ μὲν θ πρὸς τῷ ἐνάτῳ ἔτι καὶ τρίτῳ, ὁ δὲ ιε ἔτι καὶ τρίτῳ καὶ πέμπτῳ πρὸς τῷ ιε ω, ὁ δὲ κα καὶ ἑβδόμῳ καὶ τρίτῳ πρὸς τῷ εἰκοστοπρώτῳ, ὁ δὲ κε πρὸς τῷ εἰκοστοπέμπτῳ τῷ παρωνύμῳ ἔτι καὶ ἐτερωνύμῳ χρῆται τῷ πέμπτῳ.

1.12.2 δεύτερος οὖν λέγεται, ὅτι καὶ ἄλλῳ σὺν τῇ μονάδι μέτρῳ δύναται χρῆσθαι, καὶ ὅτι οὐκ ἀρχοειδής, ἀλλ' ἐτέρου προστεθέντος πρὸς ἑαυτὸν ἢ πρὸς ἕτερον συντεθέντος αὐτὸς ἐγένετο, ὁ μὲν θ τοῦ γ, ὁ δὲ ιε τοῦ ε ἢ νη Δία τοῦ γ, καὶ οἱ ἐφεξῆς κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον· σύνθετος δὲ ἐκ τοιαύτης αἰτίας, ὅτι διαλυθεῖν ἂν εἰς ἐκεῖνους, ἐξ ὧν συνέστηκεν, εἴπερ καὶ μετρηθεῖν ἂν ὑπ' αὐτῶν· οὐδὲν δὲ διαλυτὸν ἀσύνθετον, ἀλλὰ πάντως σύνθετον. Ἀντικειμένων δὲ ἀλλήλοις τῶν δύο τούτων εἰδῶν τοῦ περισσοῦ τρίτον ἀνὰ μέσον τι θεωρεῖται οἶονεὶ ἐξ ἀμφοτέρων

εἰδοποιούμενον τὸ καθ' αὐτὸ μὲν δεύτερον καὶ σύνθετον, πρὸς ἄλλο δὲ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον, ὅταν ἀριθμὸς πρὸς τῷ κοινῷ μέτρῳ τῇ μονάδι ἔτι καὶ ἐτέρῳ μετρεῖται τινὶ μέτρῳ καὶ διὰ τοῦτο δυνάμενος καὶ ἐτερώνυμον μέρος ἢ μέρη ἐπιδέξασθαι πρὸς τῷ παρωνύμῳ, πρὸς ἄλλον τινὰ ὁμοίως ἔχοντα ἀντεξεταζόμενος εὐρίσκεται μήτε κοινῷ μέτρῳ μετρηθῆναι δυνάμενος πρὸς ἐκεῖνον, μήτε τὸ αὐτὸ ὁμώνυμον μέρος ἔχων τῶν ἀπλῶς ἐν ἐκείνῳ· οἷον ὁ θ πρὸς τὸν κε· ἑκάτερος γὰρ καθ' ἑαυτὸν δευτέρος ἐστὶ καὶ σύνθετος, πρὸς δὲ ἀλλήλους μονάδι μόνῃ κοινῷ μέτρῳ χρῶνται καὶ οὐδὲν μόνιον ὁμώνυμει ἐν ἀμφοτέροις, ἀλλὰ τὸ ἐν τούτῳ τρίτον οὐκ ἔστιν ἐν ἐκείνῳ οὐδὲ τὸ ἐν ἐκείνῳ πέμπτον ἐν τούτῳ εὐρίσκεται.

- 1.13.2 Ἡ δὲ τούτων γένεσις ὑπὸ Ἑρατοσθένους καλεῖται κόσκινον, ἐπειδὴ ἀναπεφυρμένους τοὺς περισσοὺς λαβόντες καὶ ἀδιακρίτους ἐξ αὐτῶν τῇ τῆς γενέσεως μεθόδῳ ταύτῃ διαχωρίζομεν, ὡς δι' ὄργανον ἢ κοσκίνου τινὸς καὶ ἰδίᾳ μὲν τοὺς πρώτους καὶ ἀσυνθέτους, ἰδίᾳ δὲ τοὺς δευτέρους καὶ συνθέτους, χωρὶς δὲ τοὺς μικτοὺς εὐρίσκομεν.
- 1.13.3 ἔστι δὲ ὁ τρόπος τοῦ κοσκίνου τοιοῦτος· ἐκθέμενος τοὺς ἀπὸ τριάδος πάντας ἐφεξῆς περισσοὺς ὡς δυνατὸν μάλιστα ἐπὶ μήκιστον στίχον, ἀρξάμενος ἀπὸ τοῦ πρώτου ἐπισκοπῶ, τίνας οἷός τέ ἐστὶ μετρεῖν, καὶ εὐρίσκω δυνατὸν ὄντα τοὺς δύο μέσους παραλείποντας μετρεῖν, μέχρις οὗ ἂν προχωρεῖν ἐθέλωμεν, οὐχ ὡς ἔτυχε δὲ καὶ εἰκῇ μετροῦντα, ἀλλὰ τὸν μὲν πρώτως κείμενον, τουτέστι τὸν δύο μέσους ὑπερβαίνοντα κατὰ τὴν τοῦ πρωτίστου ἐν τῷ στίχῳ κειμένου ποσότητα μετρήσει, τουτέστι κατὰ τὴν ἑαυτοῦ· τρὶς γάρ· τὸν δ' ἀπ' ἐκείνου δύο διαλείποντα κατὰ τὴν τοῦ δευτέρου τεταγμένου· πεντάκις γάρ· τὸν δὲ περαιτέρω πάλιν δύο διαλείποντα κατὰ τὴν τοῦ τρίτου τεταγμένου· ἐπτάκις γάρ· τὸν δὲ ἔτι περαιτέρω ὑπὲρ δύο κείμενον κατὰ τὴν τοῦ τετάρτου τεταγμένου· ἐνάκις γάρ· καὶ ἐπ' ἅπειρον τῷ αὐτῷ τρόπῳ εἶτα μετὰ τοῦτον ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς ἐπὶ τὸν δεύτερον ἐλθὼν σκοπῶ, τίνας οἷός τέ ἐστὶ μετρεῖν, καὶ εὐρίσκω πάντας τοὺς τετράδα διαλείποντας, ἀλλὰ τὸν μὲν πρῶτον κατὰ τὴν τοῦ ἐν τῷ στίχῳ πρώτου τεταγμένου ποσότητα· τρὶς γάρ· τὸν δὲ δεύτερον κατὰ τὴν τοῦ δευτέρου· πεντάκις γάρ· τὸν δὲ τρίτον κατὰ τὴν τοῦ τρίτου· ἐπτάκις γάρ· καὶ τοῦτο ἐφεξῆς αἰεί.
- 1.13.5 πάλιν δὲ ἄνωθεν ὁ τρίτος ὁ ζ ὁ τὸ μέτρον παραλαβὼν μετρήσει τοὺς ἐξ διαλείποντας, ἀλλὰ τὸν μὲν πρωτίστον κατὰ τὴν τοῦ γ ποσότητα πρώτου κειμένου, τὸν δὲ δεύτερον κατὰ τὴν τοῦ ε' δευτεροταγῆς γὰρ οὗτος· τὸν δὲ τρίτον κατὰ τὴν τοῦ ζ· τρίτην γὰρ ἔχει καὶ οὗτος τάξιν ἐν τῷ στίχῳ.
- 1.13.6 καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν διόλου ἀπαρεμπόδιστον προχωρήσει σοι τοῦτο, ὥστε τὸ μὲν μετρεῖν διαδέχονται κατὰ τὴν ἐν τῷ στίχῳ αὐτῶν ἐγκειμένην τάξιν, τὸ δὲ πόσους διαλείποντας κατὰ τὴν ἀπὸ δυάδος ἐπ' ἅπειρον εὐτακτον τῶν ἀρτίων προκοπὴν ἢ κατὰ τὴν τῆς χώρας διπλασίασιν, καθ' ἣν ὁ μετρῶν τέτακται, τὸ δὲ ποσάκις κατὰ τὴν τῶν ἀπὸ τριάδος περισσῶν εὐτακτον προχώρησιν.
- 1.13.7 ἐὰν οὖν σημείοις τισὶν ἐπιστίξης τοὺς ἀριθμούς, εὐρήσεις τοὺς μεταλαμβάνοντας τὸ μετρεῖν οὔτε ἅμα πάντας τὸν αὐτὸν ποτε μετροῦντας, ἔστι δὲ ὅτε οὐδὲ δύο τὸν αὐτὸν, οὔτε πάντας ἀπλῶς τοὺς ἐκκειμένους ὑποπίπτοντας μέτρῳ τινὶ αὐτῶν, ἀλλὰ τινὰς μὲν παντελῶς διαφεύγοντας τὸ μετρηθῆναι ὑφ' οὐτινοσοῦν, τινὰς δὲ ὑπὸ ἐνὸς μόνου μετρουμένους, τινὰς δὲ ὑπὸ δύο ἢ καὶ πλειόνων.
- 1.13.8 οἱ μὲν οὖν μηδαμῶς μετρηθέντες, ἀλλὰ διαφυγόντες τοῦτο πρῶτοί εἰσι καὶ ἀσύνθετοι, ὡς ὑπὸ κοσκίνου διακριθέντες, οἱ δὲ ὑπὸ ἐνὸς μόνου μετρηθέντες κατὰ τὴν ἑαυτῶν ποσότητα, ἐν μόνον μόνιον ἐτερώνυμον ἔξουσι πρὸς τῷ παρωνύμῳ, οἱ δὲ ὑπὸ ἐνὸς μὲν, ἐτέρου δὲ ποσότητι καὶ μὴ τῇ ἑαυτοῦ ἢ ὑπὸ δύο ὁμοῦ μετρηθέντες πλείονα ἔξουσι τὰ ἐτερώνυμα μέρη πρὸς τῷ παρωνύμῳ· οὗτοι οὖν ἔσσονται δευτέροι καὶ σύνθετοι.

- 1.13.9 τὸ δὲ τρίτον μέρος τὸ κοινὸν ἀμφοτέρων, ὃ καθ' ἑαυτὸ μὲν δεύτερον καὶ σύνθετον, πρὸς ἄλλο δὲ πρῶτον καὶ ἀσύνθετον, ἔσονται οἱ ἀποτελούμενοι ἀριθμοὶ κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα πρῶτου καὶ ἀσυνθέτου μετρήσαντός τινος, εἴ τις γενόμενος συγκρίνοιτο πρὸς ἄλλον ὡσαύτως τὴν γένεσιν ἔχοντα· ὥσπερ ὁ θ (ἐγίνετο ἐκ τοῦ γ κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα μετρήσαντος, τρίς γάρ), εἰ συγκρίνοιτο πρὸς τὸν κε (ἐγίνετο ἐκ τοῦ ε κατὰ τὴν ἑαυτοῦ ποσότητα μετρήσαντος, πεντάκις γάρ), κοινὸν μέτρον τούτοις οὐδέν, εἰ μὴ μονάς.
- 1.13.10 ὥς δ' ἂν καὶ μέθοδον ἔχοιμεν διαγνωστικὴν τῶν πρὸς ἀλλήλους ἦτοι πρῶτων καὶ ἀσυνθέτων ἢ δευτέρων καὶ συνθέτων, ὅτι ἐκείνων μὲν κοινὸν μέτρον μονάς ἐστὶ, τούτων δὲ πρὸς τῇ μονάδι καὶ ἕτερός τις ἀριθμός, καὶ ποῖος οὗτος ὑπάρχει.
- 1.13.11 εἰ ὀρίσθῃσαν ἡμῖν δύο περισσοὶ ἀριθμοί, προτείναντός τινος καὶ ἐπιτάξαντος διαγῶναι, πότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀσύνθετοί εἰσιν ἢ δεύτεροι καὶ σύνθετοι, καὶ εἰ δεύτεροι καὶ σύνθετοι, ποῖος ἀριθμὸς αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἐστί, χρὴ ἀντισυγκρίνειν τοὺς προτεθέντας ἀριθμοὺς καὶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος αἰεὶ ἀφαιρεῖν, ὡσάκις δυνατόν, εἴτα τούτου ἀφαιρεθέντος ἀνταφαιρεῖν ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, ὡσάκις πάλιν δυνατόν· ἢ γὰρ ἀντιπερίστασις αὕτη καὶ ἀνταφαίσεις ἀναγκαίως ἦτοι ἐπὶ μονάδα καταλήξει ἢ ἐπὶ τινα ἓνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἀναγκαίως δὲ περισσόν. ὅταν μὲν οὖν ἐπὶ μονάδα αἰεὶ ἀφαιρέσεις περαιωθῶσι, πρῶτους καὶ ἀσυνθέτους αὐτοὺς ἀποφαίνουσι πρὸς ἀλλήλους, ὅταν δὲ ἐπὶ ἕτερόν τινα ἀριθμὸν περισσὸν τῇ ποσότητι διαφορούμενον, δευτέρους λέγε εἶναι πρὸς ἀλλήλους καὶ συνθέτους καὶ κοινὸν αὐτοῖς εἶναι μέτρον αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν διαφορούμενον ἀριθμόν· οἷον ἐὰν ὁ κγ προεβλήθῃ ἡμῖν καὶ ὁ με, ἄφελε τὸν κγ ἀπὸ τοῦ με, λειφθήσεται κβ· τοῦτον ἀνταφαιρῶν ἀπὸ τοῦ κγ, λοιπὴ μονάς· ταύτην ἀφαιρῶν ἀπὸ τοῦ κβ, ὡσάκις δυνατόν, εἰς μονάδα καταλήξεις· διὰ τοῦτο πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ καὶ κοινὸν αὐτῶν μέτρον ἢ ἀπολειφθεῖσα μονάς.
- 1.13.13 εἰ δὲ ἑτέρους ἀριθμοὺς προθῇ τις, τὸν κα καὶ τὸν μθ, ἀφαιρῶ τὸν ἐλάττονα ἀπὸ τοῦ μείζονος· λείπεται κη· εἴτα πάλιν ἐκ τούτου ἀφαιρῶ τὸν αὐτὸν κα (δυνατὸν γάρ), λείπεται ζ· ταῦτα ἀνταφαιρῶ ἀπὸ τοῦ κα, καταλείπεται ιδ'· ἐξ ὧν πάλιν τὰ ζ ἀφαιρῶ (δυνατὸν γάρ), λειφθήσεται ζ, ἑβδομάδα δὲ ἀπὸ ἑβδομάδος οὐ δυνατόν ἀφαιρεθῆναι· ἢ ἄρα κατάληξις αὐτῶν εἰς διαφορούμενον τὸν ζ ἐπεραιώθη, δευτέρους δὲ καὶ συνθέτους πρὸς ἀλλήλους ἀποφαίνου τοὺς ἐξ ἀρχῆς τὸν κα καὶ τὸν μθ καὶ κοινὸν αὐτῶν μέτρον πρὸς τῇ καθολικῇ μονάδι τὸν ζ. Πάλιν δὲ ἄνωθεν· τῶν ἀπλῶς ἀρτίων ἀριθμῶν οἱ μὲν εἰσιν ὑπερτελεῖς, οἱ δὲ ἑλλειπεῖς, καθάπερ ἀκρότητες ἀντικείμεναι ἀλλήλαις, οἱ δὲ ἀνά μέσον ἀμφοτέρων, οἱ καὶ λέγονται τέλειοι.
- 1.14.2 καὶ εἰσὶν οἱ μὲν ἀντικεῖσθαι λεγόμενοι ἀλλήλοις ὑπερτελεῖς τε καὶ ἑλλειπεῖς ἐν τῇ τῆς ἀνισότητος σχέσει διαιρούμενοι εἷς τε τὸ πλεόν καὶ εἷς τὸ ἕλαττον· ἕτερος γὰρ παρὰ ταῦτα τρόπος ἀνισότητος οὐκ ἂν ἐπινοηθῇ, καθάπερ οὔτε κακία οὔτε νόσος οὔτε ἀσυμμετρία οὔτε ἀπρέπεια οὔτε τῶν τοιούτων ἕκαστον· ἐν μὲν γὰρ τῷ πλείονι αἴ τε ὑπερβολαὶ καὶ πλεονεξίαι καὶ ὑπερεκπτώσεις καὶ περισσότητες γίνονται, ἐν δὲ τῷ ἐλάττονι αἰ ἔνδεια καὶ ἑλλείψεις καὶ στερήσεις καὶ ὀλιγοεξίαι, ἐν δὲ τῷ μεταξύ τοῦ πλεόν καὶ τοῦ ἕλαττον κειμένῳ, ὃ ἐστὶν ἴσω, ἀρεταὶ τε καὶ ὑγείαι καὶ μετριότητες καὶ εὐπρέπεια καὶ κάλλη καὶ τὰ ὅμοια· ὧν γενικώτατον τὸ λεχθὲν τοῦ ἀριθμοῦ εἶδος τὸ τέλειον. Ὑπερτελής μὲν οὖν ἀριθμὸς ὁ ὑπὲρ τὰ προσήκοντα αὐτῷ καὶ ἐπιβάλλοντα μέρη ἔχων ἕτερα πλείονα· ὡς ἂν εἴ τι ζῶον πλείοσι μέρεσιν ἢ μέλεσι τελεσιουργούμενον εἴη, δέκα μὲν γλώσσας ἔχον κατὰ τὸν ποιητὴν, δέκα δὲ στόματα, ἢ ἐννεάχειλον ἢ τριστοίχοις κεχρημένον ὁδοῦσιν ἢ ἐκατόγχειρον ἢ πλείονας δακτύλους ἐν ἑτέρῃ τῶν χειρῶν ἔχον, οὕτω καὶ εἴ τις ἀριθμὸς πάντων τῶν ἐν αὐτῷ μερῶν ἐξετασθέντων καὶ εἰς ἓν ἄθροισμα συγκεφαλαιωθέντων ἀντεξεταζόμενος εὕρισκοιτο πλείονα τὰ ἴδια μέρη ἑαυτοῦ ἔχων, ὑπερτελής οὗτος καλεῖται· ὑπερβαίνει γὰρ τὴν τοῦ τελείου πρὸς τὰ ἑαυτοῦ μέρη συμμετρίαν· οἷός ἐστιν ὁ ιβ, ὁ κδ καὶ ἄλλοι τινές· ἔχει μὲν γὰρ ὁ ιβ ἡμισὺ ζ, τρίτον δ, τέταρτον γ,

ἕκτον β, δωδέκατον α, ἅπερ ὁμοῦ συγκεφαλαιωθέντα ποιεῖ ις, ὃς πλείων ἐστὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς ιβ· τὰ ἄρα μέρη αὐτοῦ πλείονα τοῦ ὅλου ὑπάρχει.

1.14.4 ὁ δὲ κδ ἔχει καὶ αὐτὸς ἡμισυ, τρίτον, τέταρτον, ἕκτον, ὄγδοον, δωδέκατον, εἰκοστοτέταρτον, ἅπερ ὑπάρχει ιβ, η, ζ, δ, γ, β, α· συγκεφαλαιωθέντα δὲ συνάγει τὸν λς, ὃς συγκρινόμενος τῷ ἐξ ἀρχῆς τῷ κδ μείζων αὐτοῦ εὐρίσκεται, καίτοι ἐκ τῶν ἐκείνου μερῶν μόνων συντεθείς πλείονα ἄρα κἀνταῦθα τὰ μέρη τοῦ ὅλου. Ἑλλιπὴς δὲ ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ τὸ ἐναντίον τοῖς δειχθεῖσι πεπονθὼς καὶ τὰ ἑαυτοῦ μέρη συντεθέντα ὕφ' ἐν κατὰ σύγκρισιν ἑαυτοῦ ἐλάττονα κεκτημένος, ὥς εἴ τι ζῶον τῶν κατὰ φύσιν μελῶν ἢ μερῶν ἐλαττοῦται, ἢ εἴ τις μονόφθαλμος εἴη, ὥς τὸ κυκλοτερὴς δ' ὀφθαλμὸς ἕξις ἐνέκειτο μετώπῳ, ἢ εἴ τις μονόχειρ εἴη ἢ ἐν ἑτέρῳ τῶν χειρῶν ἐλάττονας τῶν ε δακτύλους κεκτημένος εἴη ἢ ἄγλωσσος ἢ τοιοῦτου τινὸς ἐστερημένος, ἐλλιπὴς ἂν ὁ τοιοῦτος λέγοιτο καὶ οἰονεῖ πηρὸς κατὰ τὴν τοῦ ἀριθμοῦ ιδιότητα τοῦ ἔχοντος τὰ ἴδια μέρη ἐλάττονα ἑαυτοῦ· οἷός ἐστιν ὁ η, ὁ ιδ· ὁ μὲν γὰρ η μέρος ἔχει ἡμισυ, τέταρτον, ὄγδοον, ἅπερ ἐστὶ δ, β, α, συγκεφαλαιωθέντα δὲ εἰς τὸ αὐτὸ ζ γίνονται καὶ ἐλάττονα τοῦ ἐξ ἀρχῆς· τὰ ἄρα μέρη ἐλλείπει πρὸς τὴν τοῦ ὅλου συμπλήρωσιν.

1.15.2 πάλιν ὁ ιδ ἔχει ἡμισυ, ἔβδομον, τεσσαρεσκαίδέκατον, ἅπερ εἰσὶν ζ, β, α, σύμπαντα δὲ ὁμοῦ ι, ἐλάττονα τοῦ ἐξ ἀρχῆς ἐλλείπει ἄρα καὶ οὗτος ἐν τοῖς μέρεσι πρὸς τὸ συμπληρωθῆναι τὸ ὅλον ἐξ αὐτῶν. Ἀντικειμένων δὲ τῶν δύο τούτων εἰδῶν ὥσανεὶ ἐν ἀκροτήτων τρόπῳ μεσότης φαίνεται ὁ λεγόμενος τέλειος ἐν ἰσότητι εὐρισκόμενος καὶ οὔτε τὰ μέρη ἑαυτοῦ πλείονα ἀποτελῶν συντεθέντα οὔτε ἑαυτὸν μείζονα τῶν μερῶν ἀποφαίνων, ἀλλ' αἰεὶ ἴσος τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ὑπάρχων· τὸ δὲ ἴσον τοῦ πλείονος καὶ ἐλάττονος πάντως ἐν μεταχιμῳ θεωρεῖται καὶ ἔστιν ὥσπερ τὸ μέτριον τοῦ ὑπερβάλλοντος καὶ τοῦ ἐλλείποντος μεταξὺ καὶ τὸ ὁμόφωνον τοῦ ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου.

1.16.2 ὅταν οὖν ἀριθμὸς πάνθ', ὅσα ἐνδέχεται ἐν αὐτῷ εἶναι, μέρη συναχθέντα καὶ συγκεφαλαιωθέντα ἐν συγκρίσει τῇ πρὸς ἑαυτὸν ἔχων μῆτε ὑπερβάλλῃ τῷ πλήθει αὐτὰ μῆτε ὑπερβάλλῃται ὑπ' αὐτῶν, τότε ὁ τοιοῦτος τέλειος κυρίως λέγεται, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν· οἷον ὁ ζ καὶ ὁ κη· ὁ τε γὰρ ζ ἔχει μέρη ἡμισυ, τρίτον, ἕκτον, ἅπερ εἰσὶ γ, β, α, ἅπερ συγκεφαλαιωθέντα ὁμοῦ καὶ γενόμενα ζ ἴσα τῷ ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχει καὶ οὔτε πλείονα οὔτε ἐλάττονα· καὶ ὁ κη μέρη μὲν ἔχει ἡμισυ, τέταρτον, ἔβδομον, τεσσαρεσκαίδέκατον, εἰκοστόγδοον, ἅπερ γίνεται ιδ, ζ, δ, β, α, καὶ ὕφ' ἐν συναθροισθέντα ἀποτελεῖ τὸν κη καὶ οὕτως οὔτε τὰ μέρη πλείονα τοῦ ὅλου οὔτε τὸ ὅλον τῶν μερῶν, ἀλλ' ἢ σύγκρισις ἐν ἰσότητι, ὅπερ τελείου ιδιότης.

1.16.3 συμβέβηκε δέ, καθάπερ τὰ καλὰ τά τε κατ' ἀρετὴν σπάνια καὶ εὐαρίθμητα, τὰ δὲ αἰσχρὰ καὶ ἐν κακίᾳ εἶναι πολύχοα, οὕτω καὶ ὑπερτελεῖς μὲν καὶ ἐλλιπεῖς παμπόλλους καὶ ἀτάκτους εὐρίσκεσθαι ἀκόσμου οὔσης τῆς αὐτῶν εὐρέσεως, τελείους δὲ εὐαριθμήτους τε καὶ τεταγμένους μετὰ προσήκοντος κόσμου· εἷς μὲν γὰρ μόνος εὐρίσκεται ἐν μονάσιν ὁ ζ, ἕτερος δὲ μόνος ἐν δεκάσιν ὁ κη, τρίτος δὲ τις ἐν βαθμῷ ἑκατοντάδων μόνος ὁ υρς, τέταρτος ὁ ἐν χιλιάδων ὄρω, τουτέστιν ὁ ἐντὸς μυριάδων ὁ , ηρκη· καὶ παρέπεται αὐτοῖς μίαν παρὰ μίαν εἰς ἑξάδα ἢ ὀγδοάδα καταλήγειν καὶ πάντως εἶναι νὲ ἀρτίους. Γένεσις δὲ αὐτῶν γλαφυρά τε καὶ ἀσφαλὴς οὔτε παραλείπουσά τινα τῶν τελείων οὔτε ἀδιαφοροῦσά τινα τῶν μὴ τοιούτων τούτῳ γινομένη τῷ τρόπῳ.

1.16.4 ἐκθέσθαι δεῖ τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀρτιάκις ἀρτίους προβιβάζοντα ἐξῆς ἐν ἐνὶ στίχῳ, μέχρις οὗ βούλει, α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς, φιβ, , ακδ, , βμη, , δρς, εἴτα ἀεὶ κατὰ ἐνὸς πρόσθεσιν ἐπισωρεύειν, καὶ καθ' ἐκάστην ἐπισώρευσιν σκοπεῖν τὸν γινόμενον, οἷός ἐστι· καὶ ἂν μὲν εὐρῆς πρῶτον καὶ ἀσύνθετον ὑπάρχοντα, τῇ τοῦ ἐσχάτου προσληφθέντος ποσότητι πολλαπλασιάσεις

αὐτὸν καὶ ὁ ἀποτελεσθεὶς πάντως τέλειος ἔσται· ἐὰν δὲ δεύτερον καὶ σύνθετον, οὐ
πολλαπλασιάσεις, ἀλλ' ἐπισωρεύσεις τὸν ἐξῆς καὶ πάλιν ἐπισκέψη, τίς ὁ ἀποτελούμενος, καὶ
ἐὰν μὲν δεύτερος καὶ σύνθετος, πάλιν παραλείψεις καὶ οὐ πολλαπλασιάσεις, ἀλλ' ἐπισωρεύσεις
τὸν ἐξῆς, ἐὰν δὲ πρῶτος καὶ ἀσύνθετος, τῷ ἐσχάτῳ εἰς τὴν σύνθεσιν παραληφθέντι
πολλαπλασιάσεις αὐτὸν καὶ ὁ γινόμενος τέλειος ἔσται, καὶ τοῦτο μέχρις ἀπείρου· παραπλησίως
πάντας ἐξῆς ἀπογεννήσεις τοὺς τελείους μηδενὸς παραλειπομένου· οἷον τῷ α ἐπισωρεύω τὸν β
καὶ σκοπῶ τὸ συναμφοτέρων, τίς ἀριθμὸς ἐστὶ, καὶ εὐρίσκω τὸν γ ἀριθμόν, ἐξ ὧν προαπεδείχθη,
πρῶτον καὶ ἀσύνθετον· ἐτερώνυμον γὰρ μόριον οὐκ ἔχει, ἀλλὰ μόνον τὸ ἑαυτῷ παρώνυμον·
διὰ τοῦτο αὐτὸν πολλαπλασιάζω τῇ τοῦ ὑστέρου εἰς τὴν σωρείαν ληφθέντος ποσότητι,
τουτέστι τοῦ β, καὶ γεννᾶται μοι ὁ ζ καὶ τοῦτον ἀποφαίνομαι ἐνεργείᾳ πρῶτον εἶναι τέλειον
καὶ ἔχειν μέρη ἐκεῖνα τὰ ἐνθεωρούμενα τοῖς ἀριθμοῖς, ἐξ ὧν συνέστη· μονάδα μὲν γὰρ ἐκ
παρωνύμου μέρους ἔχει, ὃ ἐστὶ τοῦ ἑκτου, γ δὲ ἐξ ἡμίσεος κατὰ τὸν β θεωρουμένου,
ἀντιστρόφως δὲ δυάδα ἐκ τρίτου.

- 1.16.5 ὁ δὲ κη καὶ αὐτὸς ἐτέρου προσεπισωρευθέντος τοῖς προτέροις τοῦ δ γεννᾶται τῇ αὐτῇ ἐφόδῳ·
τὸ γὰρ συγκεφαλαίωμα τῶν τριῶν, τοῦ τε α καὶ β καὶ δ, γίνεται μὲν ζ, εὐρίσκεται δὲ πρῶτος καὶ
σύνθετος μόνον γὰρ τὸ παρώνυμον μόριον ἐπιδέχεται τὸ ἑβδομον· διὰ τοῦτο πολυπλασιάζω
αὐτὸν τῇ τοῦ ἐσχάτου προσληφθέντος εἰς τὴν σωρείαν ποσότητι καὶ ἀποβαίνει μοι ὁ κη τοῖς
ἰδίῳις μέρεσιν ἴσος, ἔχων καὶ αὐτὸς ἐκ τῶν προηγουμένων τὰ ἐν αὐτῷ μέρη, ἡμισυ μὲν παρὰ
τὴν δυάδα, τέταρτον δὲ παρὰ τὴν ἐπτάδα, ἑβδομον δὲ παρὰ τὸ δ, τεσσαρεσκαίδέκατον δὲ παρὰ
τὴν τοῦ ἡμίσεος ἀντιδιαστολήν, εἰκοστόγδοον δὲ παρὰ τὴν αὐτοῦ παρωνυμίαν, ἥτις ἐν πᾶσι
μονὰς ὑπάρχει.
- 1.16.6 εὐρημένων δὲ τούτων, ἐν μὲν μονάσιν τοῦ ζ, ἐν δὲ δεκάσιν τοῦ κη, εἰς τὴν ἐφεξῆς πλάσιν τὸ αὐτὸ
σε δεῖ ποιῆσαι. πάλιν γὰρ ἐπισύνθες τὸν ἐξῆς τὸν η, γίνονται ὁμοῦ ιε· ἐπισκοπῶν αὐτὸν
εὐρίσκω οὐκέτι πρῶτον καὶ ἀσύνθετον, πρὸς δὲ τῷ παρωνύμῳ μορίῳ ἔτι καὶ πέμπτον ἔχει καὶ
τρίτον ἐτερώνυμον· διὸ οὐ πολλαπλασιάζω τῷ η αὐτόν, ἀλλ' ἐπισωρεύω τὸν ἐξῆς τὸν ις καὶ
γίνεται ὁ λα· οὗτος ἐπειδὴ πρῶτος καὶ ἀσύνθετός ἐστιν, ἀναγκαίως πολυπλασιασθήσεται κατὰ
τὸ τῆς ἐφόδου καθολικὸν πρόσταγμα τῷ ἐσχάτῳ εἰς τὴν σωρείαν προσληφθέντι τῷ ις καὶ
γενήσεται ὁ υρς ἐν ἑκατοντάσιν, ἔπειτα τῷ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ὁ , ηρκη ἐν χιλιάσιν, καὶ αἰεὶ οὕτως,
μέχρις ἂν εὐτονῇ τις παρέπεσθαι.
- 1.16.8 ἡ ἄρα μονὰς δυνάμει, ἀλλ' οὐπω ἐστὶ τέλειος ἐνεργείᾳ· ἐκ γὰρ τοῦ στίχου πρωτίστην αὐτὴν εἰς
τὴν σωρείαν λαβὼν ἐπεσκόπησα κατὰ τὸ πρόσταγμα, ποταπὴ τις ὑπάρχει, καὶ εὔρον πρώτην
καὶ ἀσύνθετον· ὥς ἀληθῶς γάρ, οὐ κατὰ μετοχὴν ὥς οἱ ἄλλοι, πρώτη τε ὑπάρχει παντὸς
ἀριθμοῦ καὶ ἀσύνθετος μόνη.
- 1.16.9 πολυπλασιάζω οὖν αὐτὴν τῷ ληφθέντι ἐσχάτῳ εἰς τὴν σωρείαν, τουτέστιν ἑαυτῇ, καὶ γεννᾶται
μοι μονάς· ἅπαξ γὰρ α μονάς.
- 1.16.10 τελεία ἄρα ἐστὶ δυνάμει ἡ μονάς· ἴση γὰρ τοῖς ἰδίῳις μέρεσιν κατὰ δύναμιν αὕτη, οἱ δ' ἄλλοι κατ'
ἐνέργειαν. Προτετεχνολογημένου δὲ ἡμῖν περὶ τοῦ καθ' αὐτὸ ποσοῦ νῦν μετερχόμεθα καὶ ἐπὶ
τὸ πρὸς τι.
- 1.17.2 τοῦ πρὸς τι τοίνυν ποσοῦ δύο αἱ ἀνωτάτω γενικαὶ διαιρέσεις εἰσὶν, ἰσότης καὶ ἀνισότης· πᾶν
γὰρ ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρούμενον ἥτοι ἴσον ὑπάρχει ἢ ἄνισον, τρίτον δὲ παρὰ ταῦτα
οὐδέν.
- 1.17.3 τὸ μὲν οὖν ἴσον θεωρεῖται, ὅταν τῶν συγκρινόμενων τὸ ἕτερον μήτε ὑπερέχη μήτε ἐλλείπη
πρὸς τὴν τοῦ λοιποῦ παραβολήν, οἷον ἑκατὸν πρὸς ἑκατὸν ἢ δέκα πρὸς δέκα ἢ δύο πρὸς δύο ἢ

μνᾶ πρὸς μνᾶν ἢ τάλαντον πρὸς τάλαντον ἢ πῆχυς πρὸς πῆχυν καὶ τὰ παραπλήσια εἴτε ἐν ὄγκῳ εἴτε ἐν μήκει εἴτε ἐν βάρει εἴτε ἐν ποσότητι ἡτινιοῦν.

- 1.17.4 ἔστι δὲ καὶ ἰδίως ἡ σχέσις αὕτη [ἡ τῆς ἰσότητος] ἄσχιστος καθ' ἑαυτὴν καὶ ἀδιαίρετος, ὡς ἂν ἀρχικωτάτη, διαφορὰν γὰρ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται· οὐ γάρ ἐστι τοῦ ἴσου τὸ μὲν τοιόνδε, τὸ δὲ τοιόνδε, ἀλλ' ἐνὶ τρόπῳ καὶ τῷ αὐτῷ τὸ ἴσόν ἐστιν.
- 1.17.5 ἀμέλει καὶ τὸ ἀνθυπακοῦον τῷ ἴσῳ οὐχ ἑτερονυμεῖ πρὸς αὐτό, ἀλλὰ συνωνυμεῖ, ὥσπερ φίλος, γείτων, συστρατιώτης, οὕτω δὲ καὶ ἴσος ἴσῳ γάρ ἐστιν ἴσος.
- 1.17.6 τὸ δὲ ἄνισον καὶ αὐτὸ καθ' ὑποδιαίρεσιν διχῇ σχίζεται καὶ ἔστιν αὐτοῦ τὸ μὲν μείζον, τὸ δὲ ἔλαττον, ἀντωνυμούμενά τε καὶ ἀντίθετα ἀλλήλοις κατὰ ποσότητα καὶ σχέσιν αὐτῶν· τὸ μὲν γὰρ μείζον ἐτέρου τινὸς μείζον, τὸ δὲ ἔλαττον ἔμπαλιν ἐτέρου τινὸς ἔλαττον ἐν συγκρίσει, καὶ τὰ ὀνόματα οὐ τὰ αὐτά, ἀλλὰ διαφέροντα ἔχει ἑκάτερα, ὡς πατήρ καὶ υἱὸς καὶ τύπτων καὶ τυπτόμενος καὶ διδάσκων καὶ μαθητὴς καὶ τὰ ὅμοια.
- 1.17.7 τοῦ μὲν οὖν μείζονος καθ' ὑποδιαίρεσιν δευτέραν εἰς πέντε εἶδη διαιρουμένου τὸ μὲν ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ δὲ ἐπιμόριον, τὸ δὲ ἐπιμερές, τὸ δὲ πολλαπλασιεπιμόριον, τὸ δὲ πολλαπλασιεπιμερές.
- 1.17.8 καὶ τοῦ ἀντιθέτου δὲ τούτῳ, τουτέστι τοῦ ἐλάττονος, πέντε εἶδη ὁμοίως καθ' ὑποδιαίρεσιν συνίσταται ἀντικείμενα τοῖς προειρημένοις τοῦ μείζονος πέντε εἶδεσιν (ὡς ὅλον ὅλῳ, τὸ ἔλαττον τῷ μείζονι, οὕτω καὶ ἕκαστον ἐκάστῳ τῇ προλεχθείσῃ τάξει μετὰ τῆς ὑπὸ προθέσεως ἀντιδιαστελλόμενα), ὑποπολλαπλάσιον, ὑπεπιμόριον, ὑπεπιμερές, ὑποπολλαπλασιεπιμόριον καὶ ὑποπολλαπλασιεπιμερές. Ἄνωθεν οὖν πολλαπλάσιόν ἐστιν εἶδος τοῦ μείζονος τὸ πρῶτιστον καὶ προγενέστερον φύσει, ὡς εὐθὺς εἰσόμεθα, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ, ἐπειδὴν ἐν συγκρίσει πρὸς ἕτερον θεωρεῖται, ἔχων αὐτὸν ἐν ἑαυτῷ ὅλον πλεονάκις ἢ ἅπαξ· οἶον πρὸς τὴν μονάδα πάντες οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἀπὸ δυάδος ἀρξάμενοι συγκρινόμενοι τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὐτακτα εἶδη ἀπογεννῶσι τῇ οἰκείᾳ ἀκολουθίᾳ· πρῶτος μὲν γὰρ ὁ β διπλάσιος καὶ ἔστι καὶ λέγεται, ὁ δὲ γ τριπλάσιος, ὁ δὲ δ τετραπλάσιος, καὶ ἐπ' ἄπειρον· τὸ γὰρ πλεονάκις ἢ ἅπαξ ἦτοι δις ἢ τρίς σημαίνει ἢ ἐφεξῆς, μέχρις οὗ βούλει.
- 1.18.2 ἀντιδιέσταλται δὲ τούτῳ τὸ ὑποπολλαπλάσιον καὶ αὐτὸ φύσει πρῶτιστον ὑπάρχον ἐν τῷ ἐλάττονι τῆς ἀνισότητος μέρει, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ, ἐπειδὴν μείζονι συγκρίνηται, δυνάμενος μετρεῖν αὐτὸν πληρουντῶς πλεονάκις ἢ ἅπαξ, τὸ δὲ πλεονάκις ἢ ἅπαξ ἀπὸ τοῦ δις ἄρχεται καὶ ἐπ' ἄπειρον πρόεισιν.
- 1.18.3 ἐὰν μὲν οὖν δις μόνον μετρή τὸν ἐν συγκρίσει μείζονα, ὑποδιπλάσιος λέγεται ἰδίως, ὥσπερ τὸ α τῶν β, ἐὰν δὲ τρίς, ὑποτριπλάσιος, ὥσπερ τῶν γ τὸ α, ἐὰν δὲ τετράκις, ὑποτετραπλάσιος, ὥσπερ τὸ αὐτὸ α τῶν δ, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.
- 1.18.4 γενικῶς δὲ ἀπείρου ὑπάρχοντος ἑκατέρου, τοῦ τε πολλαπλασίου καὶ τοῦ ὑποπολλαπλασίου, ἔτι καὶ αἱ καθ' ὑποδιαίρεσιν διαφοραὶ καὶ τὰ εἶδη ἐπ' ἄπειρον φύσει προϊόντα θεωρεῖται· τὸ γὰρ διπλάσιον ἀρχόμενον ἀπὸ τοῦ β διὰ πάντων ἀρτίων πρόεισιν, ἕνα παρ' ἕνα λαμβανόντων ἡμῶν τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ φυσικοῦ χύματος· ἐν συγκρίσει δὲ οὗτοι διπλάσιοι λεχθήσονται πρὸς τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐξῆς κειμένους ἀρτίους τε καὶ περισσοὺς.
- 1.18.5 τριπλάσιοι δὲ πάντες εἰσὶν οἱ ἀπ' ἀρχῆς δύο παραλειπομένων ἐκλεγόμενοι τρίτοι τῇ τάξει, οἶον γ, ζ, θ, ιβ, ιε, ιη, κα, κδ, οἷς συμβέβηκεν ἕνα παρ' ἕνα ἀρτίους τε καὶ περισσοὺς εἶναι, καὶ αὐτοὶ δὲ ἐν τῷ ἀπὸ τῆς μονάδος ἀριθμῷ εὐτάκτῳ τῶν ἐφεξῆς πάντων τριπλάσιοί εἰσι προχωροῦντες, ἐφ' ὅσον βούλεται τις παρακολουθεῖν.
- 1.18.6 τετραπλάσιοι δὲ εἰσὶν οἱ τριῶν παραλειπομένων πάντη τέταρτοι, οἶον δ, η, ιβ, ις, κ, κδ, κη, λβ καὶ ἐφεξῆς, καὶ οὗτοι δὲ τῶν ἀπὸ μονάδος εὐτάκτων τετραπλάσιοί εἰσι προϊόντες, ἐφ' ὅσον ἂν

εὐτονῇ τις ἔπεσθαι· συμβέβηκε δὲ καὶ τούτοις πάντας εἶναι ἀρτίους· ἓνα γὰρ παρ' ἓνα μόνον παραλείπτεον ἐξ αὐτῶν τῶν ἄνωθεν διακεκριμένων ἀρτίων, ὥστε ἀναγκαίως ὑπάρχειν τοῖς ἀπλῶς ἀρτίοις διπλασίοις μὲν ἅπασιν εἶναι, τετραπλασίοις δὲ ἓνα παρ' ἓνα καὶ ἑξαπλασίοις ἓνα παρὰ δύο καὶ ὀκταπλασίοις ἓνα παρὰ τρεῖς, καὶ ἐπ' ἅπειρον οὕτως ἀνάλογον ἢ προκοπή.

1.18.7 πενταπλάσιοι δὲ ὀφθήσονται οἱ τέσσαρας μὲν παραλείποντες, πέμπτοι δὲ τεταγμένοι ἀπ' ἀλλήλων καὶ αὐτοὶ δὲ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς τεταγμένων ἀριθμῶν πενταπλάσιοι, καὶ εἷς παρ' ἓνα περισσὸς καὶ ἄρτιος κατὰ τὴν αὐτὴν τῶν τριπλασίων τάξιν. Ἐπιμόριος δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς, τὸ τοῦ μείζονος δεύτερον τῇ φύσει εἶδος καὶ τῇ τάξει, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸν συγκρινόμενον ὅλον καὶ μόριον αὐτοῦ ἐν τι.

1.19.2 ἀλλ' ἐὰν μὲν ἥμισυ ᾗ τὸ μόριον, καλεῖται ἡμιόλιος εἰδικῶς ὁ τῶν συγκρινομένων μείζων, ὑφημιόλιος δὲ ὁ ἐλάσσων, ἐὰν δὲ τρίτον, ἐπίτρίτος τε καὶ ὑπεπίτρίτος, καὶ ἀεὶ οὕτως μέχρι παντὸς προχωροῦντι συμφωνήσει σοι, ὥστε καὶ ταῦτα ἐπ' ἅπειρον τὰ εἶδη πρόεισι καίτοι ἀπείρου τινὸς εἶδη ὄντα γένους· τὸ μὲν γὰρ πρῶτιστον αὐτῶν τὸ ἡμιόλιον συμβαίνει τοὺς μὲν ὑπολόγους ἔχειν τοὺς ἀπὸ δυάδος ἐφεξῆς ἀρτίους, ἄλλον δὲ οὐδαμῶς οὐδένα, τοὺς δὲ προλόγους τοὺς ἀπὸ τριάδος ἐφεξῆς τριπλασίους, ἄλλον δὲ οὐδένα.

1.19.3 συζευκτέον δὲ αὐτοὺς εὐτάκτως πρῶτον πρῶτῳ, δεύτερον δευτέρῳ, τρίτον τρίτῳ, τὸν γ τῷ β, τὸν ζ τῷ δ, τὸν θ τῷ ς, τὸν ιβ τῷ η, καὶ τοὺς ἀναλόγους τοῖς ὁμοταγέσιν.

1.19.4 ἐὰν δὲ ἐπισκέψασθαι θέλωμεν τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ ἐπιμορίου, τουτέστι τὸ ἐπίτρίτον (συνεχὲς γὰρ μέρος αὐτοῦ φυσικῶς μετὰ τὸ ἥμισυ ὑπάρχει τὸ τρίτον), ὅρον μὲν αὐτοῦ ἔξομεν τοῦτον· ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ ὅλον τε τὸν συγκρινόμενον καὶ μέρος αὐτοῦ τρίτον πρὸς τῷ ὅλῳ. ὑποδείγματα δὲ αὐτοῦ εὐτακτα ληφθήσεται ἡμῖν οἱ ἀπὸ τετράδος συνεχεῖς τετραπλάσιοι συνεζευγμένοι τοῖς ἀπὸ τριάδος τριπλασίοις ὁμοταγεῖς ὁμοταγέσιν, οἷον ὁ δ τῷ γ, ὁ η τῷ ς, ὁ ιβ τῷ θ, καὶ κατὰ ταῦτα ἐφ' ὅσονοῦν.

1.19.5 δῆλον δέ, ὅτι ὁ ἀνθυπακούων τῷ ἐπιτρίτῳ, λεγόμενος δὲ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ὑπεπίτρίτος, ἐστὶν ὁ ἐμπεριεχόμενος ἐκεῖνῳ ὅλος τε καὶ προσέτι ἑαυτοῦ τρίτον, ὡς ὁ μὲν γ τῷ δ, ὁ δὲ ς τῷ η, ὁ δὲ θ τῷ ιβ, καὶ οἱ ἀκόλουθοι τῶν ὁμοταγῶν.

1.19.6 παρατηρητέον δὲ τὸ παρεπόμενον πᾶσι τούτοις γλαφυρόν, ὅτι οἱ μὲν πρῶτοι καὶ πυθμένες λεγόμενοι ἐγγύς εἰσιν ἀλλήλων ἐν τῷ φυσικῷ χύματι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀπὸ πυθμένος ἓνα μόνον ἀριθμὸν διαλείπουσιν, οἱ δὲ τρίτοι δύο, οἱ δὲ τέταρτοι τρεῖς καὶ οἱ πέμπτοι τέσσαρας καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρις οὗ βούλει.

1.19.7 ἔτι γε μὴν καί, ὅτι τὸ μόριον, οὗ παρώννυμος ἕκαστός ἐστι τῶν ἐπιμορίων, ἐν τοῖς ἡττοσι θεωρεῖται τῶν πυθμένων, ἐν δὲ τοῖς μείζουσιν οὐδαμῶς.

1.19.8 ὅτι δὲ φυσικῶς καὶ οὐχ ἡμῶν θεμένων, ἀρχεγονώτερον τὸ πολλαπλάσιον καὶ πρεσβύτερον τοῦ ἐπιμορίου, καὶ ἐν τοῖς ἐξῆς μὲν ποικιλώτερον εἰσόμεθα, ὅσον οὕπω· κἀνανταῦθα δὲ πρὸς ἀπλὴν ἔμφασιν προχειριστέον κατ' εὐτάκτους καὶ παραλλήλους στίχους τοὺς προφρασθέντας ἡμῖν πολλαπλασίους εἰδικῶς, πρῶτον διπλάσιον ἐν ἐνὶ στίχῳ, εἶτα ἐν δευτέρῳ τριπλάσιον, εἶτα τετραπλάσιον ἐν τρίτῳ καὶ μέχρι δεκαπλασίων, ἵνα καὶ τάξιν καὶ ποικιλίαν αὐτῶν καὶ πρόβασιν ἔντεχνον καὶ ὅ τι πρότερον φύσει κατίδωμεν καὶ δὴ καὶ ἕτερα τινὰ τερπνὰ καὶ γλαφυρὰ παρακολουθήματα.

1.19.9 ἔστω δὲ τὸ διάγραμμα τοιοῦτον· ἐκκείσθω ἐν μὲν τῷ πρῶτῳ στίχῳ ὁ ἀπὸ μονάδος φυσικὸς ἀριθμὸς, εἶτα ἐξῆς οἱ κελευσθέντες τῶν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν.

1.19.11 οὐκοῦν τῶν μὲν πρῶτων στίχων ἀρχομένων ἀπὸ μονάδος ἐπὶ τε πλάτος καὶ ἐπὶ βάθος γαμμοειδῶς οἱ δεύτεροι ἐφ' ἑκάτερα καὶ αὐτοὶ γαμμοειδῶς ἀπὸ τετράδος ἀρχόμενοι πολλαπλάσιοι εἰσι κατὰ τὸ πρῶτον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου, διπλάσιοι γάρ, καὶ ὁ μὲν πρῶτος

τοῦ πρώτου μονάδι διαφέρων, ὁ δὲ δεύτερος τοῦ δευτέρου δυάδι καὶ ὁ τρίτος τοῦ τρίτου τριάδι καὶ τετράδι οἱ συνεχεῖς καὶ πεντάδι οἱ μετ' αὐτοὺς καὶ τοῦτο μέχρις ὅλου ἀκόλουθον εὐρήσεις· οἱ δὲ τρίτοι ἐφ' ἑκάτερα ἀπὸ ἐνάδος κοινῆς ἀρχόμενοι τῶν ἐν τῷ αὐτῷ πρώτῳ στίχῳ κατὰ τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου τριπλάσιοι ἔσονται συνεξεταζομένων αὐτοῖς καὶ τῶν εἰς τριάδα ἐκατέρωθεν χιασμῶν. συμποκόψει δὲ καὶ ἡ διαφορὰ τούτοις κατὰ τὴν τῶν ἀρτίων φύσιν, τῷ μὲν πρώτῳ δυὰς οὕσα, τῷ δὲ ἐφεξῆς τετράς, τῷ δὲ τρίτῳ ἐξάς, ἣν καὶ διαφορὰν αὐτομάτως ἡμῖν ἡ φύσις ἐμεσεμβόλησε μεταξὺ τούτων τῶν ἐξεταζομένων, ὥς ἐν τῷ διαγράμματι φαίνεται.

1.19.13 ὁ δὲ τέταρτος στίχος, οὗ κοινὴ μὲν ἀρχὴ ἐφ' ἑκάτερα ὁ ις, οἱ δὲ χιασμοὶ περαιοῦνται εἰς τὰς τετράδας, τὸ τρίτον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου δεικνύντες, τουτέστι τὸ τετραπλάσιον, πρὸς τὸν αὐτὸν ἐξεταζόμενοι πρώτιστον στίχον ὁμοταγῶς, πρώτου μὲν ἀριθμοῦ πρὸς πρῶτον, δευτέρου δὲ πρὸς δεύτερον καὶ τρίτου πρὸς τρίτον καὶ ἐφεξῆς· πάλιν δὲ αἱ τούτων διαφοραὶ τριάς, ἐξάς, εἴτα ἐνάς, εἴτα δωδεκάς καὶ αἱ κατὰ τριάδος προκοπὴν ποσότητες· καὶ αὗται ἐν τῷ τοῦ διαγράμματος ὕφει πεφώρηνται τάξει ἐκκείμεναι ὑπὲρ αὐτοὺς τοὺς τετραπλασίους καὶ ἐπὶ τῶν ἀκολουθῶν τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν τὸ ἀνάλογον μέχρι παντὸς προχωρεῖ.

1.19.14 πρὸς δὲ τὸν ἐφ' ἑκάτερα δεύτερον στίχον ἀπὸ κοινῆς ἀρχῆς τοῦ δ ἀρχόμενον, ὑπερεκπίπτοντα δὲ κατὰ χιασμὸν εἰς ἰδίαν ἐκατέρων δυάδα, οἱ ὑποβεβηκότες τάξει στίχοι τοῦ ἐπιμορίου τὸ πρώτιστον εἶδος παρεμφαίνουσι, τουτέστι τὸ ἡμιόλιον, ὁμοταγεῖς πρὸς ὁμοταγεῖς οὕτω φύσει θεία καὶ οὐ νόμῳ ἡμετέρῳ οὐδὲ συνθήματι μεταγενέστεροι τῶν πολλαπλασίων οἱ ἐπιμόριοι, οἷον ὁ μὲν γ τοῦ β, ὁ δὲ ζ τοῦ δ, ὁ θ τοῦ ς, ὁ ιβ τοῦ η, ὁ ιε τοῦ ι, καὶ μέχρι παντός· διαφορὰν δὲ καὶ οὗτοι ἔχουσι τοὺς ἀπὸ μονάδος ἐφεξῆς ἀριθμούς, ὥς οἱ πρὸ αὐτῶν. Ἐπίτριοι δέ, τὸ τοῦ ἐπιμορίου δεύτερον εἶδος, ἴση τινὶ καὶ ὁμοίᾳ προκοπῇ προχωροῦσιν ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν γ καὶ ἡ πρὸς ς καὶ ιβ πρὸς θ καὶ ις πρὸς ιβ, καὶ ἀκολουθῶς ἴσην καὶ τὴν τῶν διαφορῶν αὐξησιν λαμβάνοντες.

1.19.16 καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν σχέσεων πολλαπλασίου τε καὶ ἐπιμορίου σύμφωνα τὰ ἀποτελέσματα καὶ οὐδαμῶς ἐναντιούμενα προβαίνων ἐπ' ἄπειρον ὄψει.

1.19.17 κἀκεῖνο δὲ οὐκ ἐλάττονος ἀκριβείας τέτευχεν ἐν τῷ διαγράμματι· ἐπιγώνιοι μὲν γὰρ αὐτῶν εἰσι μονάδες, ἡ μὲν κατ' ἀρχὴν ἀπλῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τέλει τριοδουμένη, δευτεροδούμεναι δὲ ἐν διφορήσει αἱ δύο λοιπαί, ὥστε ἀποτελεῖν τὸ ὑπό—ἴσον τῷ ἀπό—.

1.19.18 ἀλλὰ καὶ ἐκατέρωθεν ἴση πρόβασις ἀπὸ μονάδος εἰς τὰς δεκάδας καὶ πάλιν ἀντιθέτως ἑκάτεραι αἱ ἀπὸ δεκάδος προχωρήσεις εἰς ἑκατοντάδα.

1.19.19 καὶ οἱ μὲν διαγώνιοι οἱ ἀπὸ μονάδος εἰς ἑκατοντάδα τετράγωνοι πάντως ἀριθμοὶ ἰσάκις ἴσοι μηκυνθέντες, οἱ δὲ ἐκατέρωθεν παρασπίζοντες αὐτοὺς ἑτερομήκεις πάντως ἄνισοι καὶ μονάδι μείζουσιν ἀλλήλων πλευραῖς μηκυνθέντες· ὥστε ἐξ ἅπαξ δύο ἐφεξῆς τετραγώνων καὶ δις τοῦ ἀνὰ μέσον αὐτῶν ἑτερομήκους τετράγωνον πάντως ἀποτελεῖσθαι καὶ ἀνάπαλιν ἐξ ἅπαξ δύο παρακειμένων ἑτερομηκῶν καὶ δις τοῦ ἀνὰ μέσον αὐτῶν τετραγώνου τετράγωνον πάντως ἀποτελεῖσθαι. Καὶ ἕτερα πολλὰ τοιαῦτα φιλοτιμούμενος εὖροι τις ἂν τερπνὰ ἐμφαινόμενα τῷδε τῷ διαγράμματι, περὶ ὧν οὐ καιρὸς νῦν μηκύνειν· οὐπω γὰρ τὴν ἐπίγνωσιν αὐτῶν ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς εἰλήφαμεν, ὥστε ἐπὶ τὰ ἐξῆς τρεπτέον· μετὰ γὰρ τὰς δύο ταύτας γενικὰς σχέσεις πολλαπλασίου καὶ ἐπιμορίου καὶ τὰς ἀντιθέτους αὐταῖς σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ἐκφερομέναις ἄλλας δύο ὑποπολλαπλάσιόν τε καὶ ὑπεπιμόριον εἰσὶν ἐν μὲν τῷ μείζονι τοῦ ἀνίσου μέρει ἡ ἐπιμερής, ἐν δὲ τῷ ἐλάττονι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ὑπεπιμερής.

1.20.1 Ἔστι δὲ ἐπιμερής μὲν σχέσις, ὅταν ἀριθμὸς τὸν συγκρινόμενον ἔχη ἐν ἑαυτῷ ὅλον καὶ προσέτι μέρη αὐτοῦ πλείονα ἐνός· τὸ δὲ πλείονα ἐνός ἄρχεται πάλιν ἀπὸ τοῦ β καὶ πρόεισιν ἐπὶ πάντας

τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμούς· ὥστε τοῦ ἐπιμεροῦς πυθμὴν ἐστὶν εἰκότως ὁ πρὸς τῷ ὅλῳ δύο μέρη τοῦ ἀντισυγκρινομένου ἔχων καὶ κληθήσεται ἐπιδιμερὴς εἰδικῶς, μετὰ δὲ τοῦτον ὁ τρία πρὸς τῷ ὅλῳ ἔχων κληθήσεται ἐπιτριμερὴς εἰδικῶς, καὶ μετὰ τοῦτον ἐπιτετραμερὴς, εἴτα ἐπιπενταμερὴς, καὶ οὕτως αἰεὶ. τὰ δὲ μέρη ρίζαν ἔχει καὶ ἀρχὴν ἀπὸ τοῦ τρίτου· ἀδύνατον γὰρ ἐνθάδε ἀπὸ τοῦ ἡμισυ ἄρχεσθαι· ἂν γὰρ καὶ τινα ὑποθώμεθα β ἡμίση ἔχειν τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τῷ ὅλῳ, λήσομεν ἑαυτοὺς πολλαπλάσιον ἀντὶ ἐπιμεροῦς τιθέντες· ἕκαστον γὰρ ὅλον καὶ β ἡμίση αὐτοῦ συντιθέμενα διπλάσιον γίνεται τοῦ ἐξ ἀρχῆς· ὥστε ἀναγκαιότατον ἀπὸ β τρίτων ἄρχεσθαι, εἴτα β πέμπτων, εἴτα β ἑβδόμων, καὶ ἐπὶ τούτοις β ἐνάτων κατὰ τὴν τῶν περισσῶν πρόβασιν· τὰ γὰρ β τέταρτα λόγου χάριν πάλιν ἡμισύ ἐστι καὶ τὰ β ἕκτα τρίτον καὶ οὕτω πάλιν ἐπιμόριοι ἀντὶ ἐπιμερῶν γενήσονται, ὅπερ οὐ πρόκειται οὔτε ἡμῖν οὔτε τῇ τῆς τεχνολογίας καταλληλία.

1.20.3 μετὰ δὲ τὸν ἐπιμερῆ εὐθὺς συννυφίσταται ὁ ὑπεπιμερὴς, ὅταν ἀριθμὸς ἐν τῷ συγκρινομένῳ ὅλος ἔχῃται αὐτός τε καὶ προσέτι πλείονα αὐτοῦ μέρη ἢ β ἢ γ ἢ δ ἢ ε καὶ ἐφεξῆς. Τάξις δὲ ἀμφοτέρων καὶ ἀκόλουθος γένεσις εὐρίσκεται, ὅταν ἐκθέμενοι τοὺς ἀπὸ τριάδος ἐξῆς ἀρτίους καὶ περιττοὺς ἀριθμοὺς πρὸς τούτους συγκρίνωμεν τοὺς ἀπὸ πεντάδος καθαροὺς συνεχεῖς περισσοὺς μόνους, πρῶτον πρὸς πρῶτον, οἷον τὸν ε πρὸς τὸν γ, καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον, οἷον τὸν ζ πρὸς τὸν δ, καὶ τρίτον πρὸς τρίτον, οἷον τὸν θ πρὸς τὸν ε, καὶ τέταρτον πρὸς τέταρτον, οἷον τὸν ια πρὸς τὸν ς, καὶ ἐφεξῆς τῇ αὐτῇ τάξει ἐφ' ὅσονοῦν· οὕτως γὰρ εὐτακτα τὰ τοῦ ἐπιμεροῦς τε καὶ ὑπεπιμεροῦς εἶδη κατὰ τοὺς ἐκάστου πυθμένας δηλωθήσεται, ἐπιδιμερεῖς πρῶτον, εἴτα ἐπιτριμερεῖς καὶ ἐπιτετραμερεῖς καὶ ἐπιπενταμερεῖς καὶ ἐφεξῆς ἐπὶ πλέον παραπλησίως· μετὰ γὰρ τοὺς πυθμένας ἐκάστου γενήσονται οἱ συνεχεῖς διπλασιαζομένων ἀμφοτέρων τῶν ὄρων ἢ τριπλασιαζομένων καὶ ὅλως κατὰ τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὐτακτα εἶδη μεγεθυνομένων.

1.21.1 προσεκτέον δέ, ὅτι ἐκ μὲν τῶν δύο μερῶν τῶν πρὸς τῷ ὅλῳ ἐνότων τῷ μείζονι τὸ τρίτον ὑπακούεται, ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν τὸ τέταρτον, ἐπὶ δὲ τῶν τεσσάρων τὸ πέμπτον, ἐπὶ δὲ τῶν πέντε τὸ ἕκτον καὶ αἰεὶ οὕτως, ἵνα ἡ πρόβασις κατὰ τὴν ὀνομασίαν τοιαύτη τις ᾖ· ἐπιδίτριτος, ἐπιτριτέταρτος, ἐπιτετράπεμπος, εἴτα ἐπιπένθεκτος καὶ παραπλησίως ἐπὶ τῶν λοιπῶν.

1.21.3 Αἱ μὲν οὖν τοῦ πρὸς τι ποσοῦ ἀπλαῖ καὶ ἀσύνθετοι σχέσεις αἶδε εἰσὶν αἱ προλεχθεῖσαι, αἱ δὲ σύνθετοι ἐξ αὐτῶν καὶ οἷον συμπλακεῖσαι ἐκ δυοῖν εἰς μίαν εἰσὶν αἶδε, ὧν πρόλογοι μὲν πολλαπλασιεπιμόριος καὶ πολλαπλασιεπιμερὴς, ὑπόλογοι δὲ αἱ εὐθὺς ἐκατέρᾳ τούτων συννυφιστάμεναι, σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ὀνομαζόμεναι, πολλαπλασιεπιμορίῳ μὲν ἢ ὑποπολλαπλασιεπιμόριος, πολλαπλασιεπιμερεῖ δὲ ἢ ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς, καὶ καθ' ὑποδιαίρεσιν τῶν γενῶν αἱ εἰδικαὶ ταῖς εἰδικαῖς ἀνθυπακούσονται, μετὰ τῆς ὑπὸ προθέσεως καὶ αὐταὶ ὀνομαζόμεναι. Πολλαπλασιεπιμόριος μὲν οὖν ἐστὶ σχέσις, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὁ μείζων πλεονάκῃς ἢ ἅπαξ ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ τὸν ἐλάσσονα καὶ πρὸς τούτῳ μορίον τι ἐν αὐτοῦ οἷον δήποτε.

1.22.2 διττῶς δὲ ὥς ἂν δὴ σύνθετος ὁ τοιοῦτος ποικίλλεται κατὰ τὴν τῶν συμπλεκομένων ὀνομάτων καθ' ἑκάτερον ιδιότητα· ἐπεὶ γὰρ ὁ πολλαπλασιεπιμόριος ἔκ τε τοῦ πολλαπλασίου καὶ τοῦ ἐπιμορίου γενικῶς σύγκειται, ἔξει ἐν ταῖς εἰδικαῖς ὑποδιαίρεσεσι ποικιλίαν τινὰ καὶ ἐξαλλαγὴν, ἰδίᾳ μὲν κατὰ τὸ πρότερον μέρος τοῦ ὀνόματος, ἰδίᾳ δὲ κατὰ τὸ δεύτερον, οἷον κατὰ μὲν τὸ πρότερον τὸ τοῦ πολλαπλασίου τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον ἢ τετραπλάσιον ἢ πενταπλάσιον καὶ ἐφεξῆς, κατὰ δὲ τὸ δεύτερον ἀπὸ τοῦ ἐπιμορίου γενικῶς τὰ εἰδικὰ αὐτοῦ εὐτακτα τὸ ἐφημιόλιον, τὸ ἐπίτριτον, τὸ ἐπιτέταρτον, τὸ ἐπίπεμpton καὶ ἐφεξῆς, ὥστε τὴν σύνθεσιν τοιαύτην τινὴ τάξει προχωρεῖν· διπλασιεφήμισις, διπλασιεπίτριτος, διπλασιεπιτέταρτος, διπλασιεπίπεμπος, διπλασιεπίεκτος καὶ ἀνάλογον, καὶ ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς

τριπλασιεφήμις, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος, τριπλασιεπίπεμπτος, καὶ πάλιν ἄνωθεν τετραπλασιεφήμις, τετραπλασιεπίτριτος, τετραπλασιεπιτέταρτος, τετραπλασιεπίπεμπτος, καὶ πάλιν ἄνωθεν πενταπλασιεφήμις, πενταπλασιεπίτριτος, πενταπλασιεπιτέταρτος, πενταπλασιεπίπεμπτος καὶ τὰ τούτοις ἐπ' ἄπειρον ἀναλογοῦντα· ὅσακις μὲν γὰρ ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα ὅλον ἐν ἑαυτῷ ἔχει, παρὰ τὴν τοσαύτην ποσότητα παρονομασθήσεται τὸ πρότερον μέρος τοῦ λόγου τῶν συμπλεκομένων ἐν τῷ πολλαπλασιεπιμορίῳ, οἷον δ' ἂν τὸ μόριον τὸ πρὸς τῷ πολλακίς ὅλῳ ἐνυπάρχον ἐν τῷ μείζονι ἦ, πρὸς ἐκεῖνο παρώνυμον ἔσται τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ λόγου, ἀφ' οὗ σύνθετον τὸ πολλαπλασιεπιμόριον.

1.22.3 ὑποδείγματα δὲ αὐτοῦ· ὁ μὲν τοῦ β διπλασιεφημιόλιος, ὁ δὲ ζ τοῦ γ διπλασιεπίτριτος, ὁ δὲ θ τοῦ δ διπλασιεπιτέταρτος, ὁ δὲ ια τοῦ ε διπλασιεπίπεμπτος· καὶ αἰεὶ οὕτως εὐτάκτους αὐτοὺς γεννήσεις συγκρίνων τοῖς ἀπὸ δυάδος ἐξῆς ἀρτίοις καὶ περισσοῖς τοὺς ἀπὸ πεντάδος καθαρούς, πρῶτον πρῶτῳ, δεύτερον δευτέρῳ, τρίτον τρίτῳ καὶ τοὺς ἄλλους ὁμοταγεῖς τοῖς ὁμοταγέσιν, ἀπὸ δυάδος δὲ τῶν ἐφεξῆς πάντων ἀρτίων οἱ ἀπὸ πεντάδος συνεχεῖς πεντάδι διαφέροντες διπλασιεφημιόλιοι καθαροὶ ἔσσονται ὁμοταγεῖς ὁμοταγῶν, ἀπὸ δὲ τοῦ τρίτου πάντων τῶν τριάδι διαφερόντων ἐκτεθέντων, οἷον γ, ζ, θ, ιβ, ιε, ιη, κα, καὶ ἐν ἄλλῳ στίχῳ τῶν ἀπὸ ἐβδομάδος ἐβδομάδι διαφερόντων ἐπ' ἄπειρον ἐκτεθέντων, οἷον ζ, ιδ, κα, κη, λε, μβ, μθ, καὶ συγκρινομένων μειζόνων ἐλάττοσι, πρώτου πρῶτῳ, δευτέρου δευτέρῳ, τρίτου τρίτῳ, τετάρτου τετάρτῳ, καὶ ἐφεξῆς, τὸ δεύτερον εἶδος ἀναφαίνεται τὸ τῶν διπλασιεπιτρίτων μετὰ τῆς οἰκείας εὐταξίας ἐκκείμενον.

1.22.4 εἴτα πάλιν ἀπ' ἄλλης ἀρχῆς ἂν ἐκτεθῇ ὁ τῶν τετραπλασίων καθαρὸς στίχος, δ, η, ιβ, ις, κ, κδ, κη, λβ, εἴτα παρεκτεθῇ αὐτῷ ἐν ἄλλῳ στίχῳ ὁ ἀπὸ τῆς ἐνάδος ἀρχόμενος κατὰ ἐνάδος προκοπὴν συνεχῆς ἀριθμός, οἷον θ, ιη, κζ, λς, με, νδ, ἔξομεν ἀναφαινόμενον πάλιν τὸν εἰδικὸν πολλαπλασιεπιμόριον, τουτέστι τὸν διπλασιεπιτέταρτον εὐτακτον· καὶ τοῦτο ἐπινοεῖν πάρεστι τῷ βουλομένῳ μέχρις ἀπείρου.

1.22.5 τὸ δὲ ἕτερον εἶδος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ τριπλασιεφημίσιος, οἷον ὁ ζ πρὸς τὸν β καὶ ὁ ιδ πρὸς τὸν δ καὶ ἀπλῶς οἱ καθ' ἐβδομάδα προχωροῦντες πρὸς τοὺς ἀπὸ δυάδος εὐτάκτους ἀρτίους. εἴτα πάλιν ἐξ ὑπαρχῆς ὁ ι πρὸς τὸν γ τριπλασιεπίτριτός ἐστι πρῶτος, ὁ δὲ κ πρὸς τὸν ζ τριπλασιεπίτριτος δεύτερος, καὶ ἀπλῶς οἱ δεκαπλάσιοι ἐφεξῆς πρὸς τοὺς ἐφεξῆς τριπλασίους· ἃ δὴ ἀκριβέστερον κατιδεῖν δυνάμεθα καὶ τρανότερον ἐν τῷ προεπιγνωσθέντι διαγράμματι· πρὸς μὲν γὰρ τὸν πρῶτον στίχον οἱ ἐφεξῆς τάξει συγκείμενοι ὅλοι πρὸς ὅλον τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὐτακτα εἶδη ἐπ' ἄπειρον ὑποδεικνύουσι πρὸς τὸν αὐτὸν αἰεὶ πρῶτον ἅπαντες συγκρινόμενοι, πρὸς δὲ τοὺς ὑπεράνω πάντας ἐφεξῆς εἰς ἕκαστος πρὸς τὸν γείτονα· τῆς ἀρχῆς ἡμῖν ἀπὸ τοῦ δευτέρου γινομένης στίχου πάντα τὰ τοῦ ἐπιμορίου εἶδη κατὰ τὴν οἰκείαν εὐταξίαν γεννᾶται, ἀπὸ δὲ τοῦ τρίτου στίχου πρὸς αὐτόν τε πρῶτον καὶ τοὺς συνεχεῖς αὐτῷ καθ' ἕκαστον οἱ ἀπὸ τοῦ πέμπτου περισσοταγεῖς πάντες ἀντεξεταζόμενοι τὰ τοῦ ἐπιμεροῦς πάντα εἶδη εὐτακτα ὑποδείξουσιν· τοῦ δὲ πολλαπλασιεπιμορίου αἱ συγκρίσεις τάξιν φυσικὴν καὶ ἰδίαν ἔξουσιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ δευτέρου στίχου ἀρχόμενοι τοὺς ἀπὸ τοῦ πέμπτου συγκρίνωμεν ἀριθμούς, πρῶτον πρὸς πρῶτον καὶ δεύτερον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τρίτον καὶ οὕτως ἐξῆς, πρὸς δὲ τὸν τρίτον τοὺς ἀπὸ τοῦ ἐβδόμου, πρὸς δὲ τὸν τέταρτον τοὺς ἀπὸ τοῦ ἐνάτου, καὶ κατὰ τὴν ἀρμόζουσαν εὐταξίαν, μέχρις ἂν εὐτονῇ τις παρέπεσθαι.

1.22.7 δῆλον δέ, ὅτι οἱ ἐλάττονες σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ἀντονομάζονται καὶ ἐνθάδε πρὸς τοὺς μείζονας κατὰ τὰς ἐγκειμένας πᾶσι προσηγορίας. Πολλαπλασιεπιμερὴς δὲ ἐστὶν ἡ λοιπὴ σχέσις τοῦ ἀριθμοῦ· αὕτη τε καὶ ἡ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει ἀντονομαζομένη αὐτῇ ἔστιν, ὅταν ἀριθμὸς τὸν

συγκρινόμενον ἀριθμὸν ὅλον τε ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ πλεονάκεις ἢ ἅπαξ (τουτέστι δις ἢ τρίς ἢ ὅσακισοῦν) καὶ πρὸς τούτῳ μέρη τινὰ αὐτοῦ πλείονα ἐνὸς ἢ β ἢ γ ἢ δ ἢ ε καὶ ἐφεξῆς.

1.23.2 ταῦτα δὲ οὐκ ἔστι μὲν ἡμίση διὰ τὰ προλεχθέντα ἦτοι δὲ τρίτα ἢ τέταρτα ἢ πέμπτα καὶ κατὰ τὴν ὁμοίαν ἀκολουθίαν.

1.23.3 οὐ χαλεπὸν δὲ ἐκ τῶν προφρασθέντων νοῆσαι καὶ τὰ τούτου εἶδη, ὡς ὁμοίως καὶ ἀπαραλλάκτως τοῖς πρὸ αὐτοῦ ποικίλλεται, διπλασιεπιδιμερῆς, εἴτα διπλασιεπιτριμερῆς, εἴτα διπλασιεπιτετραμερῆς, καὶ ἀνάλογον· οἷον ὁ μὲν η τοῦ γ διπλασιεπιδιμερῆς καὶ ὁ ις τοῦ ζ διπλασιεπιδιμερῆς καὶ καθόλου οἱ ἀπὸ ὀγδοάδος ὀγδοάδι διαφέροντες τῶν ἀπὸ τριάδος τριάδι διαφερόντων, ὁμοταγεῖς ὁμοταγῶν, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν δύναται ἄν τις ἀκολουθῶν τοῖς προειρημένοις εὐρίσκειν τὴν εὐταξίαν· κἀνταῦθα δὲ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει νοητέον προιοῦσαν καὶ συμμεταβαλλομένην τὴν τοῦ συγκρινομένου ἀντονομασίαν. Καὶ οὕτως αἱ δέκα ἀριθμητικαὶ σχέσεις πέρας ἡμῖν τῆς θεωρίας, ὡς ἐν πρώτῃ λαμβάνουσιν εἰσαγωγῇ· ἔστι δὲ τις γλαφυρωτέρα ἔφοδος καὶ ἀναγκαιοτάτῃ πρὸς πᾶσαν τὴν τῶν ὅλων φυσιολογίαν, ἣτις ἡμῖν σαφέστατα καὶ ἀναμφιλέκτως παρίστησιν, ὅτι πρῶτον μὲν τὸ καλὸν καὶ ὠρισμένον καὶ ὑπὸ ἐπιστήμην πίπτον φύσει προγενέστερον τοῦ ἀορίστου καὶ ἀπεριλήπτου καὶ αἰσχροῦ, εἴτα ὅτι καὶ τὰ τοῦ ἀπείρου καὶ ἀορίστου μέρη καὶ εἶδη ὑπ' ἐκείνου μορφοῦται καὶ περαίνεται καὶ τοῦ προσήκοντος κόσμου καὶ εὐταξίας τυγχάνει καὶ ὥσπερ ὑπὸ σφραγιστῆρός τινος ἢ μέτρου πάντα τὰ ἐμπίπτοντα μεταλαμβάνει τῆς ὁμοιότητος καὶ ὁμωνυμίας· οὕτω γὰρ εὐλόγως καὶ τὸ τῆς ψυχῆς λογικὸν τοῦ ἀλόγου κοσμητικὸν ἔσται καὶ ὁ θυμὸς καὶ ἡ ἐπιθυμία ἐν τοῖς τῆς ἀνισότητος δυσὶν εἶδεσι τεταγμένα ὑπὸ τοῦ διανοητικοῦ εὐτακτηθήσονται ὡς ὑπὸ τινος ἰσότητος καὶ ταυτότητος.

1.23.5 ἐκ δὲ τῆς ἀπισώσεως ταύτης ὀρθῶς ἡμῖν ἀποβήσονται αἱ λεγόμεναι ἠθικαὶ ἀρεταί, σωφροσύνη, ἀνδρεία, πραότης, ἐγκράτεια, καρτερία καὶ αἱ ὅμοιαι. Φέρε οὖν ἐπισκεψώμεθα, ποταπὸν τὸ εἰς τὰ φυσικὰ ταῦτα συντεῖνον θεώρημα· ἔστι δὲ ἀποδεικτικὸν τοῦ ἀπ' ἰσότητος μονωτάτης καὶ πρωτίστης οἷον μητρός τινος καὶ ρίζης γεννᾶσθαι πάντα τὰ τῆς ἀνισότητος ποικίλα εἶδη καὶ εἰδῶν διαφοράς.

1.23.7 προκείσθωσαν γὰρ ἡμῖν ἐν τρισὶν ὅροις ἴσοί τινες ἀριθμοί, πρῶτον μὲν μονάδες, εἴτα дуάδες ἐν ἄλλοις τρισὶν, εἴτα τριάδες, καὶ ἐξῆς τετράδες, ἔπειτα πεντάδες, καὶ τοῦτο μέχρι οὗ βούλει· οὕτω γὰρ τῆς τούτων ἐκθέσεως θείω τινὶ καὶ οὐκ ἀνθρωπίνῳ λόγῳ, ἀλλ' ἀπὸ φύσεως αὐτῆς γεγονυίας πρῶτοι μὲν γενήσονται πολλαπλάσιοι, καὶ τούτων αὐτῶν ἡγήσεται μὲν διπλάσιος, μετ' αὐτὸν δὲ τριπλάσιος, ἐπὶ δὲ τούτῳ τετραπλάσιος, εἴτα πενταπλάσιος, καὶ κατὰ τὴν προεπιγνωσθεῖσαν ἡμῖν τάξιν ἐπ' ἄπειρον· δευτέρος δὲ ἐπιμόριος, καὶ τούτου πάλιν ἡγήσεται τὸ πρῶτιστον εἶδος ἡμιόλιος, ἐπὶ τούτῳ δὲ τὸ μετ' αὐτὸ ἐπίτριτος, ἐπὶ δὲ τούτοις ὁ τάξει ἐξῆς ἐπιτέταρτος καὶ ἐπίπεμπτος καὶ ἔφεκτος καὶ ἀνάλογον ἐπ' ἄπειρον· τρίτον δὲ τὸ ἐπιμερές, καὶ πάλιν αὐτοῦ τούτου ἐπιδιμερές μὲν ἡγήσεται, ἔπειτα δ' εὐθὺς ἐπὶ τούτῳ τὸ ἐπιτριμερές, εἴτα τὸ ἐπιτετραμερές, καὶ εὐθὺς τὸ ἐπιπενταμερές, καὶ μέχρις ἂν προχωρῇ τις ἀκολουθῶς τοῖς ἔμπροσθεν.

1.23.8 προστάγματα οὖν τινὰ δεῖ ἔχειν οἷον νόμους φυσικοὺς ἀπαρεγκλίτους καὶ ἀπαραβάτους, οἷς πᾶσα ἢ προλεχθεῖσα πρόβασις καὶ προχώρησις ἀπὸ τῆς ἰσότητος εὐοδώσει μὴ λειποτακτουμένη· τὰ δὲ προστάγματα ταῦτά ἐστι, πρῶτον πρῶτῳ ἴσον ποιῆσαι, δευτέρον δὲ πρῶτῳ ἅμα καὶ δευτέρῳ, τρίτον δὲ πρῶτῳ καὶ δυσὶ δευτέροις ἅμα καὶ τρίτῳ· γένοιτο γὰρ μετὰ τούτων τῶν νόμων πλάσσοντί σοι εὐθὺς μὲν τὰ τοῦ πολλαπλασίου ἅπαντα εἶδη τάξει ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος τριῶν ἐκκειμένων ὅρων οἷον βλαστάνοντα καὶ ἐκφυόμενα, σοῦ μὴδὲν ἐπιτηδεύοντος μὴδὲ συλλαμβάνοντος· καὶ ἐκ μὲν ἰσότητος εὐθὺς τὸ διπλάσιον, ἐκ δὲ διπλασίου εὐθὺς τὸ

τριπλάσιον, ἐκ δὲ τριπλασίου ἐξῆς τὸ τετραπλάσιον καὶ ἐκ τούτου τὸ πενταπλάσιον εὐτάκτως καὶ τοῦτο μέχρις αἰί.

- 1.23.9 ἐκ δὲ αὐτῶν τούτων τῶν εὐτάκτως πολλαπλασίων ἀναστραφέντων εὐθὺς γεννῶνται φύσει τινὶ ἀναγκαίᾳ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν προσταγμάτων οἱ ἐπιμόριοι, καὶ οὗτοι οὐχ ὥς ἔτυχεν οὐδὲ ἀτάκτως, ἀλλὰ τῇ προσηκούσῃ ἀκολουθίᾳ· ἐκ μὲν τοῦ πρώτου διπλασίου ἀναστραφέντος ὁ πρῶτος ἡμιόλιος, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τριπλασίου ὁ ἐν ἐκείνοις δεύτερος ἐπίτριτος, εἴτα ἐπιτέταρτος ἐκ τετραπλασίου, καὶ ἀπλῶς ἕκαστος ἀπ' ἐκείνου, ὃ παρώνυμός ἐστιν.
- 1.23.10 ἀπὸ δὲ ἄλλης ἀρχῆς αὐτῶν τῶν ἐπιμορίων ἐκκειμένων, ὥσπερ καὶ ἀνεφύησαν, ἀναστρόφως μέντοι, γεννῶνται οἱ φύσει μετ' αὐτοὺς ἐπιμερεῖς ἀπὸ μὲν τοῦ ἡμιολίου ἐπιδιμερῆς, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου ἐπιτριμερῆς καὶ ἐπιτετραμερῆς ἐκ τοῦ ἐπιτετάρτου καὶ ἐπ' ἄπειρον τῇ αὐτῇ ἀναλογίᾳ.
- 1.23.11 μὴ ἀναστρεφομένων δέ, ἀλλ' ὀρθῶς ἐκκειμένων τῶν εὐτάκτων ἐπιμορίων γεννῶνται διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων οἱ πολλαπλασιεπιμόριοι· διπλασιεφήμισυς μὲν ἐκ τοῦ πρώτου ἡμιολίου, διπλασιεπίτριτος δὲ ἐκ τοῦ δευτέρου ἐπιτρίτου, διπλασιεπιτέταρτος δὲ ἐκ τοῦ τρίτου ἐπιτετάρτου, καὶ αἰὶ οὕτως.
- 1.23.12 ἐκ δὲ τῶν ἐξ ἀναστροφῆς τῶν ἐπιμορίων γεννηθέντων, τουτέστι τῶν ἐπιμερῶν, καὶ τῶν μὴ ἐξ ἀναστροφῆς, τουτέστι πολλαπλασιεπιμορίων, πάλιν τῷ αὐτῷ τρόπῳ διὰ τῶν αὐτῶν προσταγμάτων ἀπογεννῶνται ὀρθῶς τε κειμένων καὶ ἀναστρεφομένων οἱ τὰς λοιπὰς σχέσεις ἐμφαίνοντες ἀριθμοί.
- 1.23.13 πάντων δὲ τῶν προειρημένων, γενέσεώς τε αὐτῶν καὶ τάξεως, ὀρθότητός τε καὶ ἀναστροφῆς ὑποδείγματα ἀρκείτω ἡμῖν πρὸς ὑπόμνησιν τὰ τοσαῦτα.
- 1.23.14 ἐκ μὲν τῆς ἐν ἡμιολίοις σχέσεως καὶ ἀναλογίας ἀνεστραμμένης ἐκ τοῦ μείζονος ὅρου συνίσταται σχέσις ἐν ἐπιμερέσι λόγοις ἐπιδίτριτος, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐλάττονος κειμένης ὀρθῶς πολλαπλασιεπιμόριος ἦτοι διπλασιεφήμισυς, ὡς ἀπὸ τοῦ θ, ζ, δ ἦτοι θ, ιε, κε ἢ δ, ι, κε· ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτρίτοις ἀπὸ μὲν τοῦ μείζονος ἐπιμερῆς ἦτοι τρισεπιτέταρτος, ἀπὸ δὲ τοῦ ἐλάσσονος διπλασιεπίτριτος, ὡς ἐκ τοῦ ις, ιβ, θ ἦτοι ις, κη, μθ ἢ θ, κα, μθ· ἐκ δὲ τῆς ἐν ἐπιτετάρτοις ἀπὸ μὲν τοῦ ὑπερέχοντος ἐπιμερῆς ἦτοι τετρακισεπίπεμπος, ἐκ δὲ τοῦ ἐλάττονος πολλαπλασιεπιμόριος ἦτοι διπλασιεπιτέταρτος, ὡς ἐκ τοῦ κε, κ, ις ἦτοι κε, με, πα ἢ ις, λς, πα. ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν διαζευχθειῶν καὶ ἀφ' ἧς ἀμφότεραι, ὁ μὲν ἔσχατος τετράγωνος ὁ αὐτὸς μένει, ὁ δὲ πρῶτος εἰς τὸν ἐλάττονα μεταβαίνει, πάντως δὲ οἱ ἄκροι τετράγωνοι.
- 1.23.16 ἀλλὰ μὴν καὶ ἐτέρως ἐκ τῶν ἐπιμερῶν οἱ πολλαπλασιεπιμερεῖς καὶ ἑτερογενεῖς ἐπιμερεῖς ἀναφαίνονται, οἷον ἐκ μὲν τῆς δισεπιτρίτου ἀπὸ μὲν τοῦ ἐλάττονος ὅρου ἡ διπλασία καὶ δισεπίτριτος· ἐκ δὲ τοῦ μείζονος ἡ τρισεπίπεμπος, ὡς ἐκ τοῦ θ, ιε, κε ἦτοι θ, κδ, ξδ ἢ κε, μ, ξδ· ἐκ δὲ τῆς τρισεπιτετάρτου ἐκ μὲν τοῦ μικροτέρου ἡ διπλασία καὶ τρισεπιτέταρτος, ἐκ δὲ τοῦ μείζονος ἡ τετρακισεφέβδομος, ὡς ἐπὶ τοῦ ις, κη, μθ ἦτοι ις, μδ, ρκα ἢ μθ, οζ, ρκα. πάλιν δὲ ἐκ τῆς τετρακισεπιπέμπτου, οἷον τῆς κε, με, πα, ἀπὸ μὲν τοῦ ἐλάσσονος ἡ διπλασία καὶ τετρακισεπίπεμπος ἐν τοῖς κε, ο, ρς, ἀπὸ δὲ τοῦ μείζονος πάλιν ἐπιμερῆς ἢ πεντακισεπένατος ὡς ἐν τοῖς πα, ρκς, ρς, καὶ κατὰ τὰ ἐξῆς ἐπ' ἄπειρον ἀνάλογα καὶ εὐάρμοστα εὐρήσεις.
- 2.1 ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ ΓΕΡΑΣΗΝΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΕΙΣ ΔΥΟ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. Ἐπειδὴ στοιχεῖον λέγεται καὶ ἔστιν, ἐξ οὗ ἐλαχίστου συνίσταται τι καὶ εἰς ὃ ἐλάχιστον ἀναλύεται (οἷον γράμματα μὲν τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς στοιχεῖα λέγεται, ἐξ αὐτῶν τε γὰρ ἡ σύστασις τῆς συμπάσης ἐνάρθρου φωνῆς καὶ εἰς αὐτὰ ἔσχατα ἀναλύεται· φθόγγοι δὲ μελωδίας ἀπάσης, ἀφ' ὧν ἄρχεται συγκρίνεσθαι καὶ εἰς οὓς ἀναλύεται· κοινῇ δὲ τοῦ κόσμου τὰ λεγόμενα τέσσαρα στοιχεῖα ἀπλᾶ ὑπάρχει σώματα, πῦρ, ὕδωρ, ἀήρ, γῆ· ἐκ γὰρ πρωτίστων αὐτῶν ἡ σύστασις τοῦ παντὸς φυσιολογεῖται καὶ εἰς αὐτὰ ἔσχατα ἐπινοεῖται ἢ ἀνάλυσιν),

ἀποδειξαι δὲ βουλόμεθα, ὅτι καὶ ἡ ἰσότης στοιχεῖον ἐστὶ τοῦ πρὸς τι ποσοῦ· τοῦ γὰρ ἀπλῶς καὶ καθ' αὐτὸ ποσοῦ μονὰς ἦν καὶ δυὰς τὰ ἀρχικώτατα στοιχεῖα, ἐξ ὧν ἐλαχίστων καὶ ἐπ' ἄπειρον αἰεὶ συνίσταται καὶ αὖξεται καὶ ἐπὶ τὸ μείον ἀναλυόμενον ἴσταται.

- 2.1.2 ἀλλὰ τὴν μὲν ἐπὶ τῆς ἀνισότητος προκοπὴν καὶ ἐπαύξησιν ἀπεδείξαμεν ἀπὸ ἰσότητος γινομένην ἐπὶ πάσας ἀπλῶς τὰς σχέσεις μετὰ τινος εὐταξίας διὰ τριῶν προσταγμάτων· λοιπὸν δ', ἴν' ὡς ἀληθῶς στοιχεῖον ἦ, ἀποδεικνύειν, ὅτι καὶ αἱ ἀναλύσεις ἐπ' αὐτὴν ἐσχάτην περαιούνται· ἔφοδον ἰστέον τοιαύτην καθολικὴν. Δοθέντων σοι τριῶν ὅρων ἐν ἡτινιοῦν σχέσει καὶ ἀναλογίᾳ, εἴτε πολλαπλασίῳ εἴτε ἐπιμορίῳ εἴτε ἐπιμερεῖ εἴτε συνθέτῳ ἀπὸ τούτων πολλαπλασιεπιμορίῳ ἢ τοι πολλαπλασιεπιμερεῖ, μόνον ἵνα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα θεωρῆται, ἐν ᾧ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον ἢ ἀνάπαλιν, αἰεὶ τὸν ἐλάττονα ἀφαίρει ἀπὸ τοῦ μέσου, ἐάν τε πρῶτος ἢ κείμενος ἐάν τε ἔσχατος, καὶ τίθει αὐτὸν μὲν τὸν ἐλάσσονα πρῶτον ὅρον, τὸ δὲ λειφθὲν ἀπὸ τοῦ δευτέρου μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν δεύτερον τάσσει ὅρον, ἐνὸς δὲ τοιούτου πρῶτου καὶ δύο τοιούτων δευτέρων ἀφαιρεθέντων ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, τουτέστιν ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν δοθέντων σοι, τὸ λειπόμενον ποιεῖ τρίτον ὅρον καὶ ἔσσονται αἱ γινόμεναι ἐν ἄλλῃ τινὶ σχέσει προγενεστέρα κατὰ φύσιν.
- 2.2.2 πάλιν δὲ ἀπ' αὐτῶν τούτων τῷ αὐτῷ τρόπῳ ἂν ἀφέλῃς ὅρου τὸ λειπόμενον, οἱ τρεῖς ὅροι ἀναπεποδισμένοι σοι εὐρεθήσονται εἰς πυθμενικωτέρους ἄλλους τρεῖς, καὶ τοῦτο αἰεὶ ἀκόλουθον εὐρήσεις γινόμενον, μέχρις ἂν εἰς ἰσότητα ἀναχθῶσιν· ἐξ οὗ πᾶσα ἀνάγκη δηλονότι ἀποφαίνεσθαι, τὴν ἰσότητα τοῦ πρὸς τι ποσοῦ στοιχεῖον πάντως εἶναι.
- 2.2.3 παρέπεται δὲ τῇ τοιαύτῃ θεωρίᾳ ἐμμουσότατόν τι θεώρημα καὶ χρησιμώτατον εἷς τε τὴν Πλατωνικὴν ψυχογονίαν καὶ εἰς τὰ ἀρμονικὰ διαστήματα πάντα· κελεύομεθα γὰρ ἐκεῖ πυκνῶς λόγου χάριν ἀποστῆσαι ἐφεξῆς δύο ἡμιολίους λόγους ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας ἢ πέντε ἢ ἐπ' ἄπειρον ἢ δύο ἐπιτρίτους ἢ ἐπιτετάρτους ἢ ἐπογδούς ἢ οἷους δήποτε ἐπιμορίους καὶ καθ' ἕκαστον αὐτῶν ἢ τρεῖς ἢ τέσσαρας ἢ πέντε ἢ μέχρις ὅσων τις προστάσσει.
- 2.2.4 εὐλογον δὲ ἐστὶ, μὴ ἰδιωτικῶς καὶ ἀνεπιστημόνως, ἔστι δὲ ὅτε καὶ διημαρτημένως τὸ τοιοῦτον ποιεῖν, ἀλλ' ἐντέχνως τε καὶ ἀπταιστώς καὶ τάχιστα ἐφόδῳ τοιαύτῃ. Ἄπας πολλαπλάσιος τοσοῦτων ἐπιμορίων ἡγήσεται λόγων ἀντιπαρωνύμων αὐτῷ; ὁπόστος ἂν αὐτὸς ὢν τυγχάνῃ ἀπὸ μονάδος, οὔτε δὲ πλειόνων οὔτε ἐλαττόνων οὐδεμιᾶ μηχανῇ.
- 2.3.2 διπλάσιοι μὲν οὖν ἡμιολίους φύσουσιν, ὁ πρῶτος ἕνα, ὁ δεύτερος δύο, ὁ τρίτος τρεῖς, ὁ τέταρτος τέσσαρας, ὁ πέμπτος πέντε, ὁ ἕκτος ἕξ καὶ οὔτε πλείονας οὔτε ἐλάττονας, ἀλλ' ἐξ ἀνάγκης πάσης, ὅταν τὴν σύμμετρον ποσότητα ἀπολάβωσιν οἱ γεννηθέντες ἐπιμόριοι ἰσάριθμοι γενόμενοι τοῖς γεννήσασιν πολλαπλασίους, τότε δὴ ἕκ τινος δαιμονίας μηχανῆς εὐρίσκεται ὁ πάντας περαίνων ἀριθμὸς ἀνεπίδεκτος ὢν φύσει ἐκείνου τοῦ μορίου, καθ' ὃ προέκοπτον οἱ ἐπιμόριοι· ἀπὸ δὲ τῶν τριπλασίων οἱ ἐπίτριτοι πάντες προκόψουσι καὶ αὐτοὶ ἰσάριθμοι τοῖς γεννῶσιν οἱ γεννώμενοι καὶ περαιούμενοί γε μετὰ τὴν αὐτάρκειαν τῆς προκοπῆς εἰς ἀριθμοὺς μὴ ἐπιδεκτικούς τρίτου· καὶ ἐπιτέταρτοι δὲ κατὰ ταυτὸν ἐκ τετραπλασίων ἐπικορύφωσιν λαμβάνοντες ἀριθμὸν μετὰ τὴν αὐτάρκη πρόβασιν τετάρτου μὴ ἐπιδεκτικόν.
- 2.3.3 οἷον διπλασίων μὲν ὑποδείγματος χάριν ἰσαρίθμους γεννώντων ἡμιολίους ὁ μὲν ἄνω στίχος ἔσται πολλαπλασίων ὁ πρῶτος α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ· ἐπεὶ δὲ πρῶτός ἐστιν ὁ β μετὰ τὴν μονάδα, ἐνὸς κατάρξει οὗτος ἡμιολίου μόνου τοῦ γ, ὅστις ἡμίσεος ἐπιδεκτικὸς οὐκ ἔστιν, ἵνα καὶ ἄλλος αὐτοῦ γέννηται ἡμιολίος· ὁ πρῶτος ἄρα διπλάσιος ἐνὸς μόνου γεννητικὸς ἐστὶν ἡμιολίου, ὁ δὲ δεύτερος ὁ δ δυνεῖν γεννητικὸς ἡμιολίων, αὐτοῦ μὲν γὰρ ὁ ζ, τοῦ δὲ ζ ὁ θ, τοῦ δὲ θ οὐκ ἔστιν ἄλλος, ἡμισυ γὰρ οὐκ ἔχει· ὁ δὲ η τρίτος ὢν διπλάσιος τριῶν ἡμιολίων ἔσται πατήρ, ἐνὸς μὲν

τοῦ ιβ πρὸς αὐτόν, ἑτέρου δὲ τοῦ ιη πρὸς τὸν ιβ, τρίτου δὲ τοῦ κζ πρὸς τὸν ιη, τετάρτου δὲ οὐκέτι διὰ τὸ καθολικόν, ὁ γὰρ κζ ἡμισυ οὐκέτι ἐπιδέχεται· ὁ δὲ ις τέταρτος ὧν διπλάσιος τεσσάρων ἡγήσεται ἡμιολίων, τοῦ τε κδ, τοῦ λς, τοῦ νδ καὶ τοῦ πα τελευταίου, ἵνα ἰσάριθμοι ἀναγκαίως ὥσι τοῖς γεννήσασιν, ὁ γὰρ πα οὐκέτι ἡμισυ φύσει ἐπιδέχεται· καὶ τοῦτο μέχρις ἀπείρου προίων ἀνάλογον εὐρήσεις.

- 2.3.4 οἷον ὑποδείξω ἕνεκα γεγράφθω οὕτως διπλασίου διάγραμμα· Τριπλασίου δὲ ὑπόδειγμα παραπλήσιον διαγράφειν δεῖ· ἐν ᾧ κατὰ ταυτὰ ὁψόμεθα τὸν μὲν πρῶτον τὸν γ ἐνὸς μόνου ἐπιτρίτου ἡγούμενον λόγου τοῦ δ πρὸς αὐτόν, ὅστις ἀποκλείει εὐθὺς ἑτέρου γένεσιν ὁμοίου· τρίτον γὰρ οὐκ ἐπιδέχεται ὁ δ, οὐκ ἄρα οὐδ' ἐπίτритον ἔξει· δεύτερος δὲ τριπλάσιός ἐστιν ὁ θ, διὰ τοῦτο δυεῖν μόνων ἐπιτρίτων κατάρξει λόγων τοῦ τε ιβ πρὸς αὐτόν καὶ τοῦ ις πρὸς τὸν ιβ· ὁ δὲ ις ἀνακόπτει τὴν πρόβασιν λοιπόν, τρίτου γὰρ οὐκ ἔστιν ἐπιδεκτικός, διόπερ οὐδὲ ἐπίτритόν τινα ἔχει ἐν ἑαυτῷ.
- 2.4.2 ἐξῆς δὲ τέτακται τριπλάσιος ὁ κζ ἐν τρίτῃ ἀπὸ μονάδος χώρα τριπλασίων προχωρούντων α, γ, θ, κζ· διὰ τοῦτο τριῶν μόνων κατάρξει καὶ αὐτὸς ἐπιτρίτων λόγων, πλειόνων δὲ οὐδαμῶς αὐτοῦ μὲν γὰρ πρῶτος ὁ λς, τούτου δὲ δεύτερος ὁ μη, τρίτος δὲ τούτου ὁ ξδ, ὃς οὐκέτι τρίτον μέρος ἔχει, διὸ οὐδ' ἐπιτρίτου δεκτικός, καὶ ὁ τέταρτος τεσσάρων ἡγεμών ἐστι λόγων καὶ ὁ πέμπτος δηλονότι πέντε.
- 2.4.3 τὸ δὲ ὑπόδειγμα τοιοῦτον· καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δὲ πολυπλασίων ὁ αὐτὸς τῶν διαγραμμάτων ἔστω σοι τρόπος παρατηροῦντι, ὅτι καὶ ἐνταῦθα ἡ φύσις, ὥσπερ καὶ ἐν τοῖς προτεχνολογηθεῖσιν εὖρομεν, προγενεστεροὺς ἡμῖν παρεμφαίνει διπλασίου μὲν τριπλασίων, τριπλασίου δὲ τετραπλασίων, τούτους δὲ πενταπλασίων, καὶ αἰεὶ οὕτως μέχρι παντός· οἱ μὲν γὰρ ἐπὶ πλάτος στίχοι οἱ ἀνωτάτω, ἐὰν ὥσι διπλάσιοι, ὁμοίως ἔξουσιν τοὺς ὑπ' αὐτοῦς παραλλήλους κειμένους, τοὺς δὲ ὑποτείνοντας διαγωνίους τοῦ αὐτοῦ γένους τὸ συνεχὲς καὶ μονάδι μεῖζον εἶδος, ὃ ἐστὶ τριπλασίους, ἐν παραλλήλῳ ἐξετάσει θεωρουμένους· εἰ δ' οἱ ἐπὶ πλάτος εἶεν τριπλάσιοι, πάντως οἱ διαγώνιοι ἔσσονται τετραπλάσιοι, εἰ δὲ ἐκεῖνοι τετραπλάσιοι, εὐθὺς οὗτοι πενταπλάσιοι, καὶ τοῦτο μέχρις αἰεί. Λοιπὸν δεῖ, σαφηνίσαντας τὰς τῶν λόγων συνθέσεις, τίνων ἑτέρων ἀποδοτικαὶ εἰσι, μεταβῆναι ἐπὶ τὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἀκόλουθα.
- 2.5.2 οἱ πρῶτοι τοίνυν τοῦ ἐπιμορίου δύο λόγοι συλληφθέντες εἰς τὸ αὐτὸ γεννῶσι τὸν τοῦ πολλαπλασίου πρῶτον λόγον, τουτέστι τὸν διπλάσιον· πᾶς γὰρ διπλάσιος σύστημα ἔσται ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου καὶ πᾶς ἡμιόλιος καὶ ἐπίτритος συντεθέντες ἀποδοτικοὶ ἐνὸς διπλασίου πάντως ἔσσονται· οἷον ἐπεὶ ὁ γ ἡμιόλιος τοῦ β, ὁ δὲ δ ἐπίτритος τοῦ γ, ἔσται τοῦ β ὁ δ διπλάσιος σύνθετος ὧν ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου· ἄλλιν ἐπεὶ ὁ ζ διπλάσιός ἐστι τοῦ γ, εὐρήσομεν ἀνὰ μέσον αὐτῶν ἀριθμόν τινα τεταγμένον, ὃς ἐξ ἀνάγκης πρὸς μὲν τὸν ἕτερον τὸν ἐπίτритον σώζει λόγον, πρὸς δὲ τὸν λοιπὸν τὸν ἡμιόλιον· ὁ γοῦν δ ἀνὰ μέσον κείμενος τοῦ ζ καὶ τοῦ γ πρὸς μὲν τὸν γ ἀποδίδωσι λόγον ἐπίτритον, πρὸς δὲ τὸν ζ τὸν ἡμιόλιον.
- 2.5.3 ὁρθῶς ἄρα ἐλέχθη, διαλυόμενον μὲν τὸν διπλάσιον εἰς ἡμιόλιον καὶ ἐπίτритον διαλύεσθαι, συντιθεμένων δὲ πάντως ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου μόνον συνίστασθαι διπλάσιον καὶ τὰ τοῦ ἐπιμορίου δύο πρῶτιστα εἶδη συντεθέντα ποιητικὰ εἶναι τοῦ τῶν πολλαπλασίων πρωτίστου εἶδους.
- 2.5.4 ἄλλιν δὲ ἐξ ἄλλης ἀρχῆς τὸ γεννηθὲν τοῦτο τοῦ πολλαπλασίου πρωτίστον εἶδος μετὰ τοῦ πρώτου τῶν ἐπιμορίων εἶδους ἀποδοτικὸν γίνεται τοῦ ὁμογενοῦς αὐτῶν συνεχοῦς εἶδους, τουτέστι τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, ὅπερ ἐστὶ τριπλασίου· ἐκ γὰρ παντὸς διπλασίου καὶ ἡμιολίου συντεθέντων τριπλασίον ἐξ ἀνάγκης φύεται· οἷον ἐπεὶ τοῦ ζ διπλάσιος ὁ ιβ, αὐτοῦ δὲ τούτου ἡμιόλιος ὁ ιη, εὐθὺς καὶ τριπλάσιος ὁ ιη τοῦ ζ· καὶ ἑτέρῳ τρόπῳ ἐὰν μὴ τὸν ιβ θέλω

μέσον ποιεῖν, ἀλλὰ μᾶλλον τὸν τοῦ ζ ἡμιόλιον τὸν θ, τὸ αὐτό μοι ἀπαράλλακτον καὶ σύμφωνον συμβήσεται· τοῦ γὰρ θ ὁ ιη διπλάσιος ὢν τὸν τριπλάσιον λόγον σώσει πρὸς τὸν ζ· ἐξ ἡμιολίου ἄρα καὶ διπλασίου πρώτων εἰδῶν ἐπιμορίου καὶ πολλαπλασίου συνίσταται μιγέντων τὸ δεύτερον εἶδος τοῦ πολλαπλασίου τὸ τριπλάσιον καὶ εἰς αὐτὰ δὲ πάντως ἀναλύεται.

2.5.5 ἰδοὺ γὰρ ὁ ζ τοῦ β τριπλάσιος ὢν ἔξει μέσον τὸν γ, ὃς δύο λόγους παραδείξει, τὸν μὲν ἡμιόλιον πρὸς τὸν β, πρὸς ἑαυτὸν δὲ διπλάσιον τὸν τοῦ ζ· ἐὰν δὲ καὶ ὁ τριπλάσιος οὗτος δεύτερον εἶδος ὢν τοῦ πολλαπλασίου συντεθῇ ἐπιτρίτῳ δευτέρῳ εἶδει ὄντι τοῦ ἐπιμορίου γένοιτ' ἂν ἐξ ἀμφοτέρων τὸ συνεχές τοῦ πολλαπλασίου εἶδος, τουτέστι τὸ τετραπλάσιον, ὃ καὶ ἀναγκαίως εἰς ἀμφοτέρα ἀναλυθήσεται κατὰ τὴν αὐτὴν τοῖς προδεδηλωμένοις φύσιν· τὸ δὲ τετραπλάσιον προσλαβὼν τὸ ἐπιτέταρτον ποιητικὸν ἔσται τοῦ πενταπλασίου καὶ πάλιν ἐκεῖνο σὺν τῷ ἐπιπέμπτῳ τοῦ ἑξαπλασίου, καὶ τοῦτο μέχρι παντός, ἵνα εὐτακτοὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς πολλαπλασίοι μετὰ εὐτάκτων τῶν ἐξ ἀρχῆς ἐπιμορίων ἀποδοτικοὶ εὐρίσκωνται τῶν ἐπὶ τὸ μείζον συνεχῶν πολλαπλασίων· διπλάσιος μὲν γὰρ μεθ' ἡμιολίου τριπλασιότητος ποιητικός, τριπλάσιος δὲ μετ' ἐπιτρίτου τετραπλασιότητος, τετραπλάσιος δὲ μετ' ἐπιτετάρτου πενταπλασιότητος καί, ἕως προχωρεῖν θέλεις, οὐδὲν ὑπεναντίον σοι συμβαῖνον φανεῖται. Μέχρι μὲν οὖν τοῦδε ἱκανῶς περὶ τοῦ πρὸς ἕτερόν πως ἔχοντος ποσοῦ διειλέγμεθα συμμετρησάμενοι κατ' ἐκλογὴν τὰ προσήκοντα καὶ εὐπερίληπτα τῇ τῶν ἄρτι εἰσαγομένων ἔξει· τὰ γὰρ εἰς τὸν τόπον τοῦτον ὑπόλοιπα προσπληρωθήσεται διαλιπόντων πάλιν ἡμῶν καὶ προτεχνολογησάντων ἕτερά τινα προϋργιαιτέραν τὴν σκέψιν ἔχοντα ἐκ τῶν συμβεβηκότων τῷ καθ' αὐτὸ ποσῷ καὶ μὴ τῷ πρὸς ἕτερόν πως ἔχοντι, αἰεὶ γὰρ δι' ἀλλήλων φιλεῖ πως διαρθροῦσθαι καὶ σαφηνίζεσθαι τὰ ἐν τοῖς μαθήμασι θεωρήματα· ἃ δὲ χρή προεπισκοπεῖν καὶ προθεάσασθαι, ἔστι περὶ τε γραμμικῶν ἀριθμῶν καὶ ἐπιπέδων καὶ στερεῶν, κυβικῶν τε καὶ σφαιρικῶν, καὶ ἰσοπλεύρων καὶ σκαληνῶν, πλινθίδων τε καὶ δοκίδων καὶ σφηνίσκων καὶ τῶν ὁμοίων, ἃ δὴ ἰδίως μὲν ἐν τῇ γεωμετρικῇ παραδίδονται εἰσαγωγῇ τοῦ πηλίκου οἰκειότερα ὄντα, σπερματικώτερον δὲ προσπαραλαμβάνεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ὥσάν μητρὶ καὶ ἀρχεγονωτέρα ἐκείνης· μεμνήμεθα γάρ, ὅτι πρὸ βραχέος τοιαύτη ἡμῖν ἐφάνη συναναιρουῖσα μὲν τὰς ἄλλας ἐπιστήμας ἑαυτῇ, οὐ συναναιρουμένη δὲ ἐκείναις, καὶ ἔμπαλιν συνεπιφερομένη μὲν ἐκείναις ἀναγκαίως, οὐ συνεπιφέρουσα δὲ αὐτὰς ἑαυτῇ.

2.6.2 Πρότερον δὲ ἐπιγνωστέον, ὅτι ἕκαστον γράμμα, ᾧ σημειούμεθα ἀριθμόν, οἷον τὸ ι, ᾧ τὰ δέκα, τὸ κ, ᾧ τὰ εἴκοσι, τὸ ω, ᾧ τὰ ὀκτακόσια, νόμῳ καὶ συνθήματι ἀνθρωπίνῳ, ἀλλ' οὐ φύσει σημαντικόν ἐστι τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ φυσικὴ καὶ ἀμέθοδος καὶ διὰ τοῦτο ἀπλουστάτη σημείωσις τῶν ἀριθμῶν εἴη ἂν ἡ τῶν μονάδων τῶν ἐν ἐκάστῳ οὐσῶν παράλληλος ἕκθεσις· οἷον μιᾶς μὲν μονάδος γραφὴ διὰ τοῦ ἐνὸς ἄλφα σημεῖον ἔσται τοῦ ἐνός, δυεῖν δὲ μονάδων παραλλήλων, τουτέστι δυεῖν ἄλφα ἕκθεσις σημεῖον ἔσται τῆς δυάδος, τριῶν δὲ ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις κειμένων τριάδος ἔσται χαρακτήρ καὶ τεσσάρων ἐπ' εὐθὺ τεταγμένων τετράδος καὶ πέντε πεντάδος καὶ αἰεὶ οὕτως· διὰ γὰρ τῆς τοιαύτης γραφῆς καὶ σημάνσεως ἡ τῶν φρασησομένων ἐπιπέδων τε καὶ στερεῶν σχηματογραφία τρανωθῆναι δύναιτ' ἂν μόνως καὶ σαφηνισθῆναι, οἷον μονὰς μὲν α, δυὰς δὲ αα, τριάς δὲ ααα, τετράς δὲ αααα, πεντὰς δὲ ααααα, καὶ εἰς πλείονα αἰεὶ ἀναλόγως.

2.6.3 ἔσται οὖν ἡ μὲν μονὰς σημείου τόπον ἐπέχουσα καὶ τρόπον ἀρχῇ μὲν διαστημάτων καὶ ἀριθμῶν, οὕτω δὲ διάστημα οὐδὲ ἀριθμός, ὥς τὸ σημεῖον ἀρχῇ μὲν γραμμῆς καὶ διαστήματος, οὕτω δὲ γραμμῇ οὐδὲ διάστημα· ἀμέλει οὔτε σημεῖω σημεῖον συντεθὲν πλείον τι ποιεῖ, ἀδιάστατον γὰρ ἀδιαστάτῳ συντεθὲν διάστημα οὐχ ἔξει, ὥσπερ εἴ τις τὸ οὐδὲν οὐδενὶ συντεθὲν σκέπτοιο, οὐδὲν γὰρ ποιεῖ κατὰ ταυτὰ γὰρ ἐφαίνετο καὶ ἐπὶ τῆς ἰσότητος ἡμῖν ἐν ταῖς σχέσεσι, σώζεται μὲν γὰρ ἀναλογία, ὥς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον,

οὐ μὴν διάστημα γεννᾶται τι τοῖς ἄκροις πρὸς ἀλλήλους, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν χωρὶς
ἰσότητος σχέσεων πασῶν· τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ μονὰς ἐκ παντὸς μόνη τοῦ ἀριθμοῦ ἑαυτὴν
πολλαπλασιάσασα οὐδὲν πλέον ἑαυτῆς γεννᾷ· ἀδιάστατος ἄρα ἡ μονὰς καὶ ἀρχοειδής, πρῶτον
δὲ διάστημα εὐρίσκεται καὶ φαίνεται ἐν δυάδι, εἴτ' ἐν τριάδι, εἴτα ἐν τετράδι καὶ ἐξῆς ἐν τοῖς
ἀκολουθοῦσι· διάστημα γάρ ἐστι δυεῖν ὄρων τὸ μεταξὺ θεωρούμενον.

- 2.6.4 πρῶτον δὲ διάστημα γραμμὴ λέγεται, γραμμὴ γάρ ἐστι τὸ ἐφ' ἐν διαστατόν· δύο δὲ διαστήματα
ἐπιφάνεια, ἐπιφάνεια γάρ ἐστι τὸ διχῇ διαστατόν· τρία δὲ διαστήματα στερεόν, στερεόν γάρ ἐστι
τὸ τριχῇ διαστατόν καὶ οὐκ ἔστιν οὐδαμῶς ἐπινοεῖν στερεόν, ὃ πλεόνων τέτευχε διαστημάτων
ἢ τριῶν, βάθους, πλάτους, μήκους· τούτοις γὰρ αἱ λεγόμεναι περὶ πᾶν σῶμα ὑπάρχειν ἐξ
περιστάσεις ὀρίζονται, καθ' ἃς αἱ κατὰ τόπον κινήσεις διακρίνονται, πρόσω, ὀπίσω, ἄνω, κάτω,
δεξιὰ, ἀριστερά· ἐκάστω γὰρ διαστήματι δύο ἐξ ἀνάγκης περιστάσεις παρέπονται ἀλλήλαις
ἀντίθετοι, ἐνὶ μὲν αἱ ἄνω καὶ κάτω, ἐτέρω δὲ αἱ πρόσω καὶ ὀπίσω, τῷ τρίτῳ δὲ αἱ ἐπὶ δεξιὰ καὶ
ἀριστερά.
- 2.6.5 καὶ συμβαίνει πως οὕτως ἀναστρέφειν τὸν λόγον· εἴ τι γὰρ στερεόν ἐστίν, ἐκεῖνο τὰς τρεῖς
διαστάσεις πάντως ἔχει, μήκος, βάθος, πλάτος καὶ ἔμπαλιν, εἴ τι ἔχει τὰς τρεῖς διαστάσεις,
ἐκεῖνο πάντως στερεόν ἔστιν, ἄλλο δ' οὐδέν.
- 2.6.6 οὐκ ἄρα τὸ δύο μόνον ἔχον διαστάσεις ἔσται στερεόν, ἀλλ' ἐπιφάνεια, αὕτη γὰρ διαστημάτων
ἐπιδεκτικὴ δυεῖν ἐστὶ μόνων· καὶ ἐπ' αὐτῆς δυνατὸν ὁμοιοτρόπως ἀντιστρέφειν τὸν λόγον,
ἐπιφανεία τε γὰρ ὀρθῶς τὸ διχῇ διαστατόν καὶ πάλιν τὸ διχῇ διαστατόν πάντως ἐπιφάνεια
ἔσται.
- 2.6.7 ἐνὶ ἄρα διαστήματι ἡλάττωται ἐπιφάνεια στερεοῦ, ἐνὶ δὲ καὶ γραμμὴ ἐπιφανείας οὕσα τὸ ἐφ' ἐν
διαστατόν καὶ ἐνὸς μόνου τέτευχῆ διαστήματος, λειπομένη δὲ στερεοῦ δυσὶ διαστήμασι·
ταύτης δ' αὐτῆς λείπεται ἐνὶ διαστήματι τὸ σημεῖον· διὰ τοῦτο προελέχθη εἶναι ἀδιάστατον
στερεοῦ μὲν τρισὶ διαστήμασι λειπόμενον, ἐπιφανείας δὲ δυσὶ, γραμμῆς δὲ ἐνί. Ἔστιν οὖν
σημεῖον ἀρχὴ διαστήματος, οὐ διάστημα δέ, τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἀρχὴ γραμμῆς, οὐ γραμμὴ δέ καὶ
γραμμὴ ἀρχὴ ἐπιφανείας, οὐκ ἐπιφάνεια δέ, καὶ ἀρχὴ τοῦ διχῇ διαστατοῦ, οὐ διχῇ δὲ διαστατόν.
- 2.7.2 καὶ εἰκότως ἡ ἐπιφάνεια ἀρχὴ μὲν σώματος, οὐ σῶμα δέ, καὶ ἡ αὐτὴ ἀρχὴ μὲν τοῦ τριχῇ
διαστατοῦ, οὐ τριχῇ δὲ διαστατόν.
- 2.7.3 οὕτως δὴ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ μὲν μονὰς ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ ἐφ' ἐν διάστημα κατὰ μονάδα
προβιβαζόμενου, ὃ δὲ γραμμικὸς ἀριθμὸς ἀρχὴ ἐπιπέδου ἀριθμοῦ ἐφ' ἕτερον διάστημα
ἐπιπέδως πλατυνομένου, ὃ δὲ ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἀρχὴ στερεοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τρίτον διάστημα
πρὸς τὰ ἐξ ἀρχῆς βάθος τι προσκτωμένου· οἷον καθ' ὑποδιαίρεσιν γραμμικοὶ μὲν εἰσιν ἀριθμοὶ
ἀπλῶς ἅπαντες οἱ ἀπὸ δυάδος ἀρχόμενοι καὶ κατὰ μονάδος πρόσθεσιν ἐπὶ ἐν καὶ τὸ αὐτὸ
προχωροῦντες διάστημα, ἐπίπεδοι δὲ οἱ ἀπὸ τριάδος ἀρχόμενοι ἀρχικωτάτης ρίζης καὶ διὰ τῶν
ἐξῆς συνεχῶν ἀριθμῶν προϊόντες, λαμβάνοντες καὶ τὴν ἐπωνυμίαν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν·
πρώτιστοι γὰρ τρίγωνοι, εἴτα μετ' αὐτοὺς τετράγωνοι, εἴτα μετ' αὐτοὺς πεντάγωνοι, εἴτα ἐπὶ
τούτοις ἑξάγωνοι καὶ ἐπτάγωνοι καὶ ἐπ' ἅπειρον· προσαγορεύονται δέ, ὥς ἔφαμεν, ἀπὸ τῶν
ἀπὸ τριάδος ἐφεξῆς κειμένων ἀριθμῶν.
- 2.7.4 ἀρχικώτατον ἄρα σχῆμα ἐπιπέδων καὶ στοιχειωδέστατον τὸ τρίγωνον εὐρίσκεται· καὶ γὰρ ἐν
τοῖς γραμμικοῖς ἐπιπέδοις ἔαν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰ μέσα εὐθεῖαι ἀχθῶσι, λυθήσεται ἕκαστον
εὐθύγραμμον σχῆμα πάντως εἰς τρίγωνα τοσαῦτα, ὅσα περ ἂν αὐτοῦ τυγχάνωσιν αἱ πλευραί,
αὐτὸ δὲ τὸ τρίγωνον τὸ αὐτὸ τοῖς ἄλλοις παθὸν εἰς ἕτερόν τι οὐ μεταπεσεῖται, ἀλλ' εἰς ἑαυτὸ·
στοιχεῖον ἄρα καὶ ἐν ἐκείνοις τὸ τρίγωνον· εἰς αὐτὸ γὰρ τὰ ἄλλα πάντα ἀναλύεται ἀναγκαίως,

αὐτὸ δὲ οὐκ εἰς ἕτερον· ἐκ τούτου ἂν καὶ συσταίῃ τὰ λοιπά, αὐτὸ δὲ ἐξ οὐδενός· στοιχεῖον ἄρα τοῦτο τῶν ἄλλων, αὐτοῦ δὲ οὐδέν.

- 2.7.5 καὶ τοῖς ἀριθμητικοῖς δὲ ἐπιπέδοις προίων ὁ λόγος βεβαιώσῃ τὸ λεγόμενον. Τρίγωνος μὲν οὖν ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ διαλυόμενος εἰς μονάδας καὶ τὴν κατ' ἐπίπεδον θέσιν τῶν μορίων ἰσόπλευρον σχηματογραφῶν εἰς τριγωνισμόν, οὗ ὑποδείγματα ὁ γ, ζ, ι, ιε, κα, κη καὶ οἱ ἐφεξῆς· σχηματογραφαίαι γὰρ αὐτῶν εὐτακτοὶ ἔσονται τρίγωνοί τε ἅμα καὶ ἰσόπλευροί, καὶ τὸ τοιοῦτον, μέχρις οὗ βούλει, προκόπτων τριγωνιζόμενον εὐρήσεις πρὸ πάντων στοιχειωδέστατον τάττων τὸ ἐκ μονάδος γινόμενον, ἵνα καὶ τρίγωνος δυνάμει φαίνεται ἡ μονάς, ἐνεργεία δὲ πρῶτος ὁ γ.
- 2.8.2 πλευραὶ δὲ παραυξηθήσονται τῷ συνεχεῖ ἀριθμῷ, τοῦ μὲν γὰρ δυνάμει πρῶτου πλευρὰ μονάς, τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ πρῶτου πλευρὰ δυάς, τουτέστι τοῦ γ, τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ δευτέρου πλευρὰ τριάς, τουτέστι τοῦ ζ, τοῦ δὲ τρίτου πλευρὰ τετράς καὶ τοῦ τετάρτου πεντάς καὶ τοῦ πέμπτου ἑξὰς καὶ αἰεὶ οὕτως.
- 2.8.3 γεννᾶται δὲ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος καὶ αἰεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἓνα συντιθεμένων, κατὰ γὰρ ἐκάστην σύνθεσιν καὶ προσσώρυσιν οἱ εὐτακτοὶ τρίγωνοι συντελοῦνται· οἷον ἐκ μὲν τοῦ φυσικοῦ στίχου τούτου α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ, ιδ, ιε τὸν μὲν πρῶτιστον λαβὼν ἔχω τὸν δυνάμει πρῶτον τρίγωνον, τὴν μονάδα [1], εἴτα τὸν συνεχεῖ αὐτῷ ἐπισωρεύσας ἔχω τὸν ἐνεργείᾳ πρῶτον τρίγωνον, β γὰρ καὶ α ὁ γ ἐστὶ, καὶ τῇ γε σχηματογραφίᾳ οὕτως συνίσταται· ἐπὶ μιᾷ μονάδι δύο μονάδες παράλληλοι ὑποτίθενται καὶ τριγωνίζεται ὁ γ ἀριθμὸς [2]· εἴτα ἐξῆς ἐπὶ τούτοις ὁ γ συνεχῆς προσσωρευθεὶς καὶ ἐξαπλωθεὶς γε εἰς μονάδα καὶ συντεθεὶς τὸν ζ ἀποδίδωσι δευτέρον ἐνεργείᾳ τρίγωνον καὶ προσέτι σχηματογραφεῖ [3]· καὶ πάλιν ὁ φύσει ἀκόλουθος ὁ δ ἐπὶ τούτοις σωρευθεὶς καὶ μοναδιστὶ ὑπογραφεὶς τὸν εὐτακτον μετὰ τοὺς εἰρημένους ἀποδίδωσι τὸν ι καὶ τριγωνιστὶ γε σχηματίζεται [4]· καὶ ὁ ε ἐπὶ τούτῳ, εἴτα ὁ ζ, εἴτα ὁ ζ καὶ οἱ ἐξῆς ἅπαντες, ὥστ' ἐμμελῶς καὶ τὰς πλευρὰς ἐκάστου τοσούτων εἶναι μονάδων, ὅποσοιπερ ἀριθμοὶ συνετέθησαν ἐκ τοῦ φυσικοῦ στίχου εἰς τὴν αὐτοῦ σύστασιν [5 6 7]· [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] Τετράγωνος δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ συνεχῆς τούτῳ καὶ μηκέτι τρεῖς, ὥς ὁ πρόσθεν, ἀλλὰ τέσσαρας ἐν τῇ καταγραφῇ γωνίας ἀποδιδούς, ἐν ἰσοπλεύρῳ μέντοι καὶ αὐτὸς σχηματισμῷ, οἷον α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ· τούτων γὰρ αἱ καταγραφαὶ ἰσόπλευροί τετραγωνισμοὶ οὕτω πως γίνονται· καὶ ἐφεξῆς οὕτως, μέχρις οὗ βούλει.
- 2.9.2 καὶ τούτοις δὲ συμβέβηκεν, ὥσπερ καὶ τοῖς πρὸ αὐτῶν, τὴν τῶν πλευρῶν πρόβασιν κατὰ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν προκόπτειν· τῷ μὲν γὰρ δυνάμει πρῶτῳ τῷ ἐνὶ πλευρὰ μονάς, τῷ δὲ ἐνεργείᾳ πρῶτῳ τῷ δ πλευρὰ δυάς, τῷ δὲ ἐνεργείᾳ δευτέρῳ τῷ θ πλευρὰ τριάς, τῷ δὲ μετ' αὐτὸν ἐνεργείᾳ τρίτῳ τῷ ις πλευρὰ τετράς καὶ τῷ τετάρτῳ πεντάς καὶ τῷ πέμπτῳ ἑξὰς καὶ καθόλου ἐξῆς τοῖς ἐφεξῆς.
- 2.9.3 γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος στοιχηδὸν ἐκτεθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ τῇ μονάδι ἐπισωρευθέντων οὐκέτι τῶν ἐφεξῆς τοῖς ἐφεξῆς, ὥς δέδεικται, ἀλλὰ τῶν παρ' ἓνα κειμένων πάντων, τουτέστι τῶν περισσῶν· πρῶτος γὰρ ὁ α δυνάμει πρῶτος τετράγωνος, δεύτερος ὁ α καὶ γ ἐνεργείᾳ πρῶτος τετράγωνος, τρίτος δὲ ὁ α καὶ γ καὶ ε ἐνεργείᾳ δεύτερος τετράγωνος, τέταρτος δὲ ὁ α καὶ γ καὶ ε καὶ ζ ἐνεργείᾳ τρίτος τετράγωνος καὶ ὁ ἐξῆς τοῖς προτέροις προσσωρευθέντος τοῦ θ γίνεται καὶ ὁ μετ' αὐτόν τοῦ ια προστεθέντος καὶ οὕτως αἰεὶ.
- 2.9.4 καὶ ἐπὶ τούτων δὲ συμβέβηκε τοσούτων μονάδων τὴν ἐκάστου πλευρὰν εἶναι, ὅποσοιπερ ἂν ᾧσιν οἱ εἰς τὴν αὐτοῦ γένεσιν ἐπισωρευθέντες ἀριθμοί. Πεντάγωνος δὲ ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ καὶ αὐτὸς κατὰ τὴν ἐξάπλωσιν τὴν εἰς μονάδα σχηματογραφούμενος ἐπιπέδως εἰς πενταγωνικὸν σχῆμα πάντῃ ἰσόπλευρον, οἷον α, ε, ιβ, κβ, λε, να, ο καὶ οἱ ἀνάλογοι.

- 2.10.2 ἀλλ' ἔστι τοῦ μὲν πρώτου κατ' ἐνέργειαν, τουτέστι τοῦ εἰς ἑκάστη πλευρὰ δυνάς, μονὰς μὲν γὰρ τοῦ δυνάμει πρωτίστου πενταγώνου ὑπάρχει τοῦ ἑνός, τοῦ δὲ τῶν ἐκκειμένων δευτέρου τοῦ ιβ πλευρὰ τριάς καὶ τοῦ μετ' αὐτὸν τοῦ κβ τετράς καὶ τοῦ ἐξῆς τοῦ λε πεντάς καὶ ἐξὰς τοῦ ἐπὶ τούτῳ τοῦ να καὶ ἀεὶ οὕτως· καθόλου γὰρ τοσούτων μονάδων ἢ πλευρὰ ἐστίν, ὅσοι περ εἰς τὴν αὐτοῦ σύστασιν συνεσωρεύθησαν ἀριθμοὶ ἐκλεγέντες ἐκ τοῦ κατὰ φύσιν στοιχηδὸν ἐκκειμένου ἀριθμητικοῦ χύματος· παραπλησίως γὰρ καὶ ὁμοιοτρόπως ἐπισωρεύονται ἀλλήλοις εἰς πενταγώνου γένεσιν οἱ ἀπὸ μονάδος δύο διαλείποντες ἐφ' ὅσονοῦν, τουτέστιν οἱ τριάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντες· ἢ μὲν μονὰς δυνάμει πρῶτος καὶ σχηματογραφεῖται οὕτως [1], ὁ δὲ ε δευτέρος ἐκ τοῦ α καὶ δ συντεθέντων σχηματογραφούμενος καὶ αὐτὸς οὕτως [2], ὁ δὲ ιβ ὁ τρίτος ἔκ τε τῶν δύο προτέρων καὶ τοῦ ζ ἐπισωρευθέντος αὐτοῖς, ἵνα καὶ αὐτὸς τριάδα πλευρὰν σχῇ, ὡς τριῶν συντεθέντων εἰς τὴν αὐτοῦ σύστασιν, ὡς καὶ ὁ πρὸ αὐτοῦ ὁ ε δυνάδα πλευρὰν εἶχεν ἐκ δύο συντεθείς, ἢ δὲ σχηματογραφία αὐτοῦ τοιαύτη ἐστίν· [3] [1] [2] [3] οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις γενήσονται καθεξῆς προσσωρευομένων τῶν κατὰ τριάδος ὑπεροχὴν εὐτάκτων μετὰ τὴν ἑβδομάδα ὄντων, οἷον τοῦ ι, ιγ, ις, ιθ, κβ, κε καὶ ἐπ' ἄπειρον· ἔσονται γὰρ κβ, λε, να, ο, ρβ, ριζ καὶ τοῦτο μέχρι παντός.
- 2.11.1 Ἐξάγωνοι δὲ καὶ ἐπτάγωνοι καὶ οἱ ἐξῆς κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον προβιβασθήσονται ἀπὸ τοῦ φυσικοῦ χύματος τοῦ ἀριθμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος αἰεὶ κατὰ μονάδος πρόσθεσιν τῶν ἀποστάσεων γινομένων· ὡς γὰρ ὁ μὲν τρίγωνος τοὺς μονάδι διαφέροντας, μηδὲν παραλείποντας εἰς τὴν σωρείαν δεχόμενος ἀπετελεῖτο, ὁ δὲ τετράγωνος τοὺς δυνάδι μὲν διαφέροντας, ἕνα δὲ παραλείποντας, πεντάγωνος δὲ ἀκολουθῶς τοὺς τριάδι μὲν διαφέροντας, δύο δὲ παραλείποντας, οὓς καὶ ἀπεδείξαμεν ὑποδείγματα αὐτῶν τε καὶ τῶν ἀποτελουμένων ἐκθέμενοι ἐξ αὐτῶν, οὕτως καὶ ἐξάγωνοι γνώμονας ἔξουσι τοῦς τετράδι μὲν διαφέροντας, τρεῖς δὲ παραλείποντας, ἐξ ὧν συντεθέντων σωρηδὸν ἀποτελοῦνται, οἷον α, ε, θ, ιγ, ις, κα καὶ ἐφεξῆς, ἵνα οἱ ἀποτελούμενοι ἐξάγωνοι ὦσιν α, ς, ιε, κη, με, ξς καὶ ἀεὶ, μέχρις ἂν τις θέλῃ.
- 2.11.2 οἱ δὲ τούτοις ἀκόλουθοι ἐπτάγωνοι τοὺς μὲν γνώμονας ἔχουσι πεντάδι μὲν διαφέροντας, τετράδι δὲ διαλείποντας, οἷον α, ς, ια, ις, κα, κς, λα, λς καὶ ἐφ' ὅσονοῦν, αὐτοὶ δὲ οἱ συνιστάμενοί εἰσιν α, ζ, ιη, λδ, νε, πα, ριβ, ρμη καὶ τοῦτο μέχρι παντός.
- 2.11.3 ὀκτάγωνοι δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τοῖς τε γνώμοσιν ἐξάδι διαφέροντες προκόπτουσι καὶ τοῖς συστήμασιν ἀναλόγως.
- 2.11.4 ἵνα δὲ ἐπὶ πάντων παρατηροῦντι τοῦτο καθολικὸν σύμφωνον ᾗ, ἑκάστου πολυγώνου τοὺς γνώμονας διαφέρειν ἀλλήλων δυνάδι ἐλαττόνως, ἢ κατὰ τὴν ἐν τῷ ὀνόματι ποσότητα τῶν γωνιῶν, τουτέστι μονάδι μὲν τὸν τρίγωνον, δυνάδι δὲ τὸν τετράγωνον, τριάδι δὲ τὸν πεντάγωνον, τετράδι δὲ τὸν ἐξάγωνον καὶ πεντάδι τὸν ἐπτάγωνον καὶ ἀεὶ κατὰ παραύξησιν οὕτως. Καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν πολυγώνων φύσεως τῶν ἐπιπέδων ἱκανὰ ταῦτα ὡς ἐν πρώτῃ εἰσαγωγῇ· ὅτι δὲ συμφωνοτάτη διδασκαλία ἡ περὶ αὐτῶν τῇ γραμμικῇ καὶ οὐκ ἀπάδουσα, δῆλον ἂν εἴη οὐ μόνον ἐκ τῆς σχηματογραφίας τῆς καθ' ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ κεῖθεν· πᾶν τετράγωνον σχῆμα διαγωνίως διαιρεθὲν εἰς δύο τρίγωνα λύεται καὶ πᾶς τετράγωνος ἀριθμὸς εἰς δύο τριγώνους συνεχεῖς λύεται καὶ ἐξ ἅρα δύο τριγώνων συνεχῶν συνέστηκεν· οἷον τρίγωνοι μὲν εἰσιν α, γ, ς, ι, ιε, κα, κη, λς, με, νε καὶ οἱ ἐξῆς, τετράγωνοι δὲ α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ.
- 2.12.2 δύο δὲ, οὓς ἂν θέλῃς, τριγώνους συνεχεῖς ἀλλήλοις συνθεῖς πάντως τετράγωνον ποιήσεις καὶ ὀκτάγωνον τετράγωνον ἅρα διαλύσας δυνήσῃ δύο ἀπ' αὐτῶν τριγώνους ποιῆσαι· καὶ πάλιν παντὶ τετραγώνῳ σχήματι τρίγωνον προσζευχθὲν ὀκτάγωνον πεντάγωνον ποιεῖ, οἷον τῷ δ τετραγώνῳ ὁ α τρίγωνος προσζευχθεὶς τὸν ε πεντάγωνον ποιεῖ καὶ τῷ θ τῷ ἐξῆς ὁ ἐξῆς προστεθείς,

δηλονότι ὁ γ, πεντάγωνον τὸν ιβ ποιεῖ, τῷ δὲ ις ὄντι ἀκολουθῶ ὁ ζ ἀκόλουθος ἐπισυντεθεὶς τὸν κβ ἀκόλουθον ἀποδίδωσιν καὶ τῷ κε ὁ ι τὸν λε καὶ ἀεὶ οὕτως.

2.12.3 κατὰ δὲ τὰ αὐτὰ κἂν τοῖς πενταγώνοις οἱ τρίγωνοι προστιθοῖντο τῇ αὐτῇ τάξει, τοὺς εὐτάκτους γεννήσουσιν ἐξαγώνους καὶ πάλιν ἐκείνοις οἱ αὐτοὶ προσπλεκόμενοι τοὺς ἐν τάξει ἐπταγώνους ποιήσουσι καὶ μετ' ἐκείνους τοὺς ὀκταγώνους καὶ τοῦτο ἐπ' ἀπειρον.

2.12.4 πρὸς δὲ ὑπόμνησιν ἐκκείσθωσαν ἡμῖν πολυγώνων στίχοι παραλλήλως γεγραμμένοι οἷδε, ὁ πρῶτος τρίγωνων, ὁ μετ' αὐτὸν τετραγώνων, μετὰ δὲ ἀμφοτέρους πενταγώνων, εἴτα ἐξαγώνων, εἴτα ἐπταγώνων, εἴτα, εἰ ἐθέλοι τις, καὶ τῶν ἐξῆς πολυγώνων· ἔξεστι δὲ καὶ τῶν ἐφεξῆς πολυγώνων τὴν ἔκθεσιν ἐν παραλλήλοις οὕτω στίχοις ποιήσασθαι.

2.12.5 καθολικῶς γὰρ εὐρήσεις τοὺς μὲν τετραγώνους τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς σύστημα ὄντας ὁμοταγῶν τριγώνων καὶ ἔτι τῶν ὑπερκειμένων ἐκείνοις ὁμογενῶν, οἷον τὸν δ τοῦ γ καὶ α, τὸν θ τοῦ ζ καὶ γ, τὸν ις τοῦ ι καὶ ζ, τὸν κε τοῦ ιε καὶ ι, τὸν δὲ λς τοῦ κα καὶ ιε καὶ μέχρις ἀεὶ οὕτως τοὺς δὲ πενταγώνους τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς ὁμοταγῶν τετραγώνων σύστημα ὄντας καὶ προσέτι τῶν πρωτογενῶν τριγώνων, ὅσοι εἰσὶ μονάδι ἑλάττον ὁμοταγεῖς, οἷον ὁ μὲν ε τοῦ δ καὶ α, ὁ δὲ ιβ τοῦ θ καὶ γ, ὁ δὲ κβ τοῦ ις καὶ ζ, ὁ δὲ λε τοῦ κε καὶ ι καὶ ἀεὶ οὕτως.

2.12.6 πάλιν δὲ οἱ ἐξαγώνοι τῶν ὑπὲρ αὐτοὺς ὁμοταγῶν πενταγώνων καὶ τῶν προεκτεθέντων τριγώνων ὁμοίως, οἷον ὁ ζ τοῦ ε καὶ α, ὁ ιε τοῦ ιβ καὶ γ, ὁ δὲ κη τοῦ κβ καὶ ζ, ὁ δὲ με τοῦ λε καὶ ι καὶ μέχρις οὗ βούλει.

2.12.7 τῶν δὲ ἐπταγώνων ὁ αὐτὸς τρόπος· ὁ μὲν γὰρ ζ σύστημα τοῦ ζ καὶ α, ὁ δὲ ιη τοῦ ιε καὶ γ, ὁ δὲ λδ τοῦ κη καὶ ζ καὶ οἱ ἐξῆς ἀκολουθῶς, ἵνα ἕκαστος πολύγωνος σύστημα ᾦ τοῦ τε ὑπὲρ αὐτὸν ὁμοταγοῦς μονάδι ἐλάττονος ὁμογωνίου καὶ τοῦ ἀνωτάτου τριγώνου τοῦ [μονάδι ἐλάττονος] ὁμοταγοῦς παρ' ἐν κειμένου. εἰκότως ἄρα στοιχεῖον πολυγώνων τὸ τρίγωνον καὶ ἐν γραμμαῖς καὶ ἐν ἀριθμοῖς· καὶ γὰρ καὶ κατὰ βάθος καὶ κατὰ πλάτος ἐν τῷ διαγράμματι εὐρίσκονται οἱ συνεχεῖς αἰεὶ ἀριθμοὶ κατὰ τοὺς στίχους αὐτοὺς ἔχοντες διαφορὰς τοὺς εὐτάκτους τριγώνους.

2.13.1 Ἐντεῦθεν ἤδη ῥάδιον συνιδεῖν, τίς τε ὁ στερεὸς ἀριθμὸς καὶ πῶς ἰσοπλεύρως ὁ τοιοῦτος προκόπτει· ὁ γὰρ πρὸς τοῖς δυσὶ διαστήμασι τοῖς ἐν τῇ ἐπιπέδῳ σχηματογραφία θεωρουμένοις ἐπὶ μῆκος καὶ ἐπὶ πλάτος τρίτον διάστημα προσειληφώς, ὃ τινες μὲν βάθος, τινὲς δὲ πάχος καλοῦσιν, ἔνιοι δὲ ὕψος, ἐκεῖνος ἂν εἴη στερεὸς ἀριθμὸς ὁ τριχῇ διαστατὸς καὶ ἔχων ἐν ἑαυτῷ μῆκος, βάθος, πλάτος. Πρώτιστα δὲ οὗτος φαντάζεται ἐν ταῖς λεγομέναις πυραμίσιν.

2.13.2 αὗται δὲ γίνονται ἐκ πλατυτέρων βάσεων μειουριζόμεναι εἰς ὀξεῖαν κορυφήν, πρῶτον μὲν κατὰ τριγωνισμόν ἀπὸ τριγώνου βάσεως, δεύτερον δὲ κατὰ τετραγωνισμόν ἀπὸ τετραγώνου βάσεως, ἐξῆς δὲ τούτοις κατὰ πενταγωνισμόν ἀπὸ πενταγώνου βάσεως, εἴτα ἀνάλογον ἀπὸ ἐξαγώνου καὶ ἐπταγώνου καὶ ὀκταγώνου καὶ ἀεὶ ἐπ' ἀπειρον. καθάπερ ἀμέλει καὶ ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς στερεοῖς σχήμασιν ἀπὸ τριγώνου ἰσοπλεύρου ἔαν τις εὐθείας ἐννοήσῃ τρεῖς ἀπὸ τῶν γωνιῶν τῷ μήκει ἴσας ταῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς καθ' ὕψος συννευούσας εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, πυραμὶς ἂν ἀποτελεσθεῖ ὑπὸ τεσσάρων περιεχομένη τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἴσων ἀλλήλοις, ἐνὸς μὲν τοῦ ἐξ ἀρχῆς τριγώνου, τριῶν δὲ τῶν περιγραφέντων ὑπὸ τῶν λεχθεισῶν τριῶν εὐθειῶν.

2.13.4 καὶ πάλιν ἀπὸ τετραγώνου ἐπιπέδου ἔαν τις τέσσαρας εὐθείας λογίσῃται τῷ μήκει ἴσας ταῖς τοῦ τετραγώνου πλευραῖς ἐκάστην ἐκάστη πάλιν κατὰ τὸ ὕψος συννευούσας εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, πυραμὶς ἂν ἀποτελεσθεῖ ἀπὸ τετραγώνου βάσεως τετραγωνικῶς μειουριζομένη, περιεχομένη δὲ ὑπὸ τεσσάρων μὲν τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἐνὸς δὲ τετραγώνου τοῦ ἐξ ἀρχῆς.

2.13.5 καὶ ἀπὸ πενταγώνου δὲ καὶ ἐξαγώνου καὶ ἐπταγώνου καὶ μέχρις οὗ βούλεται τις προχωρεῖν, τῷ αὐτῷ τρόπῳ εὐθεῖαι ἰσάριθμοι ταῖς γωνίαις ἀπ' αὐτῶν τῶν γωνιῶν ἀνεγειρόμεναι καὶ εἰς

ἐν καὶ τὸ αὐτὸ συννεύουσαι σημεῖον πυραμίδα ἀποκορυφοῦσιν ὀνομαζομένην ἀπὸ πενταγώνου βάσεως ἢ ἑξαγώνου ἢ ἑπταγώνου ἢ ἀνάλογον.

- 2.13.6 οὕτω δὲ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἀπὸ μὲν μονάδος ὡς ἀπὸ σημείου πᾶς γραμμικὸς ἡυξήθη ἀριθμὸς, οἷον α, β, γ, δ, ε καὶ οἱ ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον· ἀπ' αὐτῶν δὲ τούτων γραμμικῶν ὄντων καὶ ἐφ' ἐν διαστατῶν πως συντεθέντων καὶ οὐχ ὡς ἔτυχεν οἱ πολύγωνοι καὶ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πλάσσονται, τρίγωνοι μὲν παρὰ μηδένα συντεθέντων τῶν γνωμόνων, τετράγωνοι δὲ παρὰ ἓνα, πεντάγωνοι δὲ παρὰ δύο καὶ αἰεὶ οὕτως. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ αὐτῶν τούτων τῶν ἐπιπέδων πολυγώνων ἀριθμῶν ἐπισωρευομένων ἀλλήλοις καὶ ὡσανεὶ ἐποικοδομουμένων αἱ ὁμογενεῖς ἐκάστω πυραμίδες γεννῶνται, ἡ μὲν ἀπὸ τριγώνου βάσεως ἀπ' αὐτῶν τῶν τριγώνων, ἡ δὲ ἀπὸ τετραγώνου βάσεως ἀπ' αὐτῶν τῶν τετραγώνων, ἡ δὲ ἀπὸ πενταγώνου ἀπὸ τῶν πενταγώνων καὶ ἡ ἀπὸ ἑξαγώνου ἀπὸ τῶν ἑξαγώνων καὶ τοῦτο δι' ὅλου.
- 2.13.8 εἰσὶν οὖν αἱ μὲν ἀπὸ τριγώνου βάσεως εὐτακτοὶ αὗται α, δ, ι, κ, λε, νς, πδ καὶ ἐφεξῆς, ὧν ἡ γένεσις αὐτοὶ οἱ τρίγωνοι ἀλλήλοις ἐπισωρευόμενοι, πρῶτος μὲν ὁ α, εἴτα ὁ αγ, εἴτα ὁ αγς, εἴτα πρὸς τούτοις ὁ ι καὶ ἐφεξῆς σὺν τοῖς πρόσθεν ὁ ιε καὶ ἐπὶ τούτοις ὁ κα καὶ ἐξῆς ὁ κη καὶ ἐπ' ἄπειρον.
- 2.13.9 δῆλον δέ, ὅτι καὶ ὁ μείζων τῶν ἀριθμῶν κατώτατος νοεῖται, αὐτὸς γὰρ βάσις εὐρίσκεται, ὁ δὲ εὐθὺς μετ' αὐτὸν ὑπὲρ αὐτὸν καὶ ὁ μετ' ἐκεῖνον ὑπὲρ τοῦτον, ἕως ἂν ἡ μονὰς ἐπὶ τῇ κορυφῇ φανῇ καὶ ὡσανεὶ εἰς σημεῖον ἀπομειουρίσῃ τὴν τελείωσιν τῆς πυραμίδος. Αἱ δὲ ἐξῆς πυραμίδες εἰσὶν αἱ ἀπὸ τετραγώνου βάσεως ὁμοιοσημόνως ἀνιστάμεναι ἐφ' ἐν καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον· αὗται δὲ τῷ αὐτῷ τρόπῳ πλάσσονται ταῖς προλεχθεῖσαις τριγωνικαῖς· τοὺς γὰρ ἀπὸ μονάδος εὐτάκτους τετραγώνους στοιχηδὸν ἐκθέμενος α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ καὶ τοὺς ἐξῆς πάλιν σωρηδὸν ἐπιτίθημι ἀλλήλοις κατὰ βάθος αὐτούς, τὸν α ἐπάνω τοῦ δ, καὶ γίνεται πυραμὶς ἡ ε ἐνεργεῖα πρώτη ἀπὸ τετραγώνου βάσεως, δυνάμει γὰρ πρώτη καὶ ἐνταῦθα ἡ μονὰς.
- 2.14.2 πάλιν δ' αὐτὴν ταύτην, ὡς ἔχει, τὴν πυραμίδα τὴν ἐκ πέντε μονάδων ἐπιτίθημι ὅλην τῷ θ τετραγώνῳ καὶ συνίσταται μοι ἡ ιδ πυραμὶς ἀπὸ τετραγώνου βάσεως πλευρὰν ἔχουσα πάντοθι τριάδα, τῆς προτέρας δυάδα ἐχούσης τῆς ε, τῆς δὲ δυνάμει πρωτίστης μονάδα· δεῖ γὰρ καὶ ἐνθάδε τοσούτων ἐκάστην πλευρὰν ἡστινοσοῦν πυραμίδος μονάδων εἶναι, ὅσοιπερ εἰσι τὸν ἀριθμὸν οἱ εἰς σύστασιν αὐτῆς συσσωρευθέντες πολύγωνοι.
- 2.14.3 πάλιν γὰρ τὴν ιδ πυραμίδα συνόλην βάσιν ἔχουσαν τὸν θ τετράγωνον ἐπιτίθημι τῷ ις τετραγώνῳ καὶ ἀποτελεῖται μοι ἡ λ πυραμὶς τρίτη κατ' ἐνέργειαν τῶν ἀπὸ τετραγώνου βάσεως οὔσα· τῇ δ' αὐτῇ τάξει καὶ ἀγωγῇ καὶ ἀπὸ πενταγώνου βάσεως καὶ ἀπὸ ἑξαγώνου καὶ ἑπταγώνου βάσεως καὶ ἐπὶ πλεῖον αἰεὶ προχωροῦντες πυραμίδας συστησόμεθα τοὺς ἀναλογοῦντας ἐκάστη πολυγώνους ἐπισωρεύοντες ἀλλήλοις ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενοι ὡς ἀπὸ ἐλαχίστου καὶ προχωροῦντες μέχρις ἀπείρου καθ' ἐκάστην.
- 2.14.4 καὶ ἐκ τούτου δῆλον γίνεται, ὅτι στοιχειωδέστερα τὰ τρίγωνα· πᾶσαι γὰρ ἀπλῶς αἱ δεικνύμεναι καὶ φαινόμεναι πυραμίδες ἀπὸ τῶν καθ' ἐκάστην πολυγώνων βάσεων τριγώνοις μέχρι κορυφῆς περιέχονται. Ἵνα δὲ μὴ ἀνήκοοι ὦμεν κολούρων καὶ δικολούρων καὶ τρικολούρων πυραμίδων, ὧν τοῖς ὀνόμασι ἐντευξόμεθα ἐν συγγράμμασι μάλιστα τοῖς θεωρηματικοῖς, ἰστέον, ὅτι, ἐὰν πυραμὶς ἀφ' ἡστινοσοῦν βάσεως, τουτέστιν ὄντιναοῦν πολύγωνον ἔχουσα βάσιν εἴτε τρίγωνον εἴτε τετράγωνον εἴτε πεντάγωνον εἴτε τῶν ἐξῆς τινὰ τῶν ὁμογενῶν πολυγώνων, κατὰ σωρείαν αὐξηθεῖσα μὴ ἐπὶ μονάδα μειουρισθῇ, κολουρος ἀπλῶς λέγεται ἐστερημένη τῆς φυσικῆς καὶ πᾶσιν ἐπιβαλλούσης κορυφώσεως· οὐ γὰρ εἰς τὸν δυνάμει πολύγωνον τὴν μονάδα τελευτᾷ αὕτη ὡς εἰς ἓν τι σημεῖον, ἀλλ' εἰς ἕτερον ἐνεργεῖα, καὶ οὐκέτι μονὰς κορυφή, ἀλλ' ἐπίπεδον αὐτῇ τὸ πέρας γίνεται ἰσογώνιον τῇ βάσει· ἐὰν δὲ πρὸς τῷ μὴ εἰς

μονάδα τελευτᾶν ἔτι καὶ μὴ εἰς τὸν παρὰ τὴν μονάδα ἐνεργείᾳ πρῶτον τελευτήσῃ, δικόλουρος λέγεται ἢ τοιαύτη· ἐὰν δὲ καὶ ἔτι μὴ ἔχῃ τὸν ἐνεργείᾳ δεύτερον πολύγωνον ἐπὶ τῷ συμπεράσματι, ἀλλὰ μόνον τὸν ὑπ' αὐτόν, τρικόλουρος κεκλήσεται καὶ τετρακόλουρός γε, ἂν καὶ τὸν μετ' ἐκεῖνον μὴ ἔχῃ, καὶ πεντακόλουρος κατὰ τὸ ἐξῆς καὶ αἰεὶ μέχρι βούλει παρεκτείνειν τὸ ὄνομα.

2.15.1 Καὶ ἡ μὲν τῶν ἰσοπλεύρων στερεῶν ἀριθμῶν πυραμοειδῶν γένεσις καὶ προκοπὴ καὶ ἐπαύξησις καὶ φύσις τοιαύτη σπέρμα καὶ ρίζαν ἔχουσα τοὺς πολυγώνους αὐτοὺς καὶ τὴν ἐκείνων εὐτακτον ἐπισωρείαν, ἐτέρα δὲ τις στερεῶν ἑτερογενῶν εὐταξία ἐστὶ τῶν λεγομένων κύβων, δοκίδων, πλινθίδων, σφηνίσκων, σφαιρικῶν, παραλληλεπιδῶν, τὴν τῆς προβάσεως τάξιν ἔχουσα τοιαύτην τινά.

2.15.2 οἱ προφρασθέντες τετράγωνοι α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ καὶ οἱ ἐξῆς διχῇ ὄντες διαστατοὶ καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ σχηματογραφία μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχοντες ἔτι καὶ τρίτον προσλήψονται διάστημα καὶ ἔσσονται στερεοὶ καὶ τριχῇ διαστατοί, ἐὰν τῇ ἰδίᾳ πλευρᾷ ἕκαστος πολλαπλασιασθῇ, ὁ μὲν δ δις β ὧν πάλιν δις γενόμενος, ἵνα ὀγδοᾶς ἀποτελεσθῇ, ὁ δὲ θ τρις γ ὧν πάλιν τριάδι ἐπ' ἄλλο διάστημα αὐξηθῇ καὶ γένηται ὁ κζ, ὁ δὲ ις τετράκις δ ὑπάρχων πάλιν τετράδι τῇ αὐτοῦ πλευρᾷ μεγεθυνθῇ καὶ γένηται ὁ ξδ, καὶ οἱ ἐξῆς παραπλησίως μέχρι παντός.

2.15.3 τοσοῦτων δὲ καὶ ἐνθάδε μονάδων αἱ πλευραὶ ἔσσονται, ὥσων περ ἦσαν καὶ αἱ τῶν τετραγώνων, ἀφ' ὧν ἀγέγοντο, ἕκαστος ἀφ' ἐκάστου, αἱ μὲν τοῦ η δυάδων, ὥσων καὶ αἱ τοῦ δ, αἱ δὲ τοῦ κζ τριάδων, ὥσων καὶ αἱ τοῦ θ, αἱ δὲ τοῦ ξδ τετράδων, ὥσων καὶ αἱ τοῦ ις, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς, ὥστε καὶ ἡ τῆς δυνάμει κύβου μονάδος πλευρὰ μονὰς ἔσται πανταχόθι, ὅση περ καὶ ἡ τῆς δυνάμει τετραγώνου μονάδος.

2.15.4 καθόλου δὲ ἕκαστος τετράγωνος ἐν μὲν ἐπίπεδόν ἐστι, γωνίας δὲ ἔχει τέσσαρας καὶ πλευρὰς τέσσαρας, ἕκαστος δὲ κύβος ἠϋξημένος ὧν ἐξ ἐκάστου τετραγώνου τῇ ἰδίᾳ πλευρᾷ πολυπλασιασθέντος ἐπίπεδα μὲν ἔξει πάντως ἔξ, ὧν ἕκαστον ἴσον τῷ προγόνῳ αὐτοῦ τετραγώνῳ, πλευρὰς δὲ δώδεκα, ὧν ἐκάστη ἴση καὶ μονάδων γε τῶν αὐτῶν τῇ τοῦ προγόνου τετραγώνου πλευρᾷ, γωνίας δὲ ὀκτὼ στερεάς, ὧν ἐκάστη περιέχεται ὑπὸ τριῶν πλευρῶν, οἷα ἐστὶν ἐκάστη τῶν ἐν τῷ προγόνῳ τετραγώνῳ. Ἐπειδὴ οὖν πάντῃ ἰσὸς πλευρον ἐπὶ μῆκος καὶ βάθος καὶ πλάτος σχῆμα στερεὸν ὑπάρχει ὁ κύβος καὶ ἐπὶ τὰς λεγομένας ἔξ περιστάσεις ἰσοδιάστατον, ἀκόλουθον ἄρα ἐστίν, ἀντικειῖσθαι αὐτῷ τὸ μηδαμῇ ἴσας ἔχον τὰς διαστάσεις ἀλλήλαις, ἀλλ' ἄνισον τὴν τοῦ βάθους τῇ τοῦ πλάτους καὶ ἐκατέρᾳ τούτων τὴν τοῦ μήκους, οἷον δις τρις τετράκις ἢ δις τετράκις ὀκτάκις ἢ τρις πεντάκις δωδεκάκις ἢ κατὰ τινα ἄλλην ἀνισότητά τοιαύτην.

2.16.2 τὰ δὲ τοιαῦτα στερεὰ σχήματα λέγεται σκαληνὰ ἀπλῶς, ὧν πάντῃ τὰ διαστήματα ἄνισα ἀλλήλοις ἐστί· τινὲς δὲ αὐτὰ πωλυωνύμως σφηνίσκους καλοῦσι, καὶ γὰρ καὶ οἱ σφῆνες ἀνισόπλευροι πανταχῇ τεκτονικοὶ τε καὶ οἰκοδομικοὶ καὶ χαλκευτικοὶ καὶ οἱ τῶν ἄλλων τεχνῶν πλάσσονται ἀπὸ ὀξυτέρου ἄκρου διαδύνειν ἀρχόμενοι καὶ αἰεὶ μᾶλλον πλατυνόμενοι ἀνομοίως κατὰ πάντα τὰ διαστήματα· τινὲς δὲ τοὺς αὐτοὺς σφηκίσκους καλοῦσι, τοιοῦτος γὰρ καὶ ὁ τῶν σφηκῶν μάλιστα ὄγκος ἀποσφιγγόμενος κατὰ μέσον καὶ τὴν λεχθεῖσαν ὁμοιότητα ἐμφαίνων· παρὰ τοῦτο εἰκὸς καὶ τὸ σφήκωμα ὠνομάσθαι, ἔνθα γὰρ ἂν ἀποσφίγῃ, τὴν τοῦ σφηκὸς ἐντομὴν μιμεῖται· ἕτεροι δὲ τοὺς αὐτοὺς βωμίσκους προσαγορεύουσιν ἀπὸ οἰκείας εἰκόνης, οἱ γὰρ παλαιότροποι βωμοί, μάλιστα δὲ ἰωνικοί, οὔτε τὸ πλάτος τῷ βάθει οὔτε συναμφοτέρα τῷ μήκει ἴσα ἔχουσιν οὔτε τὴν βάσιν τῇ κορυφῇ, ἀλλὰ πάντῃ εἰσὶν ἐξηλλαγμένοι ταῖς διαστάσεσιν.

2.16.3

ὥς οὖν ἀκροτήτων δύο κύβου τε καὶ σκαληνοῦ, τοῦ μὲν κατ' ἰσότητα διεστῶτος, τοῦ δὲ κατ' ἀνισότητα πάντη, μέσοι εἰσὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ λεγόμενοι παραλληλεπίπεδοι, ὧν καὶ τὰ ἐπίπεδα ἑτερομήκεις ὑπάρχουσιν ἀριθμοί, ὥσπερ καὶ τῶν κύβων αὐτῶν τετράγωνοι ἀριθμοὶ ἦσαν τὰ ἐπίπεδα, ὥς ἐδείχθη. Πάλιν οὖν ἄνωθεν ἑτερομήκης ἀριθμὸς λέγεται, οὗ ἐπιπέδως σχηματογραφηθέντος τετράπλευρος μὲν καὶ τετραγώνιος γίνεται ἢ καταγραφῇ, οὐ μὴν ἴσαι ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ οὐδὲ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἴσον, ἀλλὰ παρὰ μονάδα, οἷον ὁ β, ὁ ζ, ὁ ιβ, ὁ κ, ὁ λ, ὁ μβ καὶ οἱ ἐξῆς· ἂν γὰρ αὐτοὺς ἐπιπέδως διαγράφη τις, πάντως οὕτω ποιήσῃ· ἄπαξ β β, δις γ ζ, τρίς δ ιβ καὶ τοὺς ἐξῆς ἀναλόγως· τετράκις ε, πεντάκις ζ, ἑξάκις ζ, ἐπτάκις η καὶ ἐπ' ἄπειρον, μόνον ἵνα μονάδι μείζων ἢ ἑτέρα πλευρὰ τῆς λοιπῆς ᾗ, ἄλλω δὲ μηδενὶ ἀριθμῷ· ἐὰν δὲ ἄλλως παρὰ τὴν μονάδα διαφέρωσιν ἀλλήλων αἱ πλευραὶ, οἷον δυάδι, τριάδι, τετράδι ἢ ἐφεξῆς, ὥς τὰ δις δ ἢ τρίς ζ ἢ τετράκις η ἢ ὅπως ποτὲ οὖν ἑτέρως, οὐκέτι κυρίως ὁ τοιοῦτος ἑτερομήκης κληθήσεται, ἀλλὰ προμήκης· ἕτερον γὰρ καὶ ἑτερότητα οἱ παλαιοὶ οἱ περὶ τε Πυθαγόραν καὶ τοὺς ἐκείνου διαδόχους πυθμενικῶς ἐν τῇ δυάδι ἐθεώρουν, ταυτὸν δὲ καὶ ταυτότητα ἐν τῇ μονάδι, ὥς ἐν δυσὶν ἀρχαῖς τῶν ὄλων· εὐρίσκονται δὲ αὗται μονάδι μόνον ἀλλήλων διαφέρονσαι, ὥστε καὶ τὸ ἕτερον σπερματικῶς μονάδι ἕτερόν ἐστι καὶ οὐκ ἄλλω ἀριθμῷ· διόπερ καὶ συνήθως ἐπὶ δυοῖν, ἀλλ' οὐκ ἐπὶ πλειόνων τὸ ἕτερον λέγεται παρὰ τοῖς ὀρθῶς διαλεγομένοις.

2.17.2 ἀλλὰ μὴν καὶ μονάδι μὲν εἰδοποιεῖσθαι ἀπεδείχθη ὁ περισσὸς πᾶς ἀριθμὸς, δυάδι δὲ ὁ ἄρτιος πᾶς· ὅθεν εἰκότως τὸν μὲν περισσὸν τῆς ταυτοῦ φύσεως ἐροῦμεν μετέχειν, τὸν δὲ ἄρτιον τῆς θατέρου, καὶ γὰρ δὴ καὶ κατὰ σωρείαν ἑκατέρου ἀποτελοῦνται φύσει, ἀλλ' οὐχ ἡμῶν θεμένων, τῇ μὲν τοῦ ἀπὸ μονάδος περισσοῦ ἐπ' ἄπειρον ἢ τετραγώνων φύσις, τῇ δὲ τοῦ ἀπὸ δυάδος ἀρτίου ἐπ' ἄπειρον ἢ τῶν ἑτερομηκῶν.

2.17.3 πᾶσα ἄρα ἀνάγκη, τὸν μὲν τετράγωνον οἶεσθαι πάλιν τῆς ταυτοῦ φύσεως μετέχειν· τὸν γὰρ αὐτὸν λόγον καὶ ὅμοιον καὶ ἀπαράλλακτον καὶ ἐν ἰσότητι κείμενον αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἀποδεικνύουσι πρὸς ἑαυτάς, τὸν δὲ ἑτερομήκη τῆς θατέρου· ὃν γὰρ μονὰς πρὸς δυάδα τρόπον παρήλλακται μονάδι μόνῃ διαφέρουσα, τοῦτον καὶ παντὸς ἑτερομήκους αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας διαλλάσσουσιν, ἢ ἑτέρα τῆς ἑτέρας μονάδι μόνον διαφέρουσα· οἷον ἐκκειμένου μοι τοῦ ἀπὸ μονάδος συνεχοῦς ἐξῆς ἀριθμοῦ ἐκλεξάμενος ἰδίᾳ μὲν τοὺς περισσοὺς τάσσω ἐν ἐνὶ στίχῳ, ἰδίᾳ δὲ τοὺς ἀρτίους ἐν ἑτέρῳ, καὶ γίνονται μοι δύο στίχοι τοιοῦτοι· α, γ, ε, ζ, θ, ια, ιγ, ιε, ιζ, ιθ, κα, κγ, κε, κζ· β, δ, ζ, η, ι, ιβ, ιδ, ις, ιη, κ, κβ, κδ, κς, κη. ἀρχὴ μὲν οὖν τοῦ τῶν περισσῶν στίχου ἢ μονὰς ὁμογενῆς τε οὕσα καὶ τὴν τοῦ ταυτοῦ φύσιν ἔχουσα· διὸ οὔτε ἐὰν τε ἑαυτὴν πολυπλασιάσῃ ἐπιπέδως ἢ στερεῶς, ἑτεροιοῦται οὔτε ἄλλον ὄντιναοῦν ἐξίστησι τοῦ ἐξ ἀρχῆς, ἀλλὰ τηρεῖ αὐτὸν ἐν ταυτῷ· τὸ δὲ τοιοῦτον περὶ ἄλλον ἀριθμὸν εὐρεῖν ἀδύνατον.

2.17.5 τοῦ δ' ἄλλου στίχου ἄρχει ἡ δυὰς ὁμογενῆς αὐτῷ οὕσα καὶ ἑτερότητας καταρκτική· εἴτε γὰρ ἑαυτὴν εἴτε ἄλλον πολυπλασιάσειεν, ἔκστασιν ποιεῖ, οἷον δις β, δις γ. Ὄταν δὲ ἢ οκτάκις η δις ἢ τρίς, τὰ τοιαῦτα στερεὰ σχήματα πλινθίδες λέγονται ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις· ἐὰν δὲ καὶ μείζονα τὰ ὕψη τῷ τετραγώνῳ προσγένηται, δοκίδες οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται, οἷον τρίς γ ἐπτάκις ἢ οκτάκις ἢ ἐνάκις ἢ ὁσακισοῦν μόνον ὑπερβαλλόντως· ἔστι δὲ δοκὶς ἀριθμὸς ἰσάκις ἴσος μειζονάκις· οἱ δὲ γε σφηνίσκοι ἦσαν ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις καὶ οἱ κύβοι ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις.

2.17.7 αὐτῶν δὲ τῶν κύβων ὅσοι πρὸς τῷ ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις εἶναι ἔτι ἔχουσι καὶ τὸ αἰεὶ καταλήγειν κατὰ πᾶσαν πολυπλασίαν εἰς τὸ αὐτό, ἀφ' οὐπὲρ ἤρξαντο, σφαιρικοὶ καλοῦνται, οἱ δ' αὐτοὶ καὶ ἀποκαταστατικοί, ὥσπερ ἀμέλει ὁ ἀπὸ τῆς ε πλευρᾶς καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ζ· ὅσαις γὰρ ἂν αὐξήσεσιν αὐξήσω τούτων ἐκάτερον, εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἀεὶ τελευτήσῃ πάντως, ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ζ εἰς αὐτὸ τὸ ζ, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ε εἰς αὐτὸ τὸ ε· οἷον πεντάκις ε εἰς τὸ ε τελευτήσῃ καὶ

τοῦτο πεντάκις καὶ εἰ δέοι πάλιν πεντάκις τοῦτο καὶ μέχρις ἀπείρου ἑτέρα τις τελευτὴ οὐχ εὑρεθήσεται, πλὴν εἰ μὴ ἡ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τὸν αὐτὸν τρόπον ἡ ζ καὶ ἄλλη οὐδεμία· ὥστε καὶ ἡ μονὰς δυνάμει σφαιρική ἐστι καὶ ἀποκαταστατική, τὸ γὰρ αὐτὸ πάσχει τοῦτο, ὡς εἰκός, πάθος τὸ περὶ τὰς σφαίρας καὶ τοὺς κύκλους· ἐκείνων γὰρ ἑκάτερον, ὅθεν ἄρχεται, ἐκεῖ καὶ τελευτᾷ περικυκλούμενον καὶ περιστρεφόμενον. ὡς καὶ οἱ λεχθέντες οὗτοι ἀριθμοὶ μονώτατοι τῶν ἄλλων τῶν ἰσάκις ἴσων καταστρέφουσιν εἰς τὴν αὐτὴν ἀρχήν, ὅθεν ἤρξαντο, κατὰ πάσας τὰς αὐξήσεις· ἀλλ' ἂν μὲν ἐπιπέδως δυοὶ διαστήμασι προκόψωσι, κυκλικοὶ λέγονται, ὡς ὁ α, κε, λς ἐκ τοῦ ἁπαξ α καὶ τοῦ πεντάκις ε καὶ τοῦ ἑξάκις ζ· ἂν δὲ τρία διαστήματα ἔχωσιν ἢ ἐπὶ πλεόν τούτων πολλαπλασιασθῶσι, σφαιρικοὶ στερεοὶ λέγονται, ὡς ὁ α, ρκε, σις ἢ ἄλλως α, χκε, ασρς. Καὶ περὶ μὲν στερεῶν ἀριθμῶν ἱκανὰ ἐν τῷ παρόντι καὶ ταῦτα· ἐπεὶ δὲ ἀρχὰς τῶν ὅλων οἱ τε φυσικοὶ καὶ οἱ ἐκ τῶν μαθημάτων ὁρμώμενοι τὸ ταυτὸν καὶ τὸ ἕτερον λέγουσιν, ἀπεδείχθη δὲ τὸ ταυτὸν μὲν ὑπάρχουσα ἡ μονὰς καὶ οἱ κατὰ εἰδοποίησιν αὐτῆς περισσοί, πολὺ δὲ μᾶλλον οἱ ἐκ τούτων συσσωρευομένων συνιστάμενοι τετράγωνοι ὡς ἂν δὴ ἰσότητος ἐν ταῖς πλευραῖς μετέχοντες, ἕτερον δὲ δυνάς τε καὶ ὁ ὑπὸ ταύτης εἰδοποιούμενος πᾶς ἄρτιος, μάλιστα δὲ οἱ ὑπὸ τούτων συσσωρευομένων συνιστάμενοι ἑτερομήκεις διὰ τὸ πρώτης ἀνισότητος καὶ ἑτερότητος ἐν τῇ τῶν πλευρῶν διαφορᾷ μετέχειν, ἔτι τοῦτο ἀποδεικτέον ἀναγκαιότατα, πῶς ἐν ἀμφοτέροις τούτοις ὡς ἐν ἀρχαῖς καὶ σπέρμασι δυνάμει πάντα τὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἰδιώματα προυπόκειται εἰδῶν τε αὐτοῦ καὶ ὑποδιαίρέσεων σχέσεών τε πασῶν καὶ πολυγώνων καὶ τῶν παραπλησίων.

2.18.2 πρότερον δὲ διασταλτέον ἡμῖν, ἣ διαφέρει προμήκης ἀριθμὸς ἑτερομήκους· ἑτερομήκης μὲν γάρ ἐστιν, ὡς προελέχθη, ὁ γινόμενος ὑπὸ ἀριθμοῦ τὸν μονάδι ἑαυτοῦ μείζονα πολλαπλασιάσαντος, οἷον ὁ ζ ὑπὸ τοῦ δις γ, ὁ ιβ ὑπὸ τοῦ τρις δ, προμήκης δὲ ἐστιν ὁ ὑπὸ δύο μὲν ἀριθμῶν διαφερόντων ὁμοίως καὶ αὐτὸς γινόμενος, οὐ μὴν μονάδι γε, ἀλλὰ μείζονί τινι ἀριθμῷ, οἷον δις δ, τρις ζ, τετράκις η, καὶ οἱ παραπλησίοι τῷ μήκει προπεπτωκότες τρόπον τινὰ καὶ ὑπερβεβηκότες τὴν τῆς μονάδος διαφοράν. οὐκοῦν ὅτι μὲν οἱ τετράγωνοι ὑπὸ τινων ἀριθμῶν ἰδίῳ μήκει μηκυνθέντων γίνονται, ταυτὸν ἔχοντες τὸ μήκος τῷ πλατεῖ, ἰδιομήκεις ἂν κυρίως καὶ ταυτομήκεις λέγοιντο, οἷον δις β, τρις γ, τετράκις δ καὶ οἱ ἐφεξῆς· εἰ δὲ τοῦτο, ἐπιδεκτικοὶ πάντως ταυτότητος καὶ ἰσότητος, διόπερ ὠρισμένοι τε καὶ περαίνοντες· τὸ γὰρ ἴσον καὶ τὸ ταυτὸν ἐνὶ τρόπῳ καὶ ὠρισμένῳ τοιοῦτον· ὅτι δὲ καὶ οἱ ἑτερομήκεις ἀριθμοὶ οὐκ ἰδίῳ μήκει, ἀλλ' ἑτέρου μηκυνθέντος ἀποτελοῦνται, ἑτερομήκεις τε διὰ τοῦτο καὶ ἑτερότητος ἐπιδεκτικοὶ ἀπειρίας τε καὶ ἀοριστίας.

2.18.4 τῇ δὲ ἄρα διχοστατεῖ καὶ διανενέμηται καὶ ἐναντία ἀλλήλοις φαίνεται τά τε τοῦ ἀριθμοῦ πάντα καὶ τὰ ἐν κόσμῳ πρὸς ταῦτα ἀποτελεσθέντα καὶ καλῶς οἱ παλαιοὶ φυσιολογεῖν ἀρχόμενοι τὴν πρώτην διαίρεσιν τῆς κοσμοποιίας ταύτη ποιοῦνται· Πλάτων μὲν τῆς ταυτοῦ φύσεως καὶ τῆς θατέρου ὀνομάζων καὶ πάλιν τῆς ἀμερίστου καὶ αἰεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἐχούσης οὐσίας τῆς τε αὐτῆς μεριστῆς γινομένης, Φιλόλαος δὲ ἀναγκαῖον τὰ ἑόντα πάντα εἶμεν ἥτοι ἅπειρα ἢ περαίνοντα ἢ περαίνοντα ἅμα καὶ ἅπειρα, ὅπερ μᾶλλον συγκατατίθεται εἶναι, ἐκ περαινόντων ἅμα καὶ ἀπείρων συνεστάναι τὸν κόσμον, κατ' εἰκόνα δηλονότι τοῦ ἀριθμοῦ· καὶ γὰρ οὗτος σύμπαξ ἐκ μονάδος καὶ δυνάδος σύγκειται ἀρτίου τε καὶ περιττοῦ, ἃ δὴ ἰσότητός τε καὶ ἀνισότητος ἐμφαντικὰ ταυτότητός τε καὶ ἑτερότητος περαίνοντός τε καὶ ἀπείρου ὠρισμένου τε καὶ ἀορίστου. Ἰνα δὲ καὶ ἐναργῶς πεισθῶμεν περὶ τῶν λεγομένων, ὅτι ἄρα ἐκ μαχομένων καὶ ἐναντίων συνέστη τὰ ὄντα καὶ εἰκότως ἀρμονίαν ὑπεδέξατο (ἀρμονία δὲ πάντως ἐξ ἐναντίων γίνεται· ἔστι γὰρ ἀρμονία πολυμιγέων ἔνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις), ἐκθώμεθα ἐν δυοὶ παραλλήλοις ἐπὶ μήκος στίχοις μηκέτι ἰδίᾳ ἀρτίους ἀπὸ δυνάδος καὶ περισσοὺς ἀπὸ μονάδος, ὡς πρὸ μικροῦ, ἀλλὰ τοὺς ἐξ αὐτῶν τούτων συσσωρευθέντων αὐτοῖς

ἀποτελεσθέντας, τετραγώνους μὲν ἀπὸ περισσῶν, ἑτερομήκεις δὲ ἀπὸ ἄρτίων· ἐνατενίζοντες γὰρ τῇ ἐκθέσει αὐτῶν θαυμάσομεν τὴν φιλαλληλίαν καὶ τὸ συλληπτικὸν ἀλλήλοις εἰς τὸ ἀπογεννᾶν τὰ λοιπὰ καὶ ἐκτελεῖν, ἵνα εἰκότως ἐπινοῶμεν καὶ ἐν τῇ τῶν ὄλων φύσει ἐντεῦθεν ποθεν τὸ τοιοῦτον ὑπὸ τῆς κοσμικῆς προνοίας συντελεῖσθαι.

2.19.2 ἔστωσαν οὖν οἱ δύο στίχοι τοιοῦτοι· ὁ μὲν τῶν τετραγώνων ἀπὸ μονάδος α, δ, θ, ις, κε, λς, μθ, ξδ, πα, ρ, ρκα, ρμδ, ρξθ, ρρς, σκε· ὁ δὲ τῶν ἑτερομηκῶν ἀπὸ δυάδος ἀρχόμενος καὶ αὐτὸς οὕτως· β, ζ, ιβ, κ, λ, μβ, νς, οβ, ρ, ρι, ρλβ, ρνς, ρπβ, σι, σμ. πρῶτον μὲν οὖν πρῶτος πρῶτου πυθμὴν πολλαπλάσιος, δεύτερος δὲ δευτέρου ἡμιόλιος, τρίτος δὲ τρίτου ἐπίτριτος, τέταρτος δὲ τετάρτου ἐπιτέταρτος, εἴτα ἐπίπεμπτος καὶ ἔφεκτος καὶ τοῦτο ἐπ’ ἄπειρον ἀναλόγως διαφοραὶ δὲ αὐτῶν προκόψουσι κατὰ τὸν συνεχῆ ἀπὸ μονάδος ἀριθμὸν, μονὰς μὲν τῶν πρώτων, δυὰς δὲ τῶν δευτέρων, τριάς δὲ τῶν τρίτων καὶ αἰὶ οὕτως· εἴτα δὲ ἐὰν ἀρξάμενος ὁ τῶν τετραγώνων δεύτερος συγκρίνηται κατὰ δυασμὸν τῷ πρώτῳ τῶν ἑτερομηκῶν καὶ ὁ τρίτος δευτέρῳ καὶ ὁ τέταρτος τρίτῳ καὶ ἀκολουθῶς οἱ λοιποί, τοὺς αὐτοὺς ἀπαραλλάκτους λόγους διατηρήσουσι τοῖς πρόσθεν, αἱ δὲ διαφοραὶ οὐκέτι ἀπὸ μονάδος, ἀλλ’ ἀπὸ δυάδος ἄρξονται προχωρεῖν αἱ αὐταί, καὶ κατὰ πρόβασιν δὲ ἐν τῇ προτέρᾳ συγκρίσει πρῶτος μὲν πρῶτου πρῶτον πυθμένα πολλαπλάσιον ἔξει, δεύτερος δὲ δευτέρου δεύτερον ἀπὸ πυθμένος ἡμιόλιον, τρίτος δὲ τρίτου τρίτον ἀπὸ πυθμένος ἐπίτριτον, καὶ παραπλησίως προκόψουσιν οἱ ἑξῆς.

2.19.4 ἔτι δὲ οἱ μὲν τετράγωνοι πρὸς ἑαυτοὺς διαφορὰς τοὺς περισσοὺς μόνον ἔχουσιν, οἱ δὲ ἑτερομήκεις τοὺς ἄρτίους· ἂν δὲ καὶ τὸν πρῶτον ἑτερομήκη μέσον ἀμφοτέρων τῶν πρώτων τετραγώνων θῶμεν, τὸν δὲ δεύτερον τῶν ἑξῆς, τὸν δὲ τρίτον τῶν μετ’ αὐτοὺς, τὸν τέταρτον δὲ τῶν ἐφεξῆς, τούτοις ὀφθήσονται εὐτακτότερα αἱ σχέσεις ἐν τρισὶν ὁροῖς· ἦν γὰρ ὁ δ πρὸς τὸν β σχέσιν ἔχει, οὕτως ὁ β πρὸς μονάδα, καὶ ἦν ὁ θ πρὸς τὸν ζ ἡμιολίως, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν δ, καὶ ἦν ὁ ις πρὸς τὸν ιβ, οὕτως ὁ ιβ πρὸς τὸν θ, καὶ τοῦτο ἐφεξῆς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν λόγων προκοπτόντων εὐτάκτως· ὥς γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, οὕτως ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ἔσται, καὶ οὐ τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἀλλὰ ποικίλῳ αἰὶ κατὰ προκοπὴν· καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν συζυγίων τὸ ὑπὸ ἴσον τῷ ἀπὸ καὶ ἅπαξ τὰ ἄκρα σὺν δις τῷ μέσῳ ἐναλλάξ τετράγωνον πάντως ποιήσει καὶ τὸ πάντων τούτων γλαφυρώτατον, ἐξ ἀμφοτέρων συντιθεμένων τριγώνων γένεσις εὐτακτος γίνεται σημαίνουσα, ὥς τῆς τῶν πάντων ἀρχῆς ἀρχικωτέρα ἢ τούτων φύσις, α καὶ β, καὶ β καὶ δ, καὶ δ καὶ ζ, καὶ ζ καὶ θ, καὶ θ καὶ ιβ, καὶ ιβ καὶ ις, καὶ ις καὶ κ, καὶ αἰὶ οὕτως οἱ τῶν πολυγώνων γεννητικοὶ τρίγωνοι εὐτακτοὶ γίνονται. Ἔτι δὲ καὶ πᾶς τετράγωνος προσλαβὼν τὴν ἑαυτοῦ πλευρὰν ἑτερομήκης γίνεται ἡ νῆ Δί’ ἀφαιρεθεὶς τὴν ἑαυτοῦ πλευρὰν· οὕτως καὶ τὸ ἕτερον καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον καὶ ἐπὶ τὸ ἔλαττον νοεῖται τοῦ ταυτοῦ, εἴπερ κατὰ πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν συντελεῖται, καθὰ καὶ τοῦ ἀνίσου τὰ δύο εἶδη τό τε μείζον καὶ τὸ ἔλαττον κατὰ πρόσθεσιν ἢ ἀφαίρεσιν προσγινομένην τῷ ἴσῳ τὴν γένεσιν λαμβάνει.

2.20.2 ἱκανὸν καὶ τοῦτο τεκμήριον τοῦ ταυτότητος καὶ ἑτερότητος μετέχειν τὰ εἶδη ἀμφοτέρα, ἑτερότητος μὲν ἀορίστως, ταυτότητος δὲ ὠρισμένως, γενικῶς μὲν μονάδα καὶ δυάδα, ὑποβεβηκότως δὲ περισσὸν μὲν ταυτότητος διὰ τὸ μονάδι ὁμογενὲς εἶναι, ἄρτιον δὲ ἑτερότητος διὰ τὸ δυάδι.

2.20.3 καὶ ἔτι ἐκδηλότερον, τετράγωνον μὲν διὰ τὸ σύνθεσιν περισσοῦ εἶναι ταυτότητι συγγενῇ ὑπάρχειν, ἑτερομήκη δὲ διὰ τὸ ἄρτίου ἑτερότητι· καὶ γὰρ καὶ ὥς φιλάλληλα ἐν τοῖς δυσὶ στίχοις μεταδιδόασιν ἀλλήλοις τὰ δύο εἶδη ταῦτα παρὰ μέρος τῶν αὐτῶν διαφορῶν, εἰ μὴ καὶ τῶν αὐτῶν λόγων, καὶ ἀνάπαλιν τῶν αὐτῶν λόγων, εἰ μὴ καὶ τῶν αὐτῶν διαφορῶν· ὁ γὰρ μεταξὺ τοῦ δ καὶ τοῦ β διπλασίως, τοῦτο ἐπιμορίως μεταξὺ τοῦ ζ καὶ τοῦ δ, καὶ πάλιν ὁ μεταξὺ τοῦ θ καὶ ζ ἡμιολίως, τοῦτο μεταξὺ τοῦ ιβ καὶ θ ἐπιτρίτως, καὶ αἰὶ οὕτως καὶ ὁ ποιότητι ταυτόν, ποσότητι ἕτερον, καὶ τούναντίον ὁ ποσότητι ταυτόν, ποιότητι ἕτερον.

- 2.20.4 καὶ πάλιν, ὅτι ἀναγκαίως κατὰ πάσας τὰς σχέσεις ἡ αὐτὴ διαφορά τῶν δύο ὄρων μονάδι ἐξηλλαγμένως μέρος λεχθήσεται, τοῦ μὲν ἡμισυ, τοῦ δὲ τρίτον ὑπάρχουσα, ἢ τοῦ μὲν τρίτον, τοῦ δὲ τέταρτον, ἢ ἄλλως τοῦ μὲν τέταρτον, τοῦ δὲ πέμπτον, καὶ ἐφεξῆς οὕτως.
- 2.20.5 ὁ δὲ μάλιστα βεβαιώσῃ, ταυτότητος αἰτιώτατον εἶναι τὸ περισσόν, οὐδέποτε δὲ τὸ ἄρτιον, ἐκεῖνο παραδεικτέον ἐν πάσῃ ἀπὸ μονάδος ἀναλόγῳ ἐκθέσει, οἷον διπλασίῳ μὲν α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ, ρκη, σνς, τριπλασίῳ δὲ α, γ, θ, κζ, πα, σμγ, ψκθ, , βρπζ καὶ μέχρι οὗ βούλει, πάντας εὐρήσεις ἐξ ἀνάγκης τοὺς ἐν περισσαῖς χώραις τετραγώνους, ἄλλους δὲ οὐκέτι οὐδεμιᾶ μηχανῇ, οὐδένα δὲ ἐν ἀρτίᾳ τετράγωνον, ἀλλὰ καὶ οἱ ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις ἅπαντες, τουτέστι κύβοι τριχῇ διαστατοὶ ὄντες καὶ ταυτότητος ἐπὶ πλεῖον δοκοῦντες μετέχειν ἔργον εἰσὶ περισσῶν, ἀλλ' οὐκ ἀρτίων, ὁ α καὶ η καὶ κζ καὶ ξδ καὶ ρκε καὶ σις καὶ οἱ ἀνάλογον προχωροῦντες καὶ ἀπληγῇ γε καὶ ἀποικίλῳ ἐφόδῳ ἐκτεθέντων γὰρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ' ἄπειρον συνεχῶν περισσῶν ἐπισκόπει οὕτως, ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ, οἱ δὲ δύο μετ' ἐκεῖνον συντεθέντες τὸν δεύτερον, οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς τὸν τρίτον, οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες τὸν τέταρτον, οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε τὸν πέμπτον καὶ οἱ ἐξῆς ἕξ τὸν ἕκτον καὶ τοῦτο μέχρις αἰεὶ. Ἐπὶ δὲ τούτοις καιρὸς ἂν εἴῃ τὸν περὶ ἀναλογιῶν τρόπον προσθέντας ἀναγκαιότατον ὄντα εἰς τὰς φυσιολογίας καὶ εἰς τὰ μουσικὰ τε καὶ σφαιρικὰ καὶ γραμμικὰ θεωρήματα, οὐχ ἥκιστα δὲ καὶ εἰς τὰς τῶν παλαιῶν συναναγνώσεις, τέλος ἐπιθεῖναι τῇ ἀριθμητικῇ εἰσαγωγῇ τὸ ἀρμόζον ἅμα καὶ συμμετρότατον.
- 2.21.2 ἔστιν οὖν ἀναλογία κυρίως δυεῖν ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις ἐς τὸ αὐτό, κοινότερον δὲ δυεῖν ἢ πλεόνων σχέσεων, κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσωνται, διαφορᾷ δὲ ἢ τινι ἐτέρῳ.
- 2.21.3 λόγος μὲν οὖν ἐστὶ δύο ὄρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις, σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία, ὥστε ἐν ἐλαχίστοις ὅροις τρισὶν αὕτη συμμέμικται, δύναται γε μὴν καὶ ἐν πλείοσι κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον προχωρεῖν· οἷον τοῦ α πρὸς τὸν β λόγος ἐστὶ δύο ὄρων ὑπαρχόντων, εἷς ὁ διπλάσιος, ἀλλὰ καὶ τοῦ β πρὸς τὸν δ ἕτερος λόγος ὁμοῖος· ἀναλογία ἄρα ἢ α, β, δ, λόγων γὰρ σύλληψις ἢ ὄρων τριῶν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον θεωρουμένων πρὸς ἀλλήλους.
- 2.21.4 καὶ ἐν πλείοσι δὲ καὶ ἐπιμηκεστέραις ἐκθέσει τὸ αὐτὸ δύναται θεωρεῖσθαι· προσαπτέσθω γὰρ τέταρτος ὅρος ὁ η μετὰ τὸν δ πάλιν ἐν ὁμοίᾳ σχέσει, διπλασίῳ γάρ, καὶ πάλιν μετὰ τὸν η ὁ ις καὶ αἰεὶ οὕτως.
- 2.21.5 ἐὰν μὲν οὖν ὁ αὐτὸς ὅρος αἰεὶ εἷς καὶ ἀπαράλλακτος πρὸς τοὺς παρ' ἑκάτερα αὐτοῦ ἀποκρίνηται, πρὸς μὲν τὸν μείζονα ὡς ὑπόλογος, πρὸς δὲ τὸν ἐλάσσονα ὡς πρόλογος, συνημμένη λέγεται ἢ τοιαύτη ἀναλογία, οἷον α, β, δ κατὰ ποιότητα· οἷος γὰρ ὁ δ πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς β πρὸς τὸν α, καὶ ἀνάπαλιν οἷος ὁ α πρὸς τὸν β, τοιοῦτος ὁ αὐτὸς β πρὸς τὸν δ· κατὰ ποσότητα δὲ οἷον α, β, γ· ὅσον γὰρ ὁ γ τοῦ β ὑπερέχει, τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β τοῦ α, καὶ ἐξ ἐναντίου, ὅσον ὁ α τοῦ β ἐλαττοῦται, τοσοῦτον καὶ αὐτὸς ὁ β τοῦ γ.
- 2.21.6 ἐὰν δὲ ἕτερος μὲν ὅρος ὑπακούῃ πρὸς τὸν ἐλάττονα πρόλογος γινόμενος καὶ μείζων, ἕτερος δὲ καὶ μὴ ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν μείζονα ὑπόλογός τε γινόμενος καὶ ἐλάττων, οὐκέτι συνημμένη, ἀλλὰ διεzeugμένη λέγεται ἢ τοιαύτη μεσότης τε καὶ ἀναλογία· οἷον κατὰ μὲν τὸ ποιὸν α, β, δ, η· ὡς γὰρ τὰ β πρὸς τὸ α, οὕτω τὰ η πρὸς τὰ δ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ α πρὸς τὰ β, οὕτως τὰ δ πρὸς τὰ η, ἐναλλάξ τε ὡς τὸ α πρὸς τὰ δ, οὕτω τὰ β πρὸς τὰ η, ἢ ὡς τὰ δ πρὸς τὸ α, οὕτως τὰ η πρὸς τὰ β· κατὰ δὲ τὸ ποσὸν οὕτως α, β, γ, δ· ὅσω γὰρ τὸ α τοῦ β λείπεται, τοσοῦτω καὶ τὰ γ τοῦ δ, ἢ ὅσω τὰ δ τοῦ γ περισσεύει, τοσοῦτω καὶ τὰ β τοῦ α, ἢ καὶ ἀναμῖξ ὅσω τὰ γ τοῦ α, τοσοῦτω τὰ δ τοῦ β, ἢ ὅσω λείπεται τὸ α τῶν γ, τοσοῦτω τὰ β τῶν δ. Εἰσὶν οὖν ἀναλογίαι αἱ μὲν πρῶται καὶ παρὰ πᾶσι τοῖς παλαιοῖς ὁμολογούμεναι, Πυθαγόρα τε καὶ Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει, τρεῖς πρῶτισται

ἀριθμητική, γεωμετρική, ἀρμονική, αἱ δὲ ταύταις ὑπεναντίαι ἄλλαι τρεῖς, ἰδίων μὴ τετευχυῖαι ὀνομάτων, κοινότερον δὲ λεγόμεναι μεσότητες τετάρτη, πέμπτη, ἕκτη μεθ' ἃς καὶ ἄλλας τέσσαρας οἱ νεώτεροι εὐρίσκουσι, συμπληροῦντες τὸν δέκατον ἀριθμὸν κατὰ τὸ τοῖς Πυθαγορικοῖς δοκοῦν ὡς τελειότατον, καθ' ὃν καὶ αἱ δέκα σχέσεις ὥφθησαν ἡμῖν πρὸ βραχέος ποσότητα λαμβάνουσαι καὶ αἱ δέκα λεγόμεναι κατηγορίαι καὶ τῶν ἡμετέρων χειρῶν καὶ ποδῶν αἱ τῶν ἀκρωτηρίων διαιρέσεις καὶ σχέσεις καὶ ἕτερα μυρία, ἃ κατ' οἰκεῖον τόπον ἐν ἑτέροις ὀψόμεθα.

2.22.2 νῦν δὲ περὶ τῶν ἀναλογιῶν ἄνωθεν τεχνολογητέον καὶ πρῶτόν γε περὶ τῆς κατὰ τὸ ποσὸν τὴν τῶν ὄρων σύγκρισιν οἰκειούσης ἀλλήλοις καὶ συνδεούσης, ἥ ἐστι κατὰ τὴν τῶν ὄρων πρὸς ἀλλήλους διαφορὰν ἴση κατὰ τὸ ποσὸν οὕσα· αὕτη δ' ἂν εἴη ἡ ἀριθμητική, ταύτης γὰρ ἴδιον προαπεδόθη τὸ ποσόν.

2.22.3 τίς οὖν ἡ αἰτία, ὅτι περὶ ταύτης πρώτης καὶ οὐ περὶ ἄλλης; ἡ δὴλον, ὅτι καὶ ἡ φύσις αὐτὴν πρὸ τῶν ἄλλων ἐμφαίνει· ἐν γὰρ τῇ τοῦ ἀπλοῦ ἀριθμοῦ φυσικῇ ἀπὸ μονάδος ἐκθέσει μηδενὸς παραλειπομένου μηδ' ὑπεξαίρουμένου σώζεται ὁ ταύτης μόνης λόγος, ἀλλὰ καὶ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἀπεδείξαμεν συλλογισάμενοι καὶ αὐτὴν τὴν ἀριθμητικὴν εἰσαγωγὴν πρὸ πασῶν τῶν ἄλλων ὑπάρχειν συναναιρουσαν μὲν ἐαυτῇ ἐκείνας, οὐ συναναιρουμένην δέ, καὶ συνεπιφερομένην μὲν ἐκείναις, οὐ συνεπιφέρουσιν δέ, ὥστε εἰκότως καὶ ἡ ὁμώνυμος τῇ ἀριθμητικῇ μεσότης οὐκ ἀλόγως προηγῆσεται τῶν ἐν ἐκείναις ὁμωνύμων μεσοτήτων, γεωμετρικῆς τε καὶ ἀρμονικῆς· τῶν γὰρ ὑπεναντίων ἐκδηλότατον ὅτι πολὺ μᾶλλον ἡγήσεται, ὧν περ αὗται ἡγεμόνες.

2.22.4 πρωτίστη ἄρα καὶ ἔξαρχος δικαιοτάτη ἡ ἀριθμητικὴ οὕσα φυσικῶς καὶ παρ' ἡμῶν τυγχανέτω διαρθρώσεως πρὸ γε τῶν ἄλλων. Ἔστιν οὖν ἀριθμητικὴ μεσότης, ὅταν τριῶν ἢ πλείονων ὄρων ἐφεξῆς ἀλλήλοις κειμένων ἢ ἐπινοουμένων ἡ αὕτη κατὰ ποσότητα διαφορὰ εὐρίσκηται μεταξὺ τῶν ἐφεξῆς ὑπάρχουσα, μὴ μέντοι λόγος ὁ αὐτὸς ἐν τοῖς ὅροις πρὸς ἀλλήλους γίνηται, οἷον α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, ια, ιβ, ιγ· ἐν γὰρ τῇ φυσικῇ ταύτῃ ἐκθέσει τοῦ ἀριθμοῦ συνεχῶς καὶ ἀνυπερβάτως ἐξεταζομένη εὐρίσκεται πᾶς ὅστισοῦν ὅρος δυεῖν ἀνὰ μέσον τεταγμένος τὴν ἀριθμητικὴν πρὸς αὐτοὺς διασώζων μεσότητα· ἴσαι γὰρ αἱ διαφοραὶ αὐτοῦ εἰσι πρὸς τοὺς ἐκατέρωθεν τεταγμένους, οὐ μὴν ἔτι καὶ λόγος ὁ αὐτὸς σώζεται ἐν αὐτοῖς.

2.23.2 ἐπιστάμεθα δέ, ὡς ἐν τῇ τοιαύτῃ ἐκθέσει συνημμένη τε καὶ διεzeugμένη γίνεται μεσότης· εἰ μὲν γὰρ ὁ αὐτὸς μέσος ὅρος πρόλογός τε καὶ ὑπόλογος πρὸς τοὺς ἐκατέρωθεν ὑπακούοι, συνημμένη ἂν εἴη, εἰ δὲ σὺν αὐτῷ ἕτερος, διεzeugμένη γίνεται μεσότης.

2.23.3 ἐὰν μὲν οὖν ἐκ τῆς ἐκθέσεως ταύτης τρεῖς ἀποτεμόμενοι οὐστιασούν παραλλήλους κατὰ τὴν συνημμένην σκοπῶμεν ἢ τέσσαρας ἢ πλείους κατὰ τὴν διεzeugμένην, μονὰς ἂν εἴη πάντων ἡ διαφορὰ, λόγοι δὲ ἕτεροι ἐκ παντός· ἐὰν δὲ μὴ παραλλήλους, ἀλλὰ διεχεῖς, κατὰ ἴσην μέντοι παράλειψιν, πάλιν δὲ ἥτοι τρεῖς ἢ πλείονας, εἰ μὲν εἷς ὁ παραλειπόμενος εἴη καθ' ἐκάστην θέσιν ὅρου, δυὰς ἔσται ἡ διαφορὰ πάντων, καὶ πάλιν ἐν τρισὶ μὲν συνημμένη, ἐν πλείοσι δὲ διηρημένη· εἰ δὲ δύο οἱ παραλειπόμενοι, τριάς πάντως ἡ διαφορὰ ἐν ἅπασιν συνημμένοις τε καὶ διεzeugμένοις, εἰ δὲ τρεῖς, τετράς, εἰ δὲ τέσσαρας, πεντάς, καὶ τοῦτο ἐφ' ὅποσον οὖν.

2.23.4 μετέχει ἄρα ἡ τοιαύτη ποσοῦ μὲν ἴσου ἐν ταῖς διαφοραῖς, ποιοῦ δὲ οὐκέτι ἴσου· διὰ τοῦτο ἀριθμητικὴ· εἰ δ' ἔμπαλιν ποιοῦ μὲν ὁμοίου μετεῖχε, ποσοῦ δὲ οὐ, ἣν ἂν γεωμετρικὴ ἀντὶ ἀριθμητικῆς.

2.23.5 ἴδιον δὲ ὑπάρχει τῇσδε τῆς μεσότητος, ὃ μηδεμιᾶ ἄλλῃ συμβέβηκε, τὸ κατὰ σύνθεσιν τῶν ἄκρων ὑποδιπλάσιον ἢ ἴσον τὸ μέσον εἶναι, ἃν τε συνημμένως ἢ τε διεzeugμένως σκοπῇται ἂν τε ἐναλλάξ· ἡ γὰρ τὸ μέσον σὺν ἐαυτῷ ἢ τὰ μέσα σὺν ἀλλήλοις ἴσα τῇ τῶν ἄκρων συνθέσει. ἔτι

καὶ ἄλλο ἔχει ἴδιον· ὃν γὰρ ἔχει λόγον ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτόν, τοῦτον αἱ διαφοραὶ πρὸς τὰς διαφοράς, τουτέστιν ἐν ἰσότητι εἰσιν· ἔτι τὸ γλαφυρώτατον καὶ τοὺς πολλοὺς λεληθός, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον συγκρινόμενον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἑλάττον αὐτοῦ εὐρίσκεται τῷ ὑπὸ τῶν διαφορῶν, ἔαν τε μονάδες ὦσιν ἔαν τε δυνάδες ἔαν τε τριάδες ἔαν τε τετράδες ἔαν τε ὅστισοῦν ἀριθμός· τέταρτον δέ, ὃ καὶ οἱ πρόσθεν πάντες ἐσημειώσαντο, οἱ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις λόγοι συγκρινόμενοι πρὸς τοὺς ἐν τοῖς μείζοσι μείζονές εἰσι· δειχθήσονται δὲ ἐν τῇ ἀρμονικῇ ἐναντίως οἱ ἐν τοῖς μείζοσι μείζονες καὶ οἱ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ἐλάττονες· διὰ τοῦτο ὑπεναντία ἡ ἀρμονικὴ μεσότης τῇ ἀριθμητικῇ, μεταίχμιον δὲ αὐτῶν ὥσπερ ἀκροτήτων ἐστὶν ἡ γεωμετρικὴ ἔχουσα τοὺς ἐν τοῖς μείζοσιν ὅροις λόγους καὶ τοὺς ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ἀλλήλοις ἴσους· ἐν μεσότητι δὲ ἡμῖν ὥφθη τὸ ἴσον τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάττονος.

2.23.6 τοσάδε ἡμῖν περὶ τῆς ἀριθμητικῆς μεσότητος. Ἡ δὲ ἐπὶ ταύτῃ συνεχῆς γεωμετρικὴ μεσότης κυρίως ἀναλογία μόνη καλουμένη διὰ τὸ ἀνα τὸν αὐτὸν λόγον θεωρεῖσθαι πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἐν αὐτῇ ὅρους· ἔστι δέ, ὅταν τριῶν ὄρων ἢ πλείονων ὡς ἔχει ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ὑπ' αὐτόν, οὕτως αὐτὸς πρὸς τὸν ὑποβεβηκότα ἔχη, ἔαν δὲ πλείονες ὅροι εἴεν, καὶ αὐτὸς πάλιν πρὸς τὸν ὑπ' αὐτόν, ποσότητι μέντοι μὴ τῇ αὐτῇ διαφέρωσιν ἀλλήλων, ἀλλὰ λόγου ποιότητι τῇ αὐτῇ, ἐναντίως ἢ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς ὥφθη.

2.24.2 οἷον ὑποδείγματος χάριν ἐκκείσθωσαν οἱ ἀπὸ μονάδος κατὰ διπλάσιον λόγον προχωροῦντες α, β, δ, η, ις, λβ, ξδ καὶ ἐπ' ἄπειρον, ἢ κατὰ τριπλασίονα α, γ, θ, κζ, πα, σμγ καὶ ἐφεξῆς ἢ κατὰ τετραπλασίον ἢ παραπλησίως τοῖς ἐκτεθεῖσιν· ἐν ἐκάστῳ γὰρ τούτων τῶν στίχων τρεῖς παράλληλοι ἢ τέσσαρες ἢ ὅσοιοῦν ληφθέντες τὴν γεωμετρικὴν πρὸς ἀλλήλους ἀποδώσουσιν ἀναλογίαν· ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ὑπ' αὐτόν, οὕτως κἀκεῖνος πρὸς τὸν ὑπ' αὐτόν καὶ πάλιν ἐκεῖνος πρὸς τὸν ἔτι ὑπ' αὐτόν καὶ τοῦτο μέχρι θέλει τις, καὶ ἀναμίξ· οἷον β, δ, η· ὃν γὰρ λόγον ἔχει ὁ η πρὸς τὸν δ, τοῦτον καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β καὶ ἀνάπαλιν, οὐ μὴν ἴσην ποσότητα μεταξὺ ἀλλήλων ἔχουσιν· ἢ πάλιν β, δ, η, ις· οὐ γὰρ μόνον ὁ ις πρὸς τὸν η τὸν αὐτὸν τοῖς πρόσθεν λόγον ἔχει, εἰ καὶ μὴ διαφορὰν, ἀλλὰ καὶ ἀναμίξ διασώζει τὴν ὁμοίαν σχέσιν, ὡς ὁ ις πρὸς τὸν δ, οὕτως καὶ ὁ η πρὸς τὸν β, καὶ ἔμπαλιν ὡς ὁ β πρὸς τὸν η, οὕτως καὶ ὁ δ πρὸς τὸν ις, καὶ διεζευγμένως ὡς ὁ β πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ις, ἀναστροφῶς τε καὶ κατὰ τὸ διεζευγμένον ὡς ὁ ις πρὸς τὸν η, οὕτως καὶ ὁ δ πρὸς τὸν β· ἔχει γὰρ τὸν διπλασίονα λόγον. Ἰδιον δὲ ἔχει ἡ γεωμετρικὴ μεσότης, ὃ μὴδεμία τῶν λοιπῶν, τὸ τὰς τῶν ὄρων διαφορὰς ἐν λόγῳ πρὸς ἀλλήλας τῷ αὐτῷ εἶναι, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι πρὸς τοὺς συνεχεῖς οἱ μείζονες πρὸς τοὺς ἐλάττονας, καὶ τὰς ἀνάπαλιν ὡς οἱ ἀνάπαλιν· ἔτι καὶ ἕτερον ἰδίωμα τὸ τοὺς μείζονας ὄρους διαφορὰν ἔχειν πρὸς τοὺς ἐλάττονας αὐτοὺς τοὺς ἐλάττονας καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ διαφορὰν πρὸς διαφορὰν αὐτῇ τῇ ἐλάττονι διαφέρειν ἐν διπλασίῳ λόγῳ ἐκτιθεμένων τῶν ὄρων, ἐν δὲ τριπλασίῳ διαφορὰν ἔξουσι δις τὸν ὑπ' αὐτόν οἱ ὅροι καὶ αἱ διαφοραί, ἐν δὲ τετραπλασίῳ τρίς καὶ ἐν πενταπλασίῳ τετράκις καὶ τοῦτο μέχρι παντός.

2.24.4 οὐ μόνον δὲ ἐν πολλαπλασίοις ἀναλογίαι γίνονται γεωμετρικαί, ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιμορίοις εἵδουσιν ἅπασι καὶ ἐπιμερέσι καὶ μικτοῖς, καὶ τὸ ἐξαίρετον ἰδίωμα τῆς μεσότητος ταύτης ἐπὶ πασῶν σώζεται, τῶν μὲν συνημμένων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, τῶν δὲ ἐν διαζεύξει ἢ καὶ ἐν πλείοσιν ὅροις, κἂν μὴ συνημμένοι ὦσιν, ἀρτιοταγεῖς δέ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. Παράδειγμα δὲ τοῦ ἐν πάσαις ταῖς σχέσεσι πολυπλασίαις τε παντοίαις καὶ ἐπιμορίοις παντοίαις καὶ ἐπιμερέσι παντοίαις καὶ μικταῖς παντοίαις τὸ τῆς ἀναλογίας ταύτης ἰδίωμα σώζεσθαι ἔστω ἱκανὸν καὶ αὐτάρκες ἡμῖν ἐκεῖνο, ἐν ᾧ ἀπὸ ἰσότητος ἐπλάσσομεν κατὰ τὰ τρία προστάγματα πάντα τὰ τοῦ ἀνίσου εἶδη ἐξ ἀλλήλων ὀρθῶς τε τιθεμένων καὶ ἀναστρεφομένων· ἐκάστη γὰρ πλάσις καὶ ἔκθεσις ἀναλογία ἐστὶ γεωμετρικὴ πάντα τὰ λεχθέντα ἰδιώματα περιέχουσα καὶ τέταρτον τὸ ἐν τε μείζοσιν ὅροις ἐν τε ἐλάττοσι τὸν αὐτόν

διαφυλάττειν λόγον· ἀλλὰ καὶ ἐὰν τὸν κοινὸν στίχον ἑτερομηκῶν τε καὶ τετραγώνων ἐκθώμεθα ἓνα παρ' ἓνα περιέχοντα τοὺς ἐν ἀμφοτέροις αὐτοῖς, εἴτα κατὰ τρεῖς ἀπὸ μονάδος ἀποτεμνόμενοι σκοπῶμεν αἰεὶ τὸν τῶν προτέρων ὕστερον ἀρχὴν τῶν ὑστέρων τιθέμενοι, εὐρήσομεν ἀπὸ πολλαπλασίου σχέσεως, τουτέστι διπλασίου, πάσας τὰς ἐπιμορίους ἐξῆς ἐπιφαινομένας, ἡμιόλιον, εἴτα ἐπίτριτον, εἴτα ἐπιτέταρτον καὶ ἐφεξῆς.

2.24.6 εὐκαιρότατον δ' ἂν εἴη ἐνταῦθα γενομένους ἐπιμνησθῆναι παρακολουθήματος χρησιμεύοντος ἡμῖν εἰς Πλατωνικόν τι θεώρημα· οἱ μὲν γὰρ ἐπίπεδοι μιᾷ μεσότητι συνέχονται πάντως, οἱ δὲ στερεοὶ δυσὶν ἀνάλογον κειμέναις· δύο γὰρ τετραγώνων συνεχῶν εἷς μόνος εὐρίσκεται μέσος ἀναλογίαν σώζων γεωμετρικὴν, πρόλογος μὲν πρὸς τὸν ἐλάττονα, ὑπόλογος δὲ πρὸς τὸν μείζονα, οὐδέποτε δὲ πλείονες· δύο ἄρα διαστήματα θεωροῦμεν πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων αὐτοῦ τοῦ μέσου ἐν σχέσει λόγων ὁμοίων.

2.24.7 πάλιν δὲ δύο κύβων συνεχῶν δύο μόνον εὐρίσκονται ἀνάλογον μέσοι ὅροι κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν, πλείονες δὲ οὐδέποτε· τρία ἄρα διαστήματα, ἐν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν μέσων πρὸς ἀλλήλους, δύο δὲ τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων πρὸς τοὺς μέσους ἐκατέρωθεν. οὕτω τὰ μὲν στερεὰ σχήματα λέγεται τριχῇ διαστατά, τὰ δὲ ἐπίπεδα διχῇ, οἷον ὁ α καὶ ὁ δ ἐπίπεδοι, μέσος δὲ ἀνάλογον ὁ β, ἢ οἷον δ, θ, δύο τετράγωνοι, μέσος δὲ αὐτῶν ἀνάλογον ὁ ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐχόμενος ὑπὸ τοῦ μείζονος καὶ ἔχων τὸν ἐλάττονα, ἐν ᾧ καὶ ἡ διαφορὰ διαφορὰν ἔχει.

2.24.9 τούτου δ' αἴτιον, ὅτι αἱ τῶν δύο τετραγώνων πλευραὶ, ἑκατέρα μία ἰδία, αὐτὸν τὸν ζ ἅμα ἀμφοτέραι ἐγέννησαν· ἐν δὲ κύβοις, οἷον τῷ η καὶ τῷ κζ, μία μὲν οὐκέτι, δύο δὲ μεσότητες εὐρίσκονται ὅ τε ιβ καὶ ιη, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑαυτάς τε καὶ τοὺς ὅρους ποιοῦσαι, ἐν ᾧ καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ· καὶ τούτου δ' αἴτιον τὸ τῶν κυβικῶν πλευρῶν μίγδην σύστημα εἶναι τὰς δύο μεσότητας, δις β τρίς καὶ τρίς γ δίς.

2.24.10 ἐὰν μὲν οὖν καθόλου τετράγωνος τετράγωνον λάβῃ, τουτέστι πολυπλασιάσῃ, τετράγωνον πάντως ποιῇ, ἂν δὲ τετράγωνος ἑτερομήκη [ἢ ἑτερομήκης τετράγωνον], οὐδέποτε τετράγωνος ἀποτελεῖται, κἂν κύβος κύβον, κύβος πάντως γενήσεται, ἐὰν δὲ ἑτερομήκης κύβον [ἢ κύβος ἑτερομήκη], οὐδέποτε κύβος, καθάπερ ἀμέλει ἂν ἄρτιος ἄρτιον πολυπλασιάσῃ, πάντως ἄρτιος γεννᾶται, κἂν περισσὸς περισσόν, πάντως περισσός, ἂν δὲ περισσὸς ἄρτιον ἢ ἄρτιος περισσόν, πάντως ὁ γινόμενος ἔσται ἄρτιος, οὐδέποτε δὲ περισσός.

2.24.11 ταῦτα δὲ τῆς οἰκείας σαφηνείας ἐπιλήψεται ἐν τῇ Πλατωνικῇ συναναγνώσει κατὰ τὸν τοῦ λεγομένου γάμου τόπον ἐν τῇ Πολιτείᾳ ἀπὸ προσώπου τῶν Μουσῶν παρεισαγομένου· ὥστε ἐπὶ τὴν τρίτην ἀναλογίαν τὴν καλουμένην ἀρμονικὴν μεταβάντες διαιρῶμεν. Ἔστι γὰρ ἡ τῇ τρίτῃ τάξει μεσότης ἀρμονικὴ καλουμένη, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ὁ μέσος θεωρῇται πρὸς τοὺς ἄκρους μήτε ἐν λόγῳ τῷ αὐτῷ ἐξεταζόμενος, τοῦ μὲν πρόλογος, τοῦ δὲ ὑπόλογος, ὡς ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς, μήτε ἐν διαστήμασι μὲν ἴσοις, λόγων δὲ ἑτερότητι, ὡς ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀλλ' ὅταν, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον ὅρον ἔχει, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ παρὰ τὸν μέσον πρὸς τὴν τοῦ μέσου διαφορὰν παρὰ τὸν ἐλάχιστον, οἷον γ, δ, ζ ἢ πάλιν β, γ, ζ· ὁ γὰρ ζ τοῦ δ τῷ αὐτοῦ τρίτῳ ὑπερέχει, τρίτον γὰρ τοῦ ζ τὰ β, καὶ ὁ γ τοῦ δ λείπεται τῷ αὐτοῦ τρίτῳ, τοῦ γὰρ γ τρίτον μονάδας· ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ προτέρου ὑποδείγματος οἱ τε ἄκροι ἐν διπλασίῳ λόγῳ καὶ αἱ τούτων πρὸς τὸν μέσον διαφοραὶ πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ διπλασίονι πρὸς ἀλλήλας, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἑκατέρα ἐν τριπλασίῳ.

2.25.2 Ἰδίωμα δὲ ἔχει ὑπεναντίον, ὡς προέφαμεν, τῷ κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ὅροις μείζονες ἦσαν οἱ λόγοι, ἐλάττονες δὲ ἐν τοῖς μείζοσιν, ὥδε δὲ ἀνάπαλιν οἱ μὲν ἐν τοῖς μείζοσι μείζονες, οἱ δὲ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ἐλάττονες, ἵνα ὡς ἐν μεσότητι ἀμφοῖν τῇ

γεωμετρικῇ εἰκότως ἡ τῶν ἐκατέρωθι λόγων ἰσότης μεταίχμιον οὖσα τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάττονος ἐνθεωρεῖται.

2.25.3 ἔτι ἐν μὲν τῇ ἀριθμητικῇ ὁ μέσος ἑαυτοῦ μέρει τῷ αὐτῷ μείζων τε καὶ ἐλάττων τῶν ἐκατέρωθι φαίνεται, αὐτῶν δὲ ἐκείνων ἄλλω καὶ ἄλλω μείζων ἢ ἐλάττων, ἐν δὲ τῇ ἀρμονικῇ ταύτῃ ὑπεναντίως· ἑαυτοῦ μὲν γὰρ ὁ μέσος ἐτέρω τε καὶ ἐτέρῳ μείζων τε καὶ ἐλάττων τῶν ἐκατέρωθι ἐστίν, αὐτῶν δὲ ἐκείνων τῶν ἐκατέρωθι πάντως τῷ αὐτῷ, ἥτοι γὰρ ἐκατέρων ἡμίσει ἢ ἀμφοτέρων τρίτῳ· ἡ δὲ γεωμετρικὴ ὡς ἐν μεταίχμῳ ἀμφοῖν οὔτε ἐν τῷ μέσῳ μόνον οὔτε ἐν τοῖς ἄκροις μόνον, ἀλλὰ καὶ ἐν ἀμφοτέροις, μέσῳ καὶ ἄκρῳ.

2.25.4 ἔτι ἡ ἀρμονικὴ ἔχει ἴδιον συμβεβηκὸς τὸ τοὺς ἄκρους συντεθέντας καὶ πολυπλασιασθέντας ὑπὸ τοῦ μέσου διπλάσιον ἀποτελεῖν τοῦ ἐξ ἀλλήλων πολυπλασιασμοῦ.

2.25.5 ἐκλήθη δὲ ἀρμονικὴ ἡ τοιαύτη μεσότης, ὅτι ἡ μὲν ἀριθμητικὴ ποσῷ διεκρίνετο ἰσότητα κατὰ τοῦτο ἐν τῇ τῶν ὄρων διαστάσει πρὸς ἀλλήλους παρεχομένη, ἡ δὲ γεωμετρικὴ ποιότητι τὰς σχέσεις ὁμοίας κατὰ τὸ ποιὸν τῶν ὄρων πρὸς ἀλλήλους ἀποδιδούσα, αὕτη δὲ κατὰ τὸ πρὸς ἕτερόν πως ἐν ἐτέροις καὶ ἐτέροις εἶδεσι φανταζομένη· οὔτε γὰρ ἐν ὅροις μόνον οὔτε ἐν διαφοραῖς μόνον, ἀλλ' ἐκ μέρους μὲν ἐν ὅροις, ἐκ μέρους δὲ ἐν διαφοραῖς· ὡς γὰρ ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ τοῦ μεγίστου διαφορὰ πρὸς τὸν παρ' αὐτὸν μέσον πρὸς τὴν τοῦ ἐλαχίστου πρὸς τὸν αὐτὸν μέσον καὶ ἀνάπαλιν. Τὸ δὲ πρὸς τι ἐπέγνωμεν ἐν τῇ τοῦ ὄντος ἀνωτέρω φρασθείσῃ διαιρέσει τῆς ἀρμονικῆς ἴδιον θεωρίας, ἀλλὰ καὶ οἱ μουσικοὶ τῶν ἐν ἀρμονίᾳ συμφωνιῶν λόγοι ἐν ταύτῃ μαῖλλον εὐρίσκονται τῇ μεσότητι· στοιχειωδέστατος μὲν ὁ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὡς δὲ πρὸς γ, ὅρος πρὸς ὄρον ἐν τῷ κατὰ τὸν διπλάσιον ὑποδείγματι ἢ διαφορὰ πρὸς διαφορὰν ἐν τῷ κατὰ τὸν τριπλάσιον, τοῦ γὰρ ζ πρὸς β ἢ πάλιν τοῦ ζ πρὸς γ αὐταὶ αἱ διαφοραὶ· μετὰ δὲ τοῦτον εὐθύς ὁ διὰ πέντε ὑπάρχων ἡμιόλιος τοῦ γ πρὸς β ἢ πάλιν τοῦ ζ πρὸς δ, ὄρου πρὸς ὄρον· εἴτα τούτων ἀμφοτέρων σύστημα τοῦ τε ἡμιολίου καὶ τοῦ ἐπιτρίτου ὁ διὰ πασῶν ἐφεξῆς αὐτοῖς κείμενος, ἐν διπλασίῳ ὑπάρχων λόγῳ, ὡς ζ πρὸς γ ἐν ἀμφοτέροις ὑποδείγμασιν, ὅρος πρὸς ὄρον· ἢ ὁ ἐπὶ τούτῳ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε, τριπλάσιον σώζων ἀμφοτέρων ἅμα τὸν λόγον, σύστημα ὑπάρχων διπλασίου ἅμα καὶ ἡμιολίου, ὥσπερ τοῦ ζ πρὸς β, ὄρου πρὸς ὄρον, ἐν τῷ κατὰ τὸν τριπλάσιον ὑποδείγματι, καὶ πάλιν διαφορὰς πρὸς διαφορὰν ἐν τῷ αὐτῷ, ἐν δὲ τῷ κατὰ τὸν διπλάσιον ὄρου μεγίστου πρὸς διαφορὰν αὐτοῦ καὶ τοῦ μέσου ἢ διαφορὰς τῶν ἄκρων πρὸς διαφορὰν τῶν ἐλαττόνων· τελευταῖον δὲ καὶ μέγιστον σύμφωνον τὸ λεγόμενον δις διὰ πασῶν ὡσανεὶ δις διπλάσιον, ὑπάρχον δὲ ἐν λόγῳ τετραπλασίῳ, ὡς ὁ μέσος ὅρος τῆς ἐν διπλασίῳ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων διαφορὰν ἢ ἡ τῶν ἄκρων διαφορὰ τῆς ἐν τριπλασίῳ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων.

2.26.2 Τινὲς δὲ αὐτὴν ἀρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἀρμονίᾳ, γεωμετρικὴν δὲ ἀρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις ἴσα ἰσάκις· ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπρίζεται, πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ, γωνία δὲ η, ἐπίπεδα δὲ ζ· μεσότης ἄρα ὁ η τῶν ζ καὶ τῶν ιβ κατὰ τὴν ἀρμονικὴν· ὡς γὰρ οἱ ἄκροι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως ἡ τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον διαφορὰν, καὶ πάλιν ὁ μέσος ἄλλω μὲν ἑαυτοῦ μέρει μείζων ἐστὶ τοῦ ἐλάττονος, ἄλλω δὲ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ἐνὶ μέντοι καὶ τῷ αὐτῷ αὐτῶν τῶν ἄκρων μέρει καὶ μείζων καὶ ἐλάττων ὑπάρχει· καὶ ἐτέρως οἱ ἄκροι συντεθέντες καὶ ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντες διπλάσιον ἀποτελοῦσι τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων πρὸς ἀλλήλους γινομένου· καὶ ἡ μὲν διὰ τεσσάρων ἐστὶ τοῦ η πρὸς τὸν ζ, ἐπιτρίτος γάρ, ἡ δὲ διὰ πέντε τοῦ ιβ πρὸς τὸν η, ἡμιόλιος γάρ, ἡ δὲ διὰ πασῶν ἀμφοῖν οὖσα σύστημα ἢ τοῦ ιβ πρὸς τὸν ζ, διπλασία γάρ, ἡ δὲ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε τριπλάσιος οὖσα ἢ τῶν ἄκρων διαφορὰ ὑπάρχει πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, ἡ δὲ δις διὰ πασῶν ὁ μέσος ὅρος πρὸς τὴν ἑαυτοῦ καὶ τοῦ

ἐλάττονος διαφοράν· οἰκειοτάτως ἄρα ἀρμονικὴ προσωνομάσθη. Ὡσπερ δὲ ἐν τῇ τοῦ μουσικοῦ κανόνος κατατομῇ χορδῆς μιᾶς τεταμένης ἢ αὐλοῦ μήκους ἐνὸς ἐκκειμένου τῶν ἄκρων ἀμετακινήτων ὑπαρχόντων, μεταλαμβάνουσης δὲ τῆς μεσότητος ἐν μὲν τῷ αὐτῷ διὰ τρυπημάτων, ἐν δὲ τῇ χορδῇ δι' ὑπαγωγέως, ἄλλον ἐξ ἄλλου τρόπον ἀποτελεῖσθαι δύνανται αἱ προλεχθεῖσαι μεσότητες, ἀριθμητικὴ τε καὶ γεωμετρικὴ καὶ ἀρμονικὴ, ἵνα εἰκότως καὶ ἐτυμώτατα καλοῖντο διὰ τὴν τοῦ μέσου ὅρου μετάστασιν τε καὶ μεταγωγὴν διαφόρων συντελούμεναι, οὕτως καὶ ἐν ἀριθμητικοῖς δυσὶν ὅροις, εἴτε περισσοῖς ἀμφοτέροις εἴτε καὶ ἀρτίοις, εὐλογόν ἐστι καὶ ἅμα δυνατόν μένουσιν ἐν τῷ αὐτῷ καὶ μὴ μεταβιβαζομένοις μεσότητα καθ' ἐκάστην τῶν τριῶν ἐφαρμόζουσιν ἐντάσσεσθαι· κατὰ μὲν ἀριθμητικὴν ἴσω ὑπερέχουσιν καὶ ὑπερεχομένην, κατὰ δὲ γεωμετρικὴν ὁμοίῳ λόγῳ διαφορουμένην, κατὰ δὲ ἀρμονικὴν τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων τῶν αὐτῶν μείζονά τε καὶ ἐλάττονα.

2.27.2 προκείσθωσαν δὴ πρῶτον ἄρτιοι ὅροι δύο, ὧν μεταξὺ αἱ τρεῖς μεσότητες ζητητέον πῶς ἂν ταγεῖεν καὶ τίνες, καὶ ἔστωσαν ὅ τε ι καὶ ὁ μ. πρῶτον οὖν τὴν ἀριθμητικὴν ἐναρμόζω καὶ ἔστιν κε καὶ τὰ παρακολουθήματα αὐτῆς σώζεται πάντα κἀνταῦθα· ὥς γὰρ ἕκαστος ὅρος πρὸς ἑαυτόν, οὕτω καὶ διαφορὰ πρὸς διαφοράν, ἄρα ἐν ἰσότητι, καὶ ὅσῳ ὁ μείζων τοῦ μέσου, τοσοῦτῳ καὶ οὗτος τοῦ ἐλάττονος ὑπερφέρει, καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις διπλασία τοῦ μέσου καὶ ὁ τῶν ἐλαττόνων ὅρων λόγος μείζων τοῦ τῶν μειζόνων καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐλάττον τοῦ ἀπὸ τοῦ μέσου τῷ ἀπὸ τῶν διαφορῶν τετραγώνῳ, καὶ ὁ μέσος τῷ αὐτῷ ἰδίῳ μέρει καὶ μείζων ὑπάρχει καὶ ἐλάττων τῶν ἄκρων, ἐν δὲ τοῖς ἄκροις θεωρουμένῳ ἐτέρῳ καὶ ἐτέρῳ.

2.27.4 ἐὰν δὲ τὴν κ μεσότητα ἐμβάλλω εἰς τοὺς προκειμένους ἀρτίους ὅρους, τὰ τῆς γεωμετρικῆς ἰδιώματα ἀνακύπτει, ἐξαπόλλυνται δὲ τὰ τῆς ἀριθμητικῆς· οἷός γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν μέσον, τοιοῦτος καὶ ὁ μέσος πρὸς τὸν μικρόν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου καὶ αἱ διαφοραὶ πρὸς ἀλλήλας ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ θεωροῦνται, ἐν ᾧ καὶ οἱ ὅροι, καὶ οὔτε ἐν τοῖς ἄκροις καθαροῖς ἢ τοῦ μέρους ταυτότης καθ' ὑπεροχὴν καὶ ἔλλειψιν οὔτε ἐν μέσῳ καθαρῷ, ἀλλ' ἐν μέσῳ καὶ θατέρῳ τῶν ἄκρων παρὰ μέρος, ἔν τε μείζουσιν ὅροις καὶ ἐλάττοσιν ἴσος λόγος.

2.27.5 ἐὰν δὲ τὸν ις ἀντιλάβω μέσον ὅρον, πάλιν τὰ μὲν τῶν προτέρων δυοῖν μεσοτήτων ἰδιώματα ἐκποδῶν γίνεται, τὰ δὲ τῆς ἀρμονικῆς ἀναφαίνεται πρὸς τοὺς αὐτοὺς διαμένοντα δύο ἀρτίους ὅρους· ὥσπερ γὰρ ὁ μείζων πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν μειζόνων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, καὶ ὅσοις μέρεσιν ὁ μέσος ἐλάττων τοῦ μείζονος ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι θεωρουμένοις, τοσοῦτοις ὁ αὐτὸς τοῦ ἐλάττονος μείζων ἐν αὐτῷ τῷ ἐλάττονι θεωρουμένοις, καὶ ὁ μὲν ἐν τοῖς μείζουσιν ὅροις λόγος μείζων, ἐλάττων δ' ὁ ἐν τοῖς ἐλάττοσιν, ὅπερ οὐκ ἐπ' ἄλλης, καὶ συντεθέντα τὰ ἄκρα καὶ ὑπὸ τοῦ μέσου πολυπλασιασθέντα διπλάσιον ἀποτελεῖ τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένου.

2.27.6 ἂν δὲ οἱ δύο ἄκροι ὅροι μὴ ἄρτιοι ἐκτεθῶσιν, ἀλλὰ περισσοί, οἷον ε, με, ὁ μὲν αὐτὸς ὅρος ὁ κε ἀριθμητικὴν ποιήσει· αἴτιον δὲ τούτου, ὅτι ἐφ' ἐκάτερα αὐτοῦ ἴσῳ ἀριθμῷ ὑπερέβησάν τε καὶ ὑπέβησαν οἱ ὅροι τὴν αὐτὴν πρὸς αὐτὸν διατηροῦντες διαφορὰς ποσότητα· ὁ δὲ ιε ἀντιτεθεὶς τὴν γεωμετρικὴν ἀποδίδωσι τριπλάσιός τε καὶ ὑποτριπλάσιος ἐκατέρου ὧν· ὁ δὲ θ μεταλαβὼν τὸ μέσος εἶναι τὴν ἀρμονικὴν ἀποδίδωσιν, οἷς γὰρ μέρεσι μείζων τοῦ ἐλάττονός ἐστι, τέσσαρσι πέμπτοις αὐτοῦ τοῦ ἐλάττονος, τούτοις τοῦ μείζονος ἐλάττων ἐστὶν ἐν αὐτῷ τῷ μείζονι θεωρουμένοις, τέσσαρσι γὰρ πέμπτοις, καὶ πάντα τὰ προλεχθέντα ἰδιώματα ἐφαρμόζων σύμφωνα εὐρήσεις. Ἐφοδος δέ, ὥς ἂν ἐντέχνως πλάσσοις τοὺς προδειχθέντας ὅρους κατὰ τὰς τρεῖς ἀναλογίας, τοιαύτη ἔστω σοι· ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προχειρισθέντων ὅρων περισσῶν τε καὶ ἀρτίων ἀριθμητικὴν μὲν εὐρήσεις, συνθεὶς τὰ ἄκρα τούτων τὸ ἥμισυ μέσον τάξον ἢ τὴν τοῦ μείζονος ὑπεροχὴν πρὸς τὸν ἐλάττονα διχῇ τεμὼν καὶ προσθεὶς τῷ ἐλάττονι μέσον ἔξεις· γεωμετρικὴν δέ, τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων προμήκους τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὐρὼν μέσον ὅρον

ποιήσεις ἢ ὃν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους οἱ ὅροι λόγον ἰδών, τοῦτον δίχα τεμὼν μέσον ποιήσον, οἷον ἐπὶ τετραπλασίου διπλάσιον· ἀρμονικὴν δέ, τῶν ἄκρων τὴν διαφορὰν ποιητέον ἐπὶ τὸν ἐλάττονα καὶ τὸν γενόμενον παραβλητέον ἐπὶ τὸν σύνθετον ἐκ τῶν ἄκρων, εἴτα τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς προσθετέον τῷ ἐλάττονι, καὶ ἔσται ὁ γινόμενος ἀρμονικὴ μεσότης.

2.28.1 Καὶ τάδε μὲν περὶ τῶν παρὰ τοῖς παλαιοῖς θρυλλουμένων τριῶν ἀναλογιῶν, ἃς καὶ ἐπιτηδὲς σαφέστερον καὶ πλατύτερον διηρθρώσαμεν, ὅτι πολλάκις τε καὶ ποικιλώτερον ἐντυγχάνειν ἦν αὐταῖς ἐν τοῖς ἀναγνώσμασι· τὰς δ' ἐξῆς ἐπιτιμητέον οὐ πάνυ φερομένας παρὰ τοῖς ἀρχαίοις, ἀλλὰ εἰς μόνην ἐμπειρίαν ἡμῶν αὐτῶν καὶ τὸ οἶονεῖ πλήρες τοῦ συλλογισμοῦ παραλαμβανομένας.

2.28.2 εἰσὶ δὲ αὗται τάξει ἐκφερόμεναι ὑφ' ἡμῶν κατὰ ὑπεναντίωσιν τὴν πρὸς τὰς πεφρασμένας ἀρχετύπους τρεῖς, εἴπερ καὶ ἐξ αὐτῶν τούτων ἀναπλάσσονται, τάξεως τυγχάνουσαι ὁμοίας.

2.28.3 τετάρτη μὲν ἡ καὶ ὑπεναντία λεγομένη διὰ τὸ ἀντικεῖσθαι καὶ ἀντιπεπονθέναι τῇ ἀρμονικῇ ὑπάρχει, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ τῶν ἐλαττόνων διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν μειζόνων ἔχη, οἷον γ, ε, ζ, ἐν γὰρ διπλασίῳ τὰ συγκριθέντα ὁράται· φανερόν δέ, καθ' ἃ ἠναντίωται τῇ ἀρμονικῇ· τῶν γὰρ αὐτῶν ἄκρων ἀμφοτέραις ὑπαρχόντων καὶ ἐν διπλασίῳ γε λόγῳ, ἐν μὲν τῇ πρὸ ταύτης ἡ τῶν μειζόνων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων τὸν αὐτὸν ἔσωζε λόγον, ἐν ταύτῃ δὲ ἀνάπαλιν ἡ τῶν ἐλαττόνων πρὸς τὴν τῶν μειζόνων ἴδιον δὲ ταύτης ἰστέον ἐκεῖνο, τὸ διπλάσιον ἀποτελεῖσθαι τὸ ὑπὸ τοῦ μείζονος καὶ μέσου πρὸς τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ ἐλάχιστου, τοῦ γὰρ πεντάκις γ διπλάσιον τὸ ἐξάκις ε.

2.28.4 αἱ δὲ δύο μεσότητες πέμπτη καὶ ἕκτη παρὰ τὴν γεωμετρικὴν ἐπλάσθησαν ἀμφοτέραι, διαφέρουσι δ' ἀλλήλων οὕτως· ἡ μὲν πέμπτη ἔστιν, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτω καὶ ἡ αὐτῶν τούτων διαφορὰ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου πρὸς τὸν μέσον, οἷον διπλάσιος γὰρ ὁ μὲν δ τοῦ β, μέσος ὅρος τοῦ ἐλάχιστου, ὁ δὲ β τοῦ α, ἐλάχιστων διαφορὰ πρὸς διαφορὰν μεγίστων· ὁ δ' ὑπεναντίον αὐτὴν τῇ γεωμετρικῇ ποιεῖ, ἐκεῖνό ἐστιν, ὅτι ἐπὶ μὲν ἐκείνης ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα, οὕτως ἡ τοῦ μείζονος πρὸς τὸν μέσον ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μέσου πρὸς τὸν ἐλάττονα, ἐπὶ δὲ ταύτης ἀνάπαλιν ἡ τοῦ ἐλάττονος πρὸς τὴν τοῦ μείζονος ἴδιον δ' ὅμως καὶ ταύτης ἐστὶ τὸ διπλάσιον γίνεσθαι τὸ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ μέσου τοῦ ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ ἐλάχιστου, τὸ γὰρ πεντάκις δ διπλάσιον τοῦ πεντάκις β.

2.28.5 ἡ δὲ ἕκτη γίνεται, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ἢ ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν μέσον, οὕτως ἡ τοῦ μέσου παρὰ τὸν ἐλάχιστον ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου παρὰ τὸν μέσον, οἷον α, δ, ζ, ἐν ἡμιολίῳ γὰρ ἑκάτεροι λόγῳ· εἰκυῖα δ' αἰτία καὶ ταύτῃ τῆς πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ὑπεναντιότητος, ἀναστρέφει γὰρ κἀνταῦθα ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης. Καὶ αἱ μὲν παρὰ τοῖς πρόσθεν θρυλλούμεναι ἐξ μεσότητες αἶδε εἰσὶ, τρεῖς μὲν αἱ πρωτότυποι μέχρι Ἀριστοτέλους καὶ Πλάτωνος ἄνωθεν ἀπὸ Πυθαγόρου διαμείνασαι, τρεῖς δ' ἕτεραι ἐκείναις ὑπεναντίαι τοῖς μετ' ἐκείνους ὑπομνηματογράφοις τε καὶ αἰρετισταῖς ἐν χρήσει γινόμεναι· τέσσαρας δὲ τινὰς ἐτέρας μετακινούντες τοὺς τούτων ὅρους τε καὶ διαφορὰς ἐπεξεῦρόν τινες οὐ πάνυ ἐμφανταζομένας τοῖς τῶν παλαιῶν συγγράμμασιν, ἀλλ' ὡς περιεργότερον λελεπτολογημένας, ἃς ὅμως πρὸς τὸ μὴ δοκεῖν ἀγνοεῖν ἐπιτροχαστέον τῇδε πη.

2.28.7 πρώτη μὲν γὰρ αὐτῶν, ἐβδόμη δὲ ἐν τῇ πασῶν συντάξει ἔστιν, ὅταν ἢ ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως καὶ ἡ τῶν αὐτῶν διαφορὰ πρὸς τὴν τῶν ἐλαττόνων, οἷον ζ, η, θ· ἡμιόλιος γὰρ ὁ λόγος ἑκατέρου συγκρίσει ἐνορεῖται. ὁγδόη δὲ μεσότης, ἣτις τούτων δευτέρα ἐστὶ, γίνεται, ὅταν ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν τῶν μειζόνων διαφορὰν, οἷον ζ, θ, καὶ αὕτη γὰρ ἡμιόλιος ἔχει τοὺς δύο λόγους.

2.28.9

ἡ δὲ ἐνάτη μὲν ἐν τῇ τῶν πασῶν συντάξει, τρίτη δὲ ἐν τῷ τῶν ἐφευρημένων ἀριθμῷ ὑπάρχει, ὅταν τριῶν ὄρων ὄντων, ὃν λόγον ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, τοῦτον καὶ ἡ τῶν ἄκρων ὑπεροχὴ πρὸς τὴν τῶν ἐλαχίστων ἔχη, ὡς δ, ζ, ζ. ἡ δὲ ἐπὶ πάσαις δεκάτῃ μὲν συλλήβδην, τετάρτῃ δὲ ἐν τῇ τῶν νεωτερικῶν ἐκθέσει ὁράται, ὅταν ἐν τρισὶν ὅροις ᾗ ὡς ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, οὕτως καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἄκρων πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν μειζόνων, οἷον γ, ε, η· ἐπιδιμερὴς γὰρ ὁ ἐν ἐκατέρᾳ συζυγίᾳ λόγος.

2.28.11 ἐπὶ κεφαλαίου τοίνυν οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι ἐκκείσθωσαν ὑφ' ἐν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον, πρώτης α, β, γ, δευτέρας α, β, δ, τρίτης γ, δ, ζ, τετάρτης γ, ε, ζ, πέμπτης β, δ, ε, ἕκτης α, δ, ζ, ἑβδόμης ζ, η, θ, ὀγδόης ζ, ζ, θ, ἐνάτης δ, ζ, ζ, δεκάτης γ, ε, η. Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειότητος καὶ τριχῇ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτικῆς ἐν βραχεῖ διαρθρώσω μεσότητος χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πᾶσαν τὴν ἐν μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπὴν· κυρίως γὰρ αὕτη καὶ ὡς ἀληθῶς ἀρμονία ἂν λεχθεῖ μόνῃ παρὰ τὰς ἄλλας, εἴπερ μὴ ἐπίπεδος μὴδὲ μιᾷ μόνῃ μεσότητι συνδεομένη, ἀλλὰ δυσὶν, ἴν' οὕτω τριχῇ διιστάνοιτο, ὡς ὁ κύβος ἀρμονία πρὸ βραχέος ἐσαφηνίσθη.

2.29.2 ὅταν τοίνυν δύο ὄρων ἄκρων τριχῇ διαστατῶν ἀμφοτέρων, εἴτε ἰσάκεις ἴσων ἰσάκεις, ἵνα κύβος ᾗ, ἢ ἰσάκεις ἴσων ἀνισάκεις, ἵνα ἢ δοκίδες ἢ πλινθίδες ὦσιν, εἴτε ἀνισάκεις ἀνίσων ἀνισάκεις, ἵνα σκαληνοί, δύο ὅροι εὐρίσκονται ἀνὰ μέσον ἄλλοι ἐναλλάξ πρὸς τοὺς ἄκρους τοὺς αὐτοὺς σώζοντες λόγους καὶ ἀναμίζ, ὥστε ὅποτερουοῦν αὐτῶν τὴν ἀρμονικὴν σώζοντος ἀναλογίαν τὸν λοιπὸν ἀποτελεῖν τὴν ἀριθμητικὴν· ἀνάγκη γὰρ οὕτως διακειμένων τῶν τεσσάρων ἐπιφαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλέγδην ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησιν ἀντεξεταζομένην, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν τρίτον ἀπ' αὐτοῦ, οὕτως ὁ ὑπ' αὐτὸν δεύτερος πρὸς τὸν τέταρτον· τὸ γὰρ τοιοῦτον τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἴσον ποιεῖ τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων· πάλιν δὲ ἂν ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ὑπ' αὐτὸν ἐν τοσαύτῃ δειχθῇ διαφορᾷ, ἐν ὅσῃ καὶ αὐτὸς οὗτος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, ἀριθμητικὴ ἢ τοιαύτη ἐξέτασις γίνεται καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις διπλασία τοῦ μέσου· ἐὰν δ' ὁ τρίτος ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχει καὶ ὑπερέχηται, ἀρμονικὴ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ τῆς τῶν ἄκρων συνθέσεως διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων.

2.29.3 ὑπόδειγμα αὐτῆς ἔστω τοιοῦτον ζ, η, θ, ιβ· οὐκοῦν ὁ μὲν ζ σκαληνὸς ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τρίς, ὁ δὲ ιβ ἀπὸ τοῦ δις β τρίς ἐν συνεχείᾳ μηκυνθέντων, τῶν δὲ μέσων ὁ μὲν ἐλάττων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τετράκις, ὁ δὲ μείζων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ γ τρίς, καὶ στερεοί τε οἱ ἄκροι καὶ τριχῇ διαστατοὶ καὶ ὁμογενεῖς αὐτοῖς αἱ μεσότητες, καὶ κατὰ μὲν τὴν γεωμετρικὴν ὡς ὁ ιβ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν ζ, κατὰ δὲ τὴν ἀριθμητικὴν ὅσῃ ὁ ιβ τοῦ θ ὑπερέχει, τοσοῦτῃ καὶ ὁ θ τοῦ ζ, κατὰ δὲ τὴν ἀρμονικὴν ᾧ μέρει ὁ η τοῦ ζ ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ζ τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῃ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ.

2.29.4 ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ζ ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὁ δὲ θ πρὸς ζ ἢ ὁ ιβ πρὸς η διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ὁ δὲ ιβ πρὸς ζ διὰ πασῶν ἐν διπλασίῳ· λοιπὸν δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η τονιαῖον ἐν ἐπογδῳ, ὅπερ μέτρον κοινὸν πάντων τῶν ἐν μουσικῇ λόγων, ἅτε καὶ γνωριμώτερον ὄν, ὅτι ἄρα καὶ διαφορὰ τῶν πρώτων καὶ στοιχειωδεστάτων συμφώνων πρὸς ἀλληλα ὑπάρχει. Καὶ περὶ μὲν τῶν ἐν ἀριθμοῖς ἐπιφαινομένων καὶ συμβεβηκότων τοσαῦτα ὡς ἐν πρώτῃ εἰσαγωγῇ ἀρκεῖτω.