

eul_wid: lao-aa

Ὑψικλῆς ὁ Ἀλεξανδρεὺς · Hypsicles of Alexandria

Hypsicles' Book or Elements Book XIV

Βιβλίον Ὑψικλέους ἢ Στοιχεῖα Βιβλίον ΙΔ'

Period: Ἑλληνιστική Hellenistic

Dialect: Κοινή Koine

Domain: Ἐπιστήμη Science

Format: Πραγματεία Treatise

Pr Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγεννηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καὶ ποτε ζητοῦντες τὸ ὑπὸ Ἀπολλωνίου συγγραφέν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφεῖναι τὸν Ἀπολλώνιον, αὐτοὶ δὲ ταῦτα καθάραντες ἔγραψαν, ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἐτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ περιέχοντί τινα ἀπόδειξιν περὶ τοῦ προκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθη ἐπὶ τῇ τοῦ προβλήματος ζητήσῃ. τὸ μὲν οὖν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν· καὶ γὰρ περιφέρεται δοκοῦν ὕστερον γεγράφθαι φιλοπόνως· ὅσα δ' ἐγὼ δοκῶ δεῖν, ὑπομνηματισάμενος ἔκρινα προσφωνῆσαί σοι διὰ μὲν τὴν ἐν ἅπασιν τοῖς μαθήμασι, μάλιστα δὲ ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν ἐμπειρικῶς κρινούντι τὰ ῥηθησόμενα, διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὐνοίαν εὐμενῶς ἀκουσομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη τοῦ μὲν προοιμίου πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι. Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ^[5]

¹ Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἔστω πενταγώνου πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἦχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ΔΕ εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΔΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς ΒΖΓ περιφερείας, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΓΖ, τῆς δὲ ΒΖΓ ἡμίσεια ἡ ΖΓ, καὶ ἡ ΑΓΖ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ΖΓ περιφερείας. τετραπλὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΔΓ γωνίαν. τετραπλὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΖΔΓ. διπλὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ· διπλὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ. διπλὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ. ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ. ἀλλὰ ἡ ΗΓ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΓΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΗΕ τῇ ΕΖ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΕ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΔ. συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΔΖΓ διπλὴ τῆς ΔΕ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ ΖΓ

ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Φανερόν δὴ ἐκ τοῦ ἐν τῷ ιγ' βιβλίῳ θεωρήματος, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ τῶν ε σχημάτων συγκρίσει, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον διὰ τὸ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. ^[45]

- 1 (50) γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προγραφέντος τοῦδε. Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγραφῇ, ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα καὶ ἡ τοῦ πενταγώνου συναμφοτέρος δυνάμει τῆς ἐκ τοῦ κέντρου πενταπλασία ἐστίν.
- 2 Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἦχθω ἡ ΔΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα πενταπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ τετραγώνου. Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ. τετραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑΕ, ΕΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Τούτου δεδειγμένου δεικτέον, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Ἐκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὴν δωδεκαέδρον τε καὶ εἰκοσαέδρον, καὶ ἔστω ἐν μὲν τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, τοῦ εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ. ^[25]
- 3 λέγω, ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν περὶ αὐτὰ κύκλων ἴσαι εἰσὶ, τουτέστιν ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον. Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ. ἐκκείσθω δὴ τις εὐθεΐα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. ἡ ΜΝ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ ΜΞ. δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΜΞ καὶ πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ ἴσα εἰσὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΚΛ. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα εἰσὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα εἰσὶ δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κύκλου, τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα εἰσὶ ἰε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ· προεδείχθη γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΗ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ. δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση τῇ διαμέτρῳ. Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ

εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Ἐὰν ᾗ πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ. ^[35]

- ⁴ Ἔστω πεντάγωνον ἰσοπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἦχθω ἡ ΖΗ. λέγω, ὅτι τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ. Ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΖΔ τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τρίγωνά ἐστι. καὶ πάντα ἑξάκις. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι, ἐὰν ᾗ ἰσοπλευρον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ^[5]
- ⁵ Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ τριγώνου, δύο ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ. καὶ πάντα τρίς· ἕξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα τρισὶ τοῖς ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ. ἕξ δὲ τρίγωνα τὰ ΔΒΓ δύο ἐστὶ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ. τρία ἄρα τὰ ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ δυσὶ τοῖς ΑΒΓ. καὶ πάντα δεκάκις. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΔΕ, ΒΓ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε καὶ ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου. Τούτου δήλου ὄντος δεικτέον, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν. ^[20]
- ⁶ Ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ ΓΔ, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ΑΓ. τριγώνου μὲν ἄρα ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ ἡ ΓΔ, πενταγώνου δὲ ἡ ΑΓ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΗ εὐθεῖα ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ Θ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ. Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς ΒΕ, ΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΒΕ, καὶ ἐστὶ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΕΒΓ ἡμίσεια ἡ ΕΗ, τῆς δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ, τῆς ΕΗ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἔστι δὲ καὶ τῆς Θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμημὰ ἡ ΑΓ. ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕ, Θ τῷ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕ, Θ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΕ, τῷ δὲ ὑπὸ ΖΕ, Θ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΗΕ, ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΗΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΖΕ, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ. Καὶ ἄλλως δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν, προγραφέντος τοῦδε· Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΓΘ ἔστω τριπλῇ. ^[15]

λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ AZ, BΘ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ. Ἀπὸ γὰρ τοῦ B ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ ἡ ΑΖ. πάλιν ἐπεὶ τριπλὴ ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΓΘ, διπλὴ ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ. ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΘΗ. ὥς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΘ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ AZ, ΗΘ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΓΗ. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΗΒ ἴση. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ τῷ ὑπὸ ΖΑ, ΗΘ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΗΒ δύο ἐστὶ τρίγωνον τὰ ΑΒΔ. καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ τρίγωνον τὰ ΑΒΔ. ὥστε καὶ πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ AZ, ΗΘ δέκα ἐστὶ τρίγωνον. δέκα δὲ τρίγωνον δύο ἐστὶ πεντάγωνον. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ AZ, ΗΘ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν διπλὴ ἐστὶν ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, τὸ ὑπὸ AZ, ΗΘ διπλοῦν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ AZ, ΘΓ. δύο ἄρα τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ AZ, ΗΘ. καὶ δέκα ἄρα τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ πέντε τοῖς ὑπὸ AZ, ΗΘ, τουτέστι δύο πενταγώνοις. ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ. πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ AZ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ AZ, ΒΘ, ἐπειδὴ πενταπλὴ ἐστὶν ἡ ΒΘ τῆς ΘΓ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ AZ, ΒΘ ἴσον ἐστὶν ἐνὶ πενταγώνῳ. Τούτου δήλου ὄντος νῦν ἐκκείσθω ὁ περιλαμβάνων κύκλος τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ τῆς ΕΗ διπλὴ, τριπλὴ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΘΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΔ τῇ ΗΜ. ^[15]

⁸ τρίγωνον ἄρα ἰσοπλεύρου ἐστὶν ἡ ΔΜ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΜ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, οὕτως τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὥς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΗ. καὶ ὥς ἄρα δώδεκα αἱ ΒΘ πρὸς εἴκοσι τὰς ΔΗ, οὕτως δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ εἰσι δώδεκα μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ· ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ ἐστὶ πενταπλὴ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΓΘ ἐστὶν ἑξαπλὴ. ἔξ ἄρα αἱ ΒΘ ἴσαι εἰσι πέντε ταῖς ΒΓ. καὶ τὰ διπλάσια δέ. εἴκοσι δὲ αἱ ΔΗ δέκα εἰσὶν αἱ ΔΜ· διπλὴ γὰρ ἡ ΔΜ τῆς ΔΗ. ὥς ἄρα δέκα αἱ ΒΓ πρὸς δέκα τὰς ΔΜ, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ ἡ τοῦ κύβου πλευρά, ἡ δὲ ΔΜ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ὥς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ εὐθείας οἰασθηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὥς ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. ^[5]

⁹ Ἔστω ὁ περιλαμβάνων κύκλος τὸ τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων ὁ ΑΘΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις, ὥς ἔτυχεν, ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ ΓΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμήμα ἔστω ἡ ΓΔ. δεκαγώνου ἄρα πλευρὰ ἐστὶν ἡ ΓΔ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. ἐκκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η. ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρά, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μεῖζόν ἐστὶ τμήμα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης. ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ΒΓ [τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ], ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐναλλάξ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ

ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ· μείζον γάρ ἐστι τμήμα ἢ Ζ τῆς Η. καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ. ἐναλλάξ καὶ ἀνάπαλιν· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε, οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ζ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓΔ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΒΔ. καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δυναμένης τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος. καὶ ἐστὶν ἢ μὲν Η κύβου πλευρά, ἢ δὲ Ε εἰκοσαέδρου. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὥς ἢ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἐλάττον τμήμα, οὕτως ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. ^[45]

¹⁰ Καὶ δεικτέον, ὅτι ὥς ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τέ εἰσι καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πεσοῦνται. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου τό τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι εἰσὶν. ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοῦψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὥς αἱ βάσεις. ὥς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἢ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. καὶ ὥς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτως δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἔχουσας. καὶ δώδεκα μὲν πεντάγωνα ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφάνεια, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. ἔστιν ἄρα ὥς ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἰβ πυραμίδες πενταγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἔχουσας. καὶ εἰσι ἰβ μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ὥς ἄρα ἢ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὥς δὲ ἢ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐδείχθη ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν. καὶ ὥς ἄρα ἢ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν, οὕτως τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ὅτι δέ, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτως. Τετμήσθω γὰρ ἢ μὲν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἔστω ἢ ΑΓ. ^[5]

¹¹ ὁμοίως δὲ καὶ ἢ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἔστω ἢ ΔΖ. λέγω, ὅτι ὥς ὅλη ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ὅλη ἢ ΔΕ πρὸς τὸ μείζον τμήμα τὴν ΔΖ. Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ, ἔστιν ἄρα ὥς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. καὶ ὥς τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ συνθέντι ὥς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὥστε καὶ ὥς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΓ

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. καὶ μήκει ὡς συναμφοτέρος ἢ ΑΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ, τουτέστι δύο αἱ ΑΒ, πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΔΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ, πρὸς τὴν ΔΖ. καὶ τὰ ἡμίση, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. Καὶ ὅτι εὐθείας οἰασθηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. ^[5]

- ¹² δεδειγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προσενηγεμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, δηλον, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἔξει εὐθείας ἡσθηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ὡς ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος. Τούτων δὲ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων δηλον, ὅτι, ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔξει εὐθείας ἡσθηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως εὐθείας ἡσθηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα, ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, εὐθείας ἡσθηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμήμα. ^[35]