

eul_wid: uvy-aa

Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης · Eutocius of Ascalon

Commentaries-the Books-the Sphere and Cylinder

Ὑπομνήματα εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου

Period: Ὀψιμαρχαία [Late Antique](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Μαθηματικά [Mathematics](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

² (1t) Εἰς τὸ α'. Εἰς τὰ περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδους οὐδένα τῶν πρὸ ἡμῶν ἀξίαν εὐρῶν σύνταξιν καταβεβλημένον καὶ κατανοήσας μὴ δι' εὐμάρειαν τῶν θεωρημάτων τοῦτο παροραθῆναι· ἐπιστάσεως γὰρ ἀκριβοῦς, ὡς ἴστε, καὶ εὐεπιβόλου δεῖται φαντασίας· ὠρέχθην κατ' ἐμὴν δύναμιν σαφῶς ἐκθέσθαι τὰ ἐν αὐτοῖς δυσθεώρητα προαχθεὶς μᾶλλον εἰς τοῦτο τῷ μηδένα πω καθεῖναι εἰς ταύτην τὴν ὑπόθεσιν ἢ διὰ τὴν δυσκολίαν ὀκνήσας καὶ ἅμα τὸ Σωκρατικὸν λογισάμενος, ὡς τοῦ θεοῦ συλλαμβάνοντος πάνυ εἰκὸς καὶ ἐπὶ τέλος ἡμᾶς τῆς σπουδῆς ἐλθεῖν· ἐκ τρίτων δὲ διανοηθεὶς, ὡς, εἴ τι καὶ παρὰ μέλος διὰ νεότητα φθέγγομαι, τοῦτο ὑπὸ τῆς σῆς περὶ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν ἐπιστημονικῆς θεωρίας καὶ διαφερόντως περὶ τὰ μαθήματα ἐπανορθώσεως τεύξεται, ἀνέθηκά σοι, κράτιστε φιλοσόφων Ἀμμώνιε, πρέποι δ' ἂν σοι τῇ ἐμῇ σπουδῇ συνάρασθαι, καὶ εἰ μὲν ἀνεμιαῖον δόξη τὸ γράμμα, αὐτόθεν μὴδὲ εἰς ἄλλον ἐλθεῖν συγχωρήσης, εἰ δὲ τοῦ σκοποῦ μὴ πάντῃ διαμαρτάνον, δήλωσον, ἦν ἔχεις περὶ αὐτοῦ γνώμην, ὡς εἴ γε τῇ ὑμετέρᾳ κρίσει βεβαιωθῇ, πειράσομαι καὶ ἄλλο τυχὸν τῶν Ἀρχιμηδεῶν συντάξεων ἐρμηνεῦσαι. Εἰς τοὺς ὅρους. Προειπὼν τὰ μέλλοντα ἐκτίθεσθαι ὑπ' αὐτοῦ θεωρήματα τὸ σύνηθες πᾶσιν γεωμέτραις ἐν τῇ ἐκθέσει τηρῶν τὰς τε ὀνομασίας, αἷς αὐτὸς κατ' ἐξουσίαν ἐχρήσατο, καὶ τοὺς ὅρους τῶν ὑποθέσεων καὶ αὐτὰς τὰς ὑποθέσεις διὰ τῆς ἀρχῆς τοῦ συγγράμματος διασαφῆσαι βούλεται καὶ φησιν πρῶτον εἶναί τινας ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς, αἵτινες τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν εὐθειῶν ἢ πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ εἰσιν ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα.

⁴ σαφές δ' ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, εἰ γνωσόμεθα, τίνας καλεῖ τὰς ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλας γραμμάς. ἰστέον οὖν, ὅτι καμπύλας γραμμάς καλεῖ οὐχ ἀπλῶς τὰς κυκλικὰς ἢ κωνικὰς ἢ ἄκλαστον ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἀπλῶς ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν τὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν καμπύλην ὀνομάζει, μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε καὶ ἐξ εὐθειῶν σύγκειται τῇ ΑΒΓΔ. ἀλλ' ἐπειδὴ, ὡς καὶ ἀνωτέρω εἴρηται, καμπύλας γραμμάς οὐ τὰς περιφερεῖς μόνον καλεῖ, ἀλλὰ καὶ τὰς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένας, ἐκ δὲ τούτων ἦν ἡ ἐπιλογή τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλων, ἐνδεχόμενον ἂν εἴη λαβεῖν ἐπὶ τινος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης γραμμῆς δύο τυχόντα σημεῖα, ὥστε τὴν ἐπ' αὐτὰ ἐπιζευγνυμένην εὐθεῖαν ἐπὶ μηδέτερα μὲν μέρη πίπτειν τῆς γραμμῆς, ἐπ' αὐτὴν δὲ ἐφαρμόζειν. διὸ φησιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην καλεῖν γραμμὴν, ἐν ᾗ αἱ διὰ δύο ὁποιονοῦν σημείων ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἦτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη πίπτουσιν τῆς γραμμῆς ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ, τινὲς δὲ κατ' αὐτὴν, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μέρη οὐδεμίαν τὰ δὲ αὐτὰ

ἔξεστιν ἐπινοεῖν καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν. εἴτα ἐξῆς ὀνομάζει τομέα στερεὸν καὶ ῥόμβον στερεὸν σαφῶς ἐμφανίζων τὴν ἔννοιαν τῶν ὀνομάτων. μετὰ δὲ ταῦτα αἰτήματά τινα λαμβάνειν ἀξιοῖ χρησιμεύοντα αὐτῷ πρὸς τὰς ἐξῆς ἀποδείξεις καὶ ὄντα μὲν καὶ αὐτῆς τῆς αἰσθήσεως ὡμολογημένα, οὐδὲν δὲ ἥττον δυνατὰ καὶ ἀποδειχθῆναι ἔκ τε τῶν κοινῶν ἐννοιῶν καὶ ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐν τοῖς Στοιχείοις.

- ⁶ ἔστι δὲ πρῶτον τῶν αἰτημάτων τὸ τοιόνδε· πασῶν τῶν ταῦτὰ πέρατα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. ἔστω γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ εὐθεῖα μὲν τις πεπερασμένη ἢ AB, ἑτέρα δὲ τις γραμμὴ ἢ AGB τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσα τὰ A, B. φησὶν δὲ δεδόσθαι αὐτῷ τὴν AB ἐλάττωνα εἶναι τῆς AGB. λέγω οὖν, ὅτι τοῦτο ἀληθὲς ὃν ἡτήσατο. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς AGB τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AG, GB· φανερόν δὴ, ὅτι αἱ AG, GB τῆς AB μείζους εἰσίν. πάλιν δὲ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῆς AGB γραμμῆς ἄλλα τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AD, DG, GE, EB· ὁμοίως δὲ καὶ ἐνταῦθα δῆλον, ὅτι δύο μὲν αἱ AD, DG τῆς AG μείζους εἰσίν, δύο δὲ αἱ GE, EB τῆς GB· ὁμοίως δὲ, DG, GE, EB πολλῶ μείζους εἰσὶ τῆς AB. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλα σημεῖα λαβόντες μεταξὺ τῶν εἰλημμένων ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὰ νῦν ληφθέντα εὐθείας, εὐρήσομεν αὐτὰς ἔτι μείζους οὐσας τῆς AB, καὶ τοῦτο συνεχῶς ποιοῦντες τὰς μᾶλλον συνεγγιζούσας τῇ ABΓ γραμμῇ εὐθείας ἔτι μείζους εὐρήσομεν. ὥστε ἐκ τούτου συμφανὲς εἶναι αὐτὴν τὴν γραμμὴν μείζονα εἶναι τῆς AB δυνατοῦ ὄντος κατὰ πᾶν αὐτῆς σημεῖον ἐπιζεύξαντας εὐθείας λαβεῖν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένην τὴν οἷον αὐτὴν οὐσαν γραμμὴν μείζονα δεικνυμένην διὰ τῶν αὐτῶν τῆς AB· οὐ γὰρ ἄτοπον ἐν ταῖς τῶν ὁμολογουμένων ἀποδείξεσιν καὶ τοιαύτας ἐννοίας προσλαμβάνειν.
- ⁸ μετὰ δὲ τοῦτο φησιν λαμβάνειν καὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐκείνας ἀνίσους εἶναι τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας οὐσας κατὰ τὸν ἀνωτέρω εἰρημένον τρόπον· οὐ μόνον δὲ ἥρκεσεν εἰς τὸ ἀνίσους εἶναι τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι, ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν ἢ ὅλην περιλαμβάνῃ ἢ μέρος μὲν περιλαμβάνῃ, μέρος δὲ καὶ κοινὸν ἔχη· καὶ μείζονα εἶναι τὴν περιλαμβάνουσαν τῆς περιλαμβανομένης. νενοήσθωσαν γὰρ πρὸς τὸ καὶ τοῦτο κατάδηλον γενέσθαι ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμαὶ αἱ ABΓΔΕΖ καὶ AHΘΖ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ A, Z καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλαι καὶ ἔτι περιλαμβανομένη ὅλη ἢ AHΘΖ ὑπὸ τῆς ABΓΔΕΖ γραμμῆς καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχούσης αὐταῖς τῆς AZ εὐθείας. φημὶ δὴ, ὅτι καὶ ἄνισοί εἰσιν αἱ προκείμεναι γραμμαὶ, καὶ μείζων ἢ περιλαμβάνουσα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BΘ, ΓΖ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν, ἐὰν νοηθῇ ἐπιζευγνυμένη ἢ ΘΑ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ ABΘ ἐντὸς συνεσταμέναι εἰσὶν αἱ AH, HΘ, ἐλάττους εἰσὶν αἱ AH, HΘ τῶν AB, BΘ. κοινὴ προσκείσθω ἢ ΘΖ· αἱ ἄρα AH, HΘ, ΘΖ ἐλάττους εἰσὶν τῶν AB, BΘ, ΘΖ. ἀλλ' αἱ BΘ, ΘΖ ἐλάττους εἰσὶ τῶν BΓΖ· ἐντὸς γὰρ πάλιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ BΓΖ συνεσταμέναι εἰσὶν· πολλῶ ἄρα αἱ AB, BΓ, ΓΖ τῶν AH, HΘ, ΘΖ μείζους εἰσίν.
- ¹⁰ ἀλλὰ τῆς ΓΖ μείζονες αἱ ΓΔ, ΔΖ, τῆς δὲ ΔΖ αἱ ΔΕ, ΕΖ· ἔτι πολλῶ ἄρα αἱ ABΓΔΕΖ μείζους εἰσὶ τῶν AHΘΖ. σαφηνείας δὲ χάριν ὑποκείσθωσαν καὶ ἕτεραι γραμμαὶ ὁμοίως ταῖς προειρημέναις ὡς αἱ ABΓΔΕ, AZHΘΚΕ. λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ περιλαμβάνουσα. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημένα αἱ AZ, HΘ ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν πάλιν δύο αἱ ΖΛ, ΛΗ μείζους εἰσὶ τῆς ΖΗ, κοινὰ προσκείσθωσαν αἱ AZ, HΘ· αἱ ἄρα AL, ΛΘ μείζους εἰσὶ τῶν AZ, HZ, HΘ. ἀλλ' αἱ AL, ΛΘ ἐλάττους τῶν ABΘ· πολλῶ ἄρα αἱ ABΘ μείζους τῶν AZHΘ. κοινὴ προσκείσθω ἢ ΘΚ· μείζους ἄρα αἱ ABΘΚ τῶν AZHΘΚ. ἀλλ' αἱ BΘΚ ἐλάττους τῶν BΓΚ· πολλῶ ἄρα μείζους αἱ ABΓΚ τῶν AZHΘΚ. κοινὴ προσκείσθω ἢ ΚΕ· αἱ ἄρα ABΓΚΕ μείζους τῶν AZHΘΚΕ. ἀλλ' αἱ ΓΚΕ ἐλάττους τῶν ΓΔΕ· πολλῶ ἄρα αἱ ABΓΔΕ μείζους εἰσὶ τῶν AZHΘΚΕ. κἂν περιφέρειαι δὲ ὥσιν ἡτοι αἱ περιλαμβάνουσαι ἢ αἱ περιλαμβανόμεναι ἢ καὶ ἀμφοτέραι, τὸ αὐτὸ ἔνεστιν νοεῖν. συνεχῶν γὰρ σημείων ἐπ' αὐτῶν λαμβανομένων καὶ ἐπὶ αὐτὰ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν ληφθήσονται γραμμαὶ ἐξ εὐθειῶν συγκείμεναι, ἐφ' ὧν ἀρμόσει ἢ προειρημένη ἀπόδειξις, τῶν ἐξ εὐθειῶν συγκειμένων οἷον αὐτῶν γινομένων τῶν

προτεθεισῶν διὰ τὸ καὶ πᾶσαν γραμμὴν κατὰ συνέχειαν σημείων τὴν ὑπαρξίν ἔχουσιν νοεῖσθαι. ὅτι δὲ εἰκότως τὴν ἀνισότητά τῶν γραμμῶν οὐ μόνον τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλας εἶναι ἐχαρακτήρισεν, ἀλλὰ προσέθηκεν τὸ καὶ δεῖν περιλαμβάνεσθαι τὴν ἐτέραν ὑπὸ τῆς ἐτέρας καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας· τούτου γὰρ μὴ ὄντος οὐδὲ τὸ ἀνίσους εἶναι τὰς γραμμὰς πάντῃ ἀληθὲς ὑπῆρχεν, ὥς ἔστι κατανοῆσαι ἐκ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν.

12 ἡ γὰρ ΑΒΓΔ γραμμὴ καὶ ἡ ΑΕΖΔ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλαι εἰσι, καὶ ἄδηλον, ὅποτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν· δυνατόν γὰρ καὶ ἴσας εἶναι. δυνατόν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλην ἑκατέραν νοεῖν καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσας ἀμφοτέρας, κατ' ἐναντίαν δὲ θέσιν ἀλλήλαις κειμένας, ὥς ὅποτέρα τῶν εἰρημένων τῇ ΑΗΘΚΔ· καὶ οὕτως γὰρ ἄδηλος ἢ τε ἰσότης καὶ ἀνισότης αὐτῶν. διὸ καλῶς πρόσκειται τὸ δεῖν ἢ ὅλην τὴν ἐτέραν ὑπὸ τῆς ἐτέρας περιλαμβάνεσθαι καὶ τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης εὐθείας, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνεσθαι, τινὰ δὲ καὶ κοινὰ ἔχειν, ὥς ἐπὶ τῶν ΑΗΘΚΔ καὶ ΑΛΜΝΞΔ· ἐπὶ γὰρ τούτων τινὰ μὲν περιλαμβάνεται, τινὰ δὲ κοινὰ ἐστίν, ὥς τὰ ΑΛ, ΜΝ. δεόντως δὲ πάνυ κάκεῖνο πρὸς κρίσιν τῆς ἀνισότητος παρελήφθη τὸ δεῖν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν τὰς γραμμὰς· τούτου γὰρ μὴ ὄντος οὐδ', ἂν περιλαμβάνοντο ὑπὸ ἀλλήλων, πάντως ἄνισοί εἰσιν, ἀλλ' ἐνίστε ἴσαι, ἢ καὶ ἡ περιλαμβανομένη μείζων. ὅπερ ἴνα σαφὲς γένηται, νενοήσθωσαν ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν περιέχουσai, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΓ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΖΓ τῆς ΑΓ μείζους εἰσίν, ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΖΕ, καὶ αἱ ΕΖΓ ἄρα τῆς ΑΓ μείζους εἰσίν. κοινὰ προσκεῖσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ· αἱ ἄρα ΔΖΓ τῶν ΒΑΓ μείζους εἰσίν. ὥστε μιᾶς γραμμῆς νοουμένης τῆς ΒΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλης, ἐτέρας δὲ τῆς ΔΖΓ περιλαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐτέρας, μὴ ἐχούσης δὲ τὰ αὐτὰ πέρατα, οὐ μόνον ὅτι οὐ μείζων ἡ περιλαμβάνουσα, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ἐδείχθη.

14 καὶ ἐπὶ γραμμῶν δὲ ἐκ πλειόνων εὐθειῶν συγκειμένων τὸ αὐτὸ τοῦτο ἔστι θεωρῆσαι. νενοήσθωσαν γὰρ ἐν ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒΓ καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ καὶ ἐπεζευγμένη ἡ ΑΔ. πάλιν δὲ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἡ ΕΑ δίχα τετμήσθω τῷ Ζ, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ· καὶ κείσθω τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ πάλιν δίχα τετμήσθω ἡ ΘΗ κατὰ τὸ Κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΗ ἦχθω ἡ ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· καὶ πάλιν τῇ ΗΛ ἴση ἡ ΚΜ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΜΛ τῷ Ν, καὶ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΛ ἦχθω ἡ ΛΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΓ. φανερόν οὖν διὰ τὰ προδεδειγμένα, ὅτι μείζων ἡ μὲν ΔΖ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΖΚ τῆς ΑΗ, ἡ δὲ ΚΝ τῆς ΗΛ, ἡ δὲ ΝΓ τῆς ΛΓ· ὥστε καὶ ὅλη ἡ γραμμὴ ἡ ΔΖΚΝΓ μείζων τῆς ΒΑΗΛΓ. καλῶς ἄρα προσετέθη τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχειν ἐπὶ τῶν ἀνίσων. τὰ αὐτὰ δὲ δυνατόν ἐπινοοῦντα δεικνύειν καὶ ἐπὶ τῶν ἐπιφανειῶν ἀνὰ πᾶσι τοῖς προειρημένοις, ὅταν αἱ λαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι τὰ πέρατα ἔχωσιν ἐν ἐπιπέδοις. Εἰς τὸ β' θεωρήμα.

16 (1t) Τὸ δὲ ΑΓ ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ Δ δηλαδὴ ὥς τοῦ ΑΒ ἥτοι ἐπιμορίου ἢ καὶ ἐπιμεροῦς τυγχάνοντος τοῦ Δ. εἰ δὲ εἴη τὸ ΑΒ τοῦ Δ ἥτοι πολλαπλάσιον ἢ πολλαπλασιεπιμόριον ἢ καὶ πολλαπλασιεπιμερές, ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἴσου τῷ Δ τοῦ ΒΓ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΑ ὑπερέξει τοῦ Δ, ὥστε μηκέτι πολλαπλασιάζεσθαι αὐτό, ἀλλ' αὐτόθεν δεῖν τῷ ΑΓ ἴσον ἀποτίθεσθαι τὸ ΑΘ, καὶ τὴν αὐτὴν ἀπόδειξιν ἀρμόζειν. καὶ συνθέντι τὸ ΖΕ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ὅτι γάρ, ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἢ περ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ συνθέντι ὁ αὐτὸς λόγος ἀκολουθεῖ, δειχθήσεται οὕτως. ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, τὸ δὲ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ περ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ. λέγω, ὅτι καὶ συνθέντι τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ. γεγονέτω γάρ, ὥς τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΑ, οὕτως τὸ ΖΕ πρὸς τὸ ΖΘ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὥς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ, οὕτως τὸ ΘΖ πρὸς τὸ ΖΕ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἢ περ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ· καὶ

τὸ ΘΖ ἄρα πρὸς ΖΕ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΕΔ καὶ ὅλον τὸ ΘΕ τοῦ ΔΖ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. ἀλλ', ὡς τὸ ΘΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ διὰ τὸ συνθέντι καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΕΖ. ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ.

¹⁸ λέγω, ὅτι καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. πάλιν γὰρ ὁμοίως, ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως τὸ ΖΕ πρὸς ΕΘ, ἔσται τὸ ΘΕ μείζον τοῦ ΔΖ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΕΖ ἔσται μείζον τὸ ΘΖ τοῦ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ ΘΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ διὰ τὸ διελόντι, μείζονα λόγον ἔξει ἥπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ. φανερόν δὲ διὰ τῶν ὁμοίων, ὅτι, κἂν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχη ἥπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ συνθέντι καὶ πάλιν διελόντι ὁ αὐτὸς λόγος ἔσται. ἐκ δὲ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ τοῦ ἀναστρέψαντι λόγος ἐμφανής ἐστιν. ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ. λέγω, ὅτι καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΖΔ πρὸς ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΖΕ, καὶ διελόντι τὸ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ἀνάπαλιν τὸ ΒΓ πρὸς ΒΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΖΕ πρὸς ΕΔ, καὶ συνθέντι τὸ ΓΑ πρὸς ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ΔΖ πρὸς ΔΕ. Εἰς τὸ γ'. Καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ Θ ἴση κατήχθω ἡ ΚΜ δυνατὸν γὰρ τοῦτο προσεκβληθείσης τῆς ΚΛ ὡς ἐπὶ τὸ Χ καὶ τεθείσης τῇ Θ ἴσης τῆς ΚΧ καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΧ, κύκλου γραφέντος ὡς τοῦ ΧΜΝ· ἔσται γὰρ ἡ ΚΜ ἴση τῇ ΚΧ, τουτέστι τῇ Θ. Ἡ ἄρα ΝΓ πολυγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά τῆς γὰρ μιᾶς ὀρθῆς ἐπὶ τεταρτημορίου βεβηκυίας καὶ τῆς τομῆς κατὰ ἀρτίαν διαίρεσιν ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γινομένης δῆλον, ὅτι καὶ ἡ τοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια εἰς ἀρτιακισαρτίους τὸν ἀριθμὸν ἴσας διαιρεθήσεται περιφερείας· ὥστε καὶ ἡ ὑποτείνουσα εὐθεῖα μίαν τῶν περιφερειῶν πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρά.

²⁰ Ὡστε καὶ ἡ ΟΠ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου πλευρά ἐὰν γὰρ τῇ ὑπὸ ΞΗΝ γωνίᾳ ἴσην ποιήσαντες τὴν ὑπὸ ΠΗΔ ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζεύξωμεν καὶ προσεκβάλωμεν ἄχρι τῆς ΗΘ τῆς μετὰ ΗΔ γωνίαν περιεχούσης ἴσην τῇ ὑπὸ ΠΗΔ, ἔσται ἴση ἡ ΠΘ τῇ ΠΟ καὶ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΞΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΗΠ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, καὶ βάσις ἄρα ἡ ΞΠ τῇ ΠΔ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΠΞΗ ὀρθὴ οὕσα τῇ ὑπὸ ΠΔΗ· ὥστε ἐφάπτεται ἡ ΔΠ. ἐπεὶ οὖν αἱ πρὸς τῷ Δ ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΠΗΔ, ΔΗΘ ἴσαι, καὶ ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις κοινὴ ἡ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΠΔ τῇ ΘΔ. ἀλλ' ἡ ΞΠ τῇ ΠΔ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΘΠ ἄρα τῇ ΠΟ ἐστὶν ἴση καὶ πάσαις ταῖς ὁμοίως ἐφαπτομέναις. ὥστε ἡ ΘΠ πολυγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιοπλεύρου πλευρὰ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφόμενου. ὅτι δὲ καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, αὐτόθεν δῆλον. ἴσης γὰρ οὔσης τῆς μὲν ΟΗ τῇ ΗΠ, τῆς δὲ ΓΗ τῇ ΗΝ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΠ τῇ ΓΝ· διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΠΘ τῇ ΝΚ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΝΚ τῇ ὑπὸ ΟΠΘ ἴση ἐστὶ.

²² καὶ διὰ τοῦτο ὁμοίον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. Ἡ ἄρα ΜΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ μείζονος γὰρ οὔσης τῆς πρὸς τῷ Κ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΗΤ, ἐὰν τῇ ὑπὸ ΓΗΤ ἴσην συστησώμεθα τὴν ὑπὸ ΑΚΡ τοῦ Ρ μεταξὺ τῶν Α, Μ νοουμένου, τὸ ΑΚΡ τρίγωνον τῷ ΓΗΤ ὁμοίον ἐστίν, καὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΡΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ· ὥστε καὶ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΤ. Εἰς τὸ ζ'. Διὰ δὴ τοῦτο ἔλασσόν ἐστὶ τὸ περιγραφόμενον τοῦ συναμφοτέρου ἐπεὶ γὰρ τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸ ἐγγραφόμενον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ συναμφοτέρον πρὸς τὸν κύκλον, πολλῶ ἄρα τὸ περιγραφόμενον πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ συναμφοτέρον πρὸς τὸν κύκλον· ὥστε τὸ περιγραφόμενον ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ συναμφοτέρου. καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ κύκλου λοιπὰ τὰ περιλείμματα ἐλάσσονά ἐστὶ τοῦ Β χωρίου. Εἰς τὸ η'. Αἱ ἄρα ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ Α, Β Γ ἐπιζευγνύμεναι κάθετοί εἰσιν ἐπ' αὐτάς νενοήσθω γὰρ χωρὶς ὁ κῶνος, καὶ ἔστω κορυφὴ μὲν αὐτοῦ τὸ Η, κέντρον δὲ τῆς βάσεως αὐτοῦ τὸ Θ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Α ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ἡ ΗΑ.

λέγω, ὅτι ἡ HA κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΗΘ κάθετός ἐστιν πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα· ὥστε καὶ τὸ ΗΘΑ τρίγωνον ὀρθὸν ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν.

24 καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΘΑ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΔΕ· ἡ ἄρα ΔΕ τῷ ΗΘΑ ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΗΑ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ ἐπὶ τὰ Γ, Β ἐπιζευγνύμεναι ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετοι οὔσαι ἐπὶ τὰς ΔΖ, ΕΖ. ἐπιστῆσαι δὲ χρή, ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ πρὸ τούτου καλῶς προσέκειτο τὸ δεῖν πάντως τὴν ἐγγραφομένην πυραμίδα ἰσόπλευρον ἔχειν τὴν βάσιν· οὐκ ἄλλως γὰρ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰς τῆς βάσεως πλευρὰς ἴσαι ἠδύναντο εἶναι· ἐπὶ δὲ τοῦ προκειμένου οὐ προσέθηκεν τὸ εἶναι ἰσόπλευρον τὴν βάσιν διὰ τὸ δύνασθαι, κἂν ὅποια τις ᾖ, τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖν. Εἰς τὸ Θ'. Μείζονα ἄρα ἐστὶν τὰ ΑΒΔ, ΒΔΓ τρίγωνα τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἐπεὶ γὰρ στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Δ, αἱ ὑπὸ ΑΔΒ, ΒΔΓ μείζους εἰσὶν τῆς ὑπὸ ΑΔΓ, καί, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἐπιζεύξωμεν ὡς τὴν ΔΕ κάθετον γινομένην ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΔΒ μείζων τῆς ὑπὸ ΑΔΕ. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΑΔΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΖ, καὶ τεθείσης τῆς ΔΖ ἴσης τῇ ΔΓ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν δύο δυσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ γωνία γωνία, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΖ τριγώνῳ μείζονι ὄντι τοῦ ΑΔΕ· καὶ τὸ ΑΒΔ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΑΔΕ μείζον ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΔΒΓ τοῦ ΔΕΓ· δύο ἄρα τὰ ΑΔΒ, ΔΒΓ τοῦ ΑΔΓ μείζονα ἐστίν.

26 Εἰς τὸ ι'. Ἦχθω γὰρ ἡ ΗΖ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ παράλληλος οὔσα τῇ ΑΓ δίχα τμηθείσης τῆς ΑΒΓ περιφερείας κατὰ τὸ Β ὅτι γὰρ ἡ οὕτως ἀγομένη παράλληλος γίνεται τῇ ΑΓ, δειχθήσεται ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Θ ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΘΑ, ΘΔ, ΘΓ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΘΔ, δύο δυσὶν ἴσαι. ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΘΓ· καὶ γωνία ἄρα γωνία ἐστὶν ἴση. εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΗΒΔ, ΔΒΖ γωνίαι ὀρθαί· ἀπὸ γὰρ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπέζευκται ἡ ΘΒ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΔΗΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΔΖΒ ἐστὶν ἴση. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν· ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ. Περιγράφοντες δὴ πολύγωνα περὶ τὸ τμήμα ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων λείψομέν τινα ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ Θ χωρίου ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγραφομένων δέδεικται ἐν τῇ Στοιχειώσει, ὅτι τὰ ἐγγραφόμενα τρίγωνα εἰς τὰ τμήματα μείζονα ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τμημάτων, καὶ διὰ τοῦτο δυνατὸν ἦν τέμνοντας τὰς περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύοντας εὐθείας καταλείπειν τινα ἀποτμήματα ἐλάσσονα τοῦ δοθέντος χωρίου· ἐπὶ δὲ τῆς περιγραφῆς οὐκέτι τοῦτο δέδεικται ἐν τῇ Στοιχειώσει. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ προκειμένῳ τοῦτο φησιν, ὃ καὶ ἔστιν αὐτὸ συλλογίσασθαι διὰ τοῦ ζ' θεωρήματος, δεικτέον, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἀφαιρεῖ τρίγωνον μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ περιλείμματος, οἷον ὡς ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὅτι τὸ ΗΔΖ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ περιλείμματος τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ καὶ τῆς ΑΒΓ περιφερείας.

28 τῶν γὰρ αὐτῶν ἐπεζευγμένων, ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΖ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΒΖ. ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΖΓ ἴση· ἐφάπτεται γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΖΙ μείζων. ὥστε καὶ τὸ ΔΒΖ τρίγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ ΒΖΓ τριγώνου· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν· πολλῷ ἄρα τοῦ ΒΖΓ περιλείμματος μείζον ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΒΗ τοῦ ΒΗΑ μείζον· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖΗ μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΔΓ περιλείμματος. Εἰς τὸ ιγ'. Νοείσθω δὴ εἰς τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον καὶ ἐγγεγραμμένον καὶ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένον ὁμοιον τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ ὅπως μὲν οὖν ἔστιν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ὁμοιον τῷ ἐν ἐτέρῳ ἐγγεγραμμένῳ, δῆλον, εἴρηται δὲ καὶ Πάππῳ εἰς τὸ υπόμνημα τῶν Στοιχείων· περὶ δὲ τὸν δοθέντα κύκλον πολύγωνον περιγράψαι ὁμοιον τῷ περὶ ἕτερον κύκλον περιγεγραμμένῳ οὐκέτι ὁμοίως ἔχομεν εἰρημένον· ὅπερ νῦν λεκτέον. τῷ γὰρ εἰς τὸν Β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ ὁμοιον εἰς τὸν Α ἐγγεγράφθω καὶ περὶ αὐτὸν τὸν Α ὁμοιον τῷ εἰς αὐτόν, ὡς ἐν τῷ γ'

θεωρήματι· καὶ ἔσται ὁμοιον καὶ τῷ περὶ τὸν Β περιγεγραμμένῳ. Καὶ ἐπεὶ ὁμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὅνπερ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει τὸ τοιοῦτον ἐπὶ μὲν τῶν ἐγγεγραμμένων δέδεικται ἐν τῇ Στοιχειώσει, ἐπὶ δὲ τῶν περιγεγραμμένων οὐκέτι· δειχθήσεται δὲ οὕτως.

30 νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς τὰ περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εὐθύγραμμα καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἐπεζευγμένοι αἱ ΚΕ, ΚΜ, ΛΘ, ΛΝ· φανερόν δὴ, ὅτι αἱ ΚΕ, ΛΘ ἐκ τῶν κέντρων εἰσὶ τῶν περὶ τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα κύκλων καὶ πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ δυνάμει, ὡς τὰ περιγεγραμμένα πολύγωνα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΚΕΜ, ΛΘΝ ἡμίσειαι· εἰσὶ τῶν ἐν τοῖς πολυγώνοις γωνιῶν, ὁμοίων ὄντων τῶν πολυγώνων δῆλον, ὅτι καὶ αὐταὶ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Μ, Ν ὀρθαί· ἰσογώνια ἄρα τὰ ΚΕΜ, ΛΘΝ τρίγωνα, καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΛΘ, ἡ ΚΜ πρὸς ΛΝ· ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΝ, οὕτως τὰ περιγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα. Τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν Β κύκλον, ὅνπερ τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΛ τρίγωνον ἐπεὶ γὰρ τὰ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους εὐθύγραμμα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει, τουτέστιν ἡ ΤΔ πρὸς Η δυνάμει, τουτέστιν ἡ ΤΔ πρὸς ΡΖ μήκει, τουτέστιν ὡς τὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΛ, ἴσον δὲ τὸ ΚΤΔ τῷ περὶ τὸν Α κύκλον περιγεγραμμένῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΚΤΔ πρὸς τὸ περὶ τὸν Β κύκλον περιγεγραμμένον, οὕτως τὸ αὐτὸ ΚΤΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΛ τρίγωνον.

32 Ἐναλλάξ ἄρα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ πρίσμα πρὸς τὸν κύλινδρον ἢ περὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν Β κύκλον πολύγωνον πρὸς τὸν Β κύκλον· ὅπερ ἄτοπον ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, οὕτως τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν Β κύκλον πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλασσον τοῦ Β κύκλου, πρὸς ὃ μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον ἢ περὶ πρὸς τὸν κύκλον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος πρὸς τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸν κύκλον. ἐδείχθη δὲ ἔχον καὶ ἐλάσσονα· ὅπερ ἄτοπον. Εἰς τὸ 18'. Ἡ δὲ Γ πρὸς τὴν Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ Α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον ἢ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. νενοήσθω γὰρ χωρὶς ἢ ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῇ καὶ εἰς τὸν Α κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον τὸ ΖΘΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ Α ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου τὴν ΘΚ κάθετος ἤχθω ἢ ΑΗ· φανερόν δὴ, ὅτι τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ πολυγώνου. νενοήσθω δὴ καὶ [ἡ] τοῦ κώνου κορυφή τὸ Λ σημεῖον καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Η ἐπεζευγμένη ἢ ΛΗ, ἥτις κάθετος γίνεται ἐπὶ τὴν ΘΚ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ λήμματι τοῦ ἡ' θεωρήματος.

34 ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ἔστι δὲ καὶ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐφ' ἐκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶ τῇ ΛΗ· ἐκάστη γὰρ αὐτῶν δύναται τὸ ἀπὸ τοῦ ἄξονος καὶ τῆς ἴσης τῇ ΑΗ. διὰ δὲ τοῦτο καὶ τὸ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ΛΗ διπλάσιόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος· τὸ γὰρ ὑφ' ἐκάστης πλευρᾶς καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς καθέτου ἐπ' αὐτὴν ἀγομένης ἴσης τῇ ΛΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ καθ' ἑαυτὴν τριγώνου. ὥστε ἐστίν, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΛ, τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος κοινοῦ ὕψους τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου λαμβανομένης. ἀχθείσης δὲ τῆς ΗΝ παρὰ τὴν ΜΛ ἔσται, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΛ, ἢ ΑΗ πρὸς ΗΝ. ἢ δὲ ΑΗ πρὸς ΗΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ πρὸς τὴν ΗΛ· μείζων γὰρ ἢ ΑΗ τῆς ΗΝ· καὶ ἢ ΑΜ ἄρα πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἢ Γ πρὸς τὴν Δ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΑΗ πρὸς ΗΛ, τουτέστιν ἢ περὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς

πυραμίδος. Εἰς τὸ ις'. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AH ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν BAZ καὶ τῷ ὑπὸ τῆς AD καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔZ, AH διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΔZ τῇ AH ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔZ τῇ AH, ἔστιν, ὡς ἡ BA πρὸς AH, ἡ BD πρὸς ΔZ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν BA, ΔZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων τῶν BD, AH. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BA, ΔZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν BD, ΔZ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν AD, ΔZ διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ β' βιβλίου τῆς Στοιχειώσεως καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BD, AH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ BD, ΔZ καὶ τῷ ὑπὸ AD, ΔZ.

- 36 κοινὸν προσκείσθω τὸ ὑπὸ ΔA, AH· τὸ ἄρα ὑπὸ BD, AH μετὰ τοῦ ὑπὸ ΔA, AH, ὅπερ ἐστὶν τὸ ὑπὸ BA, AH, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BD, ΔZ καὶ τῷ ὑπὸ AD, ΔZ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ AD, AH. Εἰς τὸ κγ'. Τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου μετρεῖσθω ὑπὸ τετράδος ὑπὸ τετράδος βούλεται μετρεῖσθαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου διὰ τὸ τοῦ κύκλου κινουμένου περὶ τὴν AG διάμετρον πάσας τὰς πλευρὰς κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν χρησίμου ἐσομένου αὐτῷ ἐν τοῖς ἐξῆς τοῦ τοιοῦτου. μὴ γὰρ ὑπὸ τετράδος μετρούμενων τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, κἂν ἀρτιόπλευρον ᾖ, οὐ πάσας δυνατὸν κατὰ κωνικῶν φέρεσθαι ἐπιφανειῶν, ὡς κατανοῆσαι ἔνεστιν ἐπὶ τῶν τοῦ ἐξαγώνου πλευρῶν· δύο γὰρ τὰς ἀπεναντίον αὐτοῦ παραλλήλους πλευρὰς κατὰ κυλινδρικήν φέρεσθαι ἐπιφανείας συμβαίνει. ὅπερ, ὡς εἴρηται, οὐ χρησίμων αὐτῷ πρὸς τὰ ἐξῆς. Εἰς τὸ λ'. Ἡ δὲ KΘ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ ABΓΔ κύκλου ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ X ἐπιζεύξωμεν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἐφάπτεται ἡ KZ τοῦ ABΓΔ κύκλου, νοοῦμενον τὸ M, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν XK, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ XK τῇ XZ, εἰσὶν δὲ καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ M, ἴση γίνεται καὶ ἡ KM τῇ MZ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ZX τῇ XΘ ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ XM τῇ KΘ, καὶ διὰ τοῦτο ἔσται, ὡς ἡ ΘZ πρὸς ZX, οὕτως ἡ KΘ πρὸς XM. διπλῇ δὲ ἡ ΘZ τῆς XΘ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ KΘ τῆς XM ἐκ τοῦ κέντρου οὔσης τοῦ ABΓΔ κύκλου.

- 38 Εἰς τὸ λβ'. Ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ M κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ N λόγον, ὃν ἔχει ἡ EA πρὸς AK ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΗΛ, ΓΚ, ὀρθῶν γινομένων τῶν πρὸς τοῖς K, Λ καὶ παραλλήλου τῆς AK τῇ ΛΕ ἰσογώνιον γίνεται τὸ ΗΛΕ τρίγωνον τῷ ΓΚΑ τριγώνῳ, καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν, ὡς ἡ ΗΛ πρὸς ΛΕ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς ΚΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΗΛ πρὸς ΛΕ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ περιγεγραμμένον κύκλου διάμετρον, ὡς δὲ ἡ ΓΚ πρὸς ΚΑ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ ABΓΔ κύκλου διάμετρον· ὡς ἄρα πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ περὶ αὐτὸ κύκλου διάμετρον, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου γωνίας πρὸς τὴν τοῦ ABΓΔ κύκλου διάμετρον. ὡς δὲ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς τὴν πλευράν, ἐπεὶ καί, ὡς ἡ HE πρὸς ΕΛ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς AK· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι πρὸς τὴν AK. ἀλλ' ὡς πᾶσαι πρὸς τὴν πλευράν τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς ΕΛ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ M, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ τῆς ΕΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, ὡς δὲ πᾶσαι πρὸς τὴν AK, οὕτως τὸ ὑπὸ πασῶν καὶ τῆς AK, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ N, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AK κοινοῦ ὕψους πάλιν λαμβανομένης τῆς AK· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ M πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ N πρὸς τὸ ἀπὸ AK.

- 40 καὶ ὡς ἄρα αὐτὴ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ M πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ N πρὸς τὴν AK. ἐναλλάξ, ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ M πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ N, οὕτως ἡ ΕΛ πρὸς AK, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ διάμετρος τοῦ M πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ N, ἡ ΕΛ πρὸς AK. Εἰς τὸ λδ'. Αἱ δὲ I, Θ εἰλημμένοι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν τὴν K τῆς I καὶ τὴν I τῆς Θ καὶ τὴν Θ τῆς H τὸ προκείμενόν ἐστι δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν ἀριθμητικῇ ἀναλογίᾳ, ὃ ταύτόν ἐστι τῷ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν. ποιητέον δὲ τοῦτο οὕτως ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΚ ἄνισοι, καὶ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ τῆς AB ἴσης τῇ ΓΚ τῆς

ΒΔ ἢ λοιπὴ ἢ ΑΔ τετμήσθω τρίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ τῇ μὲν ΕΒ ἴση κείσθω ἢ Η, τῇ δὲ ΖΒ ἴση ἢ Θ. ἔσονται δὴ αἱ Θ, Η ποιοῦσαι τὸ προκείμενον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΚ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Η. γεγονέντω γάρ, ὥς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Η, οὕτως ἡ Η πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Λ. καὶ ἐπεὶ, ὥς μέρει ἐαυτῆς ἡ ΑΒ ὑπερέχει τῆς Η, τούτῳ καὶ ἡ Η ἐαυτῆς ὑπερέχει τῆς Λ, τὸ δὲ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ μείζον ἐστὶ τοῦ μέρους τῆς Η, μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ ΑΒ τῆς Η ἢ περ ἡ Η τῆς Λ. τῷ δὲ αὐτῷ ὑπερέχει ἡ ΑΒ τῆς Η καὶ ἡ Η τῆς Θ· μείζονι ἄρα ὑπερέχει ἡ Η τῆς Θ ἢ περ ἡ Η τῆς Λ· ὥστε μείζων ἡ Λ τῆς Θ. ἐὰν δὴ πάλιν ποιήσωμεν, ὥς τὴν Η πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὴν Λ πρὸς Μ, πολλῷ μείζων ἔσται τῆς ΓΚ.

42 καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Η, Λ, Μ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Μ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς Η· ὥστε ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΚ μείζονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὴν Η. Εἰς τὸ λζ'. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΕΘ καὶ τῶν ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΛ, ΚΘ ἐν γὰρ τῷ δευτέρῳ καὶ εἰκοστῷ θεωρήματι δέδεικται, ὅτι αἱ ΕΖ, ΓΔ, ΚΑ πρὸς τὴν ΘΚ τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, ὃν ἡ ΛΕ πρὸς ΕΘ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. Τὸ δὲ ὑπὸ ΕΛ, ΚΘ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΘΑ καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ ΛΘ, ΘΚ ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ ΘΑ, ὥς ἐστὶ δῆλον ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΛ καὶ διὰ τοῦτο ὁμοίου γινομένου τοῦ ΘΑΚ τριγώνου τῷ ΘΑΛ· ἔσται γάρ, ὥς ἡ ΛΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΑΘ πρὸς ΟΚ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης. Εἰς τὸ λθ'. Ἐξεῖ δὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ΑΒΓ κύκλῳ ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ Θ, Ε, Λ, ἴσαι ἔσονται διὰ τὸ καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυμένας εὐθείας καθετοὺς εἶναι ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας, καὶ αὐτὰς δὲ τὰς ἐφαπτομένας δίχα τέμνεσθαι πρὸς τῇ ἀφῇ. Ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων γίνεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας ἐπεὶ γὰρ ἡ ΜΖ κατὰ κωνικῆς ἐπιφανείας φέρεται, κατὰ κολούρου κώνου ἐπιφανείας οἰσθήσεται, ἥ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε ΖΜ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΖΗ καὶ τῆς ΜΝ.

44 ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ὑπὸ τῆς ΜΑ γενομένη κολούρου κώνου ἐπιφάνειά ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς ΜΑ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῆς ΑΒ καὶ ΜΝ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΖΜ μείζων τῆς ΜΑ, ἡ δὲ ΖΗ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ μέση τῆς μέσης· ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΜ, ΝΗ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΜΑ, ΝΒ ἐπιφανείας. Εἰς τὸ μ'. Ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ ΚΖΛ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου καὶ τὰ ἐξῆς. ἀσαφέστερον δοκεῖ συνῆχθαι τὸ εἰρημένον, λέγοις δ' ἂν σαφῶς οὕτως· ἐπειδὴ ὁ Ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν δύναται τὸ ὑπὸ ΜΘ, ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΜΘ, ΖΗ μείζον τοῦ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ· ἡ μὲν γὰρ ΜΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΖΗ μείζων τῆς ΔΞ· ὁ Ν ἄρα κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ. τὸ δὲ ὑπὸ ΓΔ, ΔΞ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΑ· ὁ ἄρα Ν κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου, μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΔΑ. Εἰς τὸ μα'. Ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία πρὸς ἄλληλά ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ πλευρᾶς ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΛΚ, παραλλήλου οὔσης τῆς ΕΚ τῇ ΑΛ ἐστίν, ὥς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ. ὥς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΕΖ πρὸς ΑΓ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, ἡ ΕΖ πρὸς ΑΓ καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΑΓ.

46 ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας τῶν πολυγώνων δειχθήσεται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας, ὃν ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ. καὶ ὥς ἄρα ἐν πρὸς ἑν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὥς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, οὕτως πᾶσαι αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ περιγεγραμμένου γωνίας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς πάσας τὰς ἐπιζευγνυούσας μετὰ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ὥστε καί, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ΕΚ καὶ πασῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΛ καὶ πασῶν· τὰ γὰρ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ τοῦ μὲν τῆς ΕΚ πρὸς ΑΛ λόγου διπλασίον ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ, τῶν δὲ ἐπιζευγνυουσῶν τὰς τοῦ

μείζονος πρὸς τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς τοῦ ἐλάττονος διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῆς ΕΚ καὶ πασῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΛ καὶ πασῶν· ὅμοια γὰρ καὶ ταῦτα διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχειν. Καὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὕτως ἡ ΑΛ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον ἡγμένην ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζεύξωμεν εὐθεΐαν, ἔσται ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ΕΚ, ΑΛ, καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθεῖσα, τουτέστιν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ΑΛ κάθετον. Ἐδείχθη δέ, ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΑΛ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν κύκλου ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι ἐστὶν, ὡς τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, οὕτως ὁ Μ κύκλος πρὸς τὸν Ν, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Μ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ Ν.

48 Εἰς τὸ μβ'. Ἐκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλασίος ἐστὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἴσου τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, οὕτως ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶν τῶν ἐκ τῶν κέντρων· καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἄρα πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. Εἰς τὸ μδ'. Τὸ ἄρα περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν Θ κῶνον εἰ γὰρ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα ἢ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Δ πρὸς Ζ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε μείζονα ἢ τριπλασίονα, τὸ ἄρα περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ Δ πρὸς Ε. ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἢ περ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον· καὶ τὸ περιγεγραμμένον ἄρα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ τομεὺς πρὸς τὸ κῶνον. [Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ]. Εἰς τὸ β'.

50 (1τ) Σαφῶς ἡμῖν τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων γεγραμμένων ἀκόλουθος καὶ ἡ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐν τοῖς τοῦ δευτέρου θεωρήμασι σπουδὴ. φησὶν δὲ πρῶτον ἐν τῷ α' θεωρήματι· Εἰλήφθω τοῦ δοθέντος κῶνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος τοῦτο δὲ διχῶς δυνατόν ἐστιν ποιεῖν ἢ τοι τῆς βάσεως τῆς αὐτῆς σωζομένης ἐν ἀμφοτέροις ἢ τοῦ ὕψους. καὶ ἵνα σαφέστερον γένηται τὸ λεγόμενον, νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ Α κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΑΓ, καὶ δέον ἔστω αὐτοῦ ἡμιόλιον κύλινδρον εὐρεῖν. ὑποκείσθω δὲ πρότερον ὁ ΑΓ κύλινδρος, καὶ προσεκβεβλήσθω τὸ ΑΓ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, καὶ κείσθω τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἡμιολία ἐστὶν τῆς ΑΓ. ἐὰν δὲ νοήσωμεν κύλινδρον βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν Α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΑΔ εὐθεΐαν, ἡμιόλιος ἔσται τοῦ προτεθέντος τοῦ ΑΓ· οἱ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. εἰ δὲ κῶνος εἴη ὁ ΑΓ, τμηθείσης τῆς ΑΓ δίχα ὡς κατὰ τὸ Ε ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν Α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΑΕ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ ΑΓ κῶνου· ὁ γὰρ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν Α κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΑΓ εὐθεΐαν, τοῦ μὲν ΑΓ κῶνου τριπλασίος ἐστὶ, τοῦ δὲ ΑΕ κυλίνδρου διπλασίος· ὥστε δῆλον, ὅτι καὶ ὁ ΑΕ κύλινδρος ἡμιόλιος ἐστὶ τοῦ ΑΓ κῶνου. οὕτως μὲν οὖν τῆς αὐτῆς βάσεως σωζομένης ἐν τε τῷ προτεθέντι καὶ ἐν τῷ λαμβανομένῳ γενήσεται τὸ πρόβλημα, ἔνεστι δὲ καὶ τῆς βάσεως διαφόρου τυγχανούσης, τοῦ δὲ ἄξονος τοῦ αὐτοῦ μένοντος, τὸ αὐτὸ ποιεῖν.

52 ἔστω γὰρ πάλιν κῶνος ἢ κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ ΖΗ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΘΚ εὐθεΐα, οὗ δέον ἔστω ἡμιόλιον κύλινδρον εὐρεῖν ὕψος ἔχοντα ἴσον τῇ ΘΚ. ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΖΗ διαμέτρου τοῦ κύκλου τετράγωνον τὸ ΖΛ, καὶ προσεκβληθείσης τῆς ΖΗ κείσθω αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ΗΜ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΖΝ παραλληλόγραμμον· τὸ ἄρα ΖΝ ἡμιόλιόν ἐστὶ τοῦ ΖΛ καὶ ἡ ΜΖ τῆς ΖΗ.

συνεστάτω δὴ τῷ ΖΝ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΞΠ, καὶ περὶ διάμετρον μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τὴν ΞΟ κύκλος γεγράφθω. ἔσται δὴ ὁ ΞΟ ἡμιόλιος τοῦ ΖΗ· οἱ γὰρ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. καὶ ἐὰν πάλιν νοηθῇ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν ΞΟ κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΘΚ, ἔσται ἡμιόλιος τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μὲν ὁ ΖΗ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΘΚ. εἰ δὲ κῶνος εἴη, ὁμοίως τὰ αὐτὰ ποιήσαντες καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ΖΝ παραλληλογράμμου ἴσον συστησάμενοι τετράγωνον ὡς τὸ ΞΠ καὶ περὶ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὴν ΞΟ κύκλον γράψαντες νοήσωμεν ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρον ὕψος ἔχοντα τὴν ΘΚ· ἔξομεν αὐτὸν ἡμιόλιον τοῦ προτεθέντος κώνου. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΝ παραλληλόγραμμον τοῦ ΞΠ τετραγώνου τριπλάσιον, τοῦ δὲ ΖΛ ἡμιόλιον, τὸ ΖΛ τοῦ ΞΠ ἔσται διπλάσιον, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὁ κύκλος τοῦ κύκλου διπλάσιος καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου.

54 ἀλλ' ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΖΗ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΘΚ, τριπλάσιός ἐστι τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ κώνου· ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΞΟ κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ΘΚ, ἡμιόλιός ἐστι τοῦ προκειμένου κώνου. εἰ δὲ δύοι μήτε τὸν ἄξονα τὸν αὐτὸν εἶναι μήτε τὴν βάσιν, γενήσεται τὸ πρόβλημα πάλιν διχῶς· ἢ γὰρ τὴν βάσιν ἔξει ἴσην τῇ δοθείσῃ ἢ τὸν ἄξονα ὁ ποριζόμενος κύλινδρος. ἔστω γὰρ πρότερον ἡ βάσις διδομένη, ὡς ὁ ΞΟ κύκλος, καὶ δέον ἔστω κύλινδρον εὑρεῖν ἡμιόλιον τοῦ δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου ἀπὸ βάσεως τῆς ΞΟ. εἰλήφθω, ὡς προείρηται, τοῦ δοθέντος κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ προτεθέντι ὁ ΦΥ, καὶ γεγονέτω, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΥ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ΦΥ πρὸς τὴν ΡΣ. ἔσται ἄρα ὁ κύλινδρος ὁ ἀπὸ τῆς ΞΟ βάσεως ὕψος ἔχων τὴν ΡΣ ἴσος τῷ ΦΥ· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπίταγμα. εἰ δὲ μὴ ἡ βάσις ἢ διδομένη, ἀλλὰ ὁ ἄξων, τῷ αὐτῷ λόγῳ πορισθέντος τοῦ ΦΥ γενήσεται τὰ τῆς προτάσεως. Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ α'. Τούτου ληφθέντος ἐπεὶ δι' ἀναλύσεως αὐτῷ προέβη τὰ τοῦ προβλήματος, ληξάσης τῆς ἀναλύσεως εἰς τὸ δεῖν δύο δοθεισῶν δύο μέσας ἀνάλογον προσερεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ φησὶν ἐν τῇ συνθέσει· εὐρήσθωσα ν. τὴν δὲ εὔρεσιν τούτων ὑπ' αὐτοῦ μὲν γεγραμμένην οὐδὲ ὅλως εὐρίσκομεν, πολλῶν δὲ κλεινῶν ἀνδρῶν γραφαῖς ἐντετυχήκαμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπαγγελλομένας, ὧν τὴν Εὐδόξου τοῦ Κνιδίου παρητησάμεθα γραφὴν, ἐπειδὴ φησιν μὲν ἐν προοιμίῳ διὰ καμπύλων γραμμῶν αὐτὴν ἠύρηκέναι, ἐν δὲ τῇ ἀποδείξει πρὸς τῷ μὴ κεχρῆσθαι καμπύλαις γραμμαῖς ἀλλὰ καὶ διηρημένην ἀναλογίαν εὐρῶν ὡς συνεχεῖ χρῆται· ὅπερ ἦν ἄτοπον ὑπονοῆσαι, τί λέγω περὶ Εὐδόξου, ἀλλὰ περὶ τῶν καὶ μετρίως περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων.

56 ἵνα δὴ ἡ τῶν εἰς ἡμᾶς ἐληλυθότων ἀνδρῶν ἔννοια ἐμφανὴς γένηται, ὁ ἐκάστου τῆς εὐρέσεως τρόπος καὶ ἐνταῦθα γραφήσεται. Ὡς Πλάτων. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Δ, Ε, καὶ κατεσκευάσθω ὀρθὴ γωνία ἢ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐν ἐνὶ σκέλει, οἷον τῷ ΖΗ, κινείσθω κανὼν ὁ ΚΛ ἐν σωλῆνί τινι ὄντι ἐν τῷ ΖΗ οὕτως, ὥστε παράλληλον αὐτὸν διαμένειν τῷ ΗΘ. ἔσται δὲ τοῦτο, ἐὰν καὶ ἕτερον κανόνιον νοηθῇ συμφυὲς τῷ ΘΗ, παράλληλον δὲ τῷ ΖΗ, ὡς τὸ ΘΜ· σωληνισθεισῶν γὰρ τῶν ἄνωθεν ἐπιφανειῶν τῶν ΖΗ, ΘΜ σωλῆσιν πελεκινοειδέσιν καὶ τύλων συμφυῶν γενομένων τῷ ΚΛ εἰς τοὺς εἰρημένους σωλῆνας ἔσται ἡ κίνησις τοῦ ΚΛ παράλληλος αἰεὶ τῷ ΗΘ.

58 τούτων οὖν κατεσκευασμένων κείσθω τὸ ἐν σκέλος τῆς γωνίας τυχὸν τὸ ΗΘ ψαῦον τοῦ Γ, καὶ μεταφερέσθω ἢ τε γωνία καὶ ὁ ΚΛ κανὼν ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν τὸ μὲν Η σημεῖον ἐπὶ τῆς ΒΔ εὐθείας ἢ τοῦ ΗΘ σκέλους ψαύοντος τοῦ Γ, ὁ δὲ ΚΛ κανὼν κατὰ μὲν τὸ Κ ψαύῃ τῆς ΒΕ εὐθείας, κατὰ δὲ τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ Α, ὥστε εἶναι, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τὴν μὲν ὀρθὴν γωνίαν θέσιν ἔχουσαν ὡς τὴν ὑπὸ ΓΔΕ, τὸν δὲ ΚΛ κανόνα θέσιν ἔχειν, οἷαν ἔχει ἡ ΕΑ· τούτων γὰρ γεναμένων ἔσται τὸ προκείμενον. ὀρθῶν γὰρ οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς Δ, Ε ἔστιν, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ,

ή ΔΒ πρὸς ΒΕ καὶ ή ΕΒ πρὸς ΒΑ. Ὡς Ἦρων ἐν Μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς καὶ ἐν τοῖς Βελοποικοῖς. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ Β, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ [φανερὸν δὴ, ὅτι ἴσαι οὖσαι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὁ γὰρ περὶ μίαν αὐτῶν γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν περάτων τῆς ἐτέρας διὰ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον].

60 ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΔΓ, ΔΑ [ἐπὶ τὰ Ζ, Η], καὶ νοείσθω κανόνιον ὡς τὸ ΖΒΗ κινούμενον περὶ τινὰ τύλον μένοντα πρὸς τῷ Β καὶ κινείσθω, ἕως ἀποτέμοις ἴσας τὰς ἀπὸ τοῦ Ε, τουτέστι τὰς ΕΗ, ΕΖ. καὶ νοείσθω ἀποτεμὸν καὶ θέσιν ἔχον τὴν ΖΒΗ ἴσων, ὡς εἴρηται, γινομένων τῶν ΕΗ, ΕΖ [ἦχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ή ΕΘ· δίχα δὴ τέμνει δηλονότι τὴν ΓΔ. ἐπεὶ οὖν δίχα τέτμηται ή ΓΔ κατὰ τὸ Θ, καὶ πρόσκειται ή ΓΖ, τὸ ὑπὸ ΔΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΖ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΖΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΘ, ΘΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΘ, ΘΕ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ ΓΘ, ΘΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ ΖΘ, ΘΕ ἴσον τὸ ἀπὸ ΕΖ]· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΖ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ ΔΗΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΗ. καί ἐστιν ἴση ή μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ή δὲ ΗΕ τῇ ΕΖ· καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΓ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΔΗΑ [ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν]· ἔστιν ἄρα, ὡς ή ΖΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ή ΑΗ πρὸς ΓΖ. ἀλλ' ὡς ή ΖΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ή ΖΓ πρὸς ΓΒ καὶ ή ΒΑ πρὸς ΑΗ [τριγώνου γὰρ τοῦ ΖΔΗ παρὰ μίαν μὲν τὴν ΔΗ ἦκται ή ΓΒ, παρὰ δὲ τὴν ΔΖ ή ΑΒ]· ὡς ἄρα ή ΒΑ πρὸς ΑΗ, οὕτως ή ΑΗ πρὸς ΓΖ καὶ ή ΓΖ πρὸς ΓΒ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΗ, ΓΖ [ὅπερ ἔδει εὑρεῖν]. Ὡς Φίλων ὁ Βυζάντιος. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. κείσθωσαν, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν πρὸς τῷ Β, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΓ γεγράφθω περὶ αὐτὴν ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΕΓ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν τῇ μὲν ΒΑ ή ΑΔ, τῇ δὲ ΒΓ ή ΓΖ, καὶ παρακείσθω κανὼν κινούμενος πρὸς τῷ Β τέμνων τὰς ΑΔ, ΓΖ καὶ κεκινήσθω περὶ τὸ Β, ἄχρις ἂν ή ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Δ ἴση γένηται τῇ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ, τουτέστι τῇ μεταξὺ τῆς τε περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς ΓΖ.

62 νενοήσθω οὖν ἔχον τὸ κανόνιον θέσιν, οἷαν ἔχει ή ΔΒΕΖ, ἴσης οὔσης, ὡς εἴρηται, τῆς ΔΒ τῇ ΕΖ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΔ, ΓΖ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν ΑΒ, ΒΓ. νενοήσθωσαν γὰρ ἐκβεβλημένοι αἱ ΔΑ, ΖΓ καὶ συμπίπτουσιν κατὰ τὸ Θ· φανερὸν δὴ, ὅτι παραλλήλων οὐσῶν τῶν ΒΑ, ΖΘ ή πρὸς τῷ Θ γωνία ὀρθή ἐστίν, καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος ἀναπληρούμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ή ΔΒ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΒ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΖΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΕΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΑ· ἐκάτερον γὰρ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΕ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΖΓ· ἐκάτερον γὰρ ὁμοίως ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης ἀπὸ τοῦ Ζ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΖΓ, καὶ διὰ τοῦτο ἐστίν, ὡς ή ΔΘ πρὸς ΘΖ, οὕτως ή ΓΖ πρὸς ΔΑ. ἀλλ' ὡς ή ΘΔ πρὸς ΘΖ, οὕτως ᾖ τε ΒΓ πρὸς ΓΖ καὶ ή ΔΑ πρὸς ΑΒ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΔΘΖ παρὰ μὲν τὴν ΔΘ ἦκται ή ΒΓ, παρὰ δὲ τὴν ΘΖ ή ΒΑ· ἔστιν ἄρα, ὡς ή ΒΓ πρὸς ΓΖ, ή ΓΖ πρὸς ΔΑ καὶ ή ΔΑ πρὸς ΑΒ· ὅπερ προέκειτο δεῖξαι. Ἰστέον δέ, ὅτι ή τοιαύτη κατασκευὴ σχεδὸν ή αὐτή ἐστὶ τῇ ὑπὸ Ἦρωνος· τὸ γὰρ ΒΘ παραλληλόγραμμον τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ ληφθέντι ἐπὶ τῆς Ἦρωνος κατασκευῆς καὶ αἱ προσεκβαλλόμεναι πλευραὶ αἱ ΘΑ, ΘΓ καὶ ὁ πρὸς τῷ Β κινούμενος κανὼν.

64 ταύτη δὲ μόνον διαφέρει, ὅτι ἐκεῖ μὲν μέχρι τοσούτου ἐκινουῖμεν περὶ τὸ Β τὸν κανόνα, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς ΑΓ, τουτέστι τοῦ Κ, ἴσαι ὑπ' αὐτοῦ ἀπετέμοντο πρὸς τὰς ΘΔ, ΘΖ προσπίπτουσιν, ὡς αἱ ΚΔ, ΚΖ, ἐνταῦθα δέ, ἄχρις ἂν ή ΔΒ ἴση γένηται τῇ ΕΖ. ἐφ' ἐκατέρας δὲ κατασκευῆς τὸ αὐτὸ ἀκολουθεῖ, τὸ δὲ νῦν εἰρημένον πρὸς χρῆσιν εὐθετώτερον· τὰς γὰρ ΔΒ, ΕΖ ἴσας τηρεῖν ἐνδέχεται διηρημένου τοῦ ΔΖ κανόνος εἰς ἴσα καὶ συνεχῇ πολὺ γε εὐκολώτερον τοῦ καρκίνῳ διαπειράζειν τὰς ἀπὸ τοῦ Κ ἴσας πρὸς τὰ Δ, Ζ. Ὡς Ἀπολλώνιος. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ ΒΑΓ ὀρθὴν περιέχουσιν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ

Α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΑΓ, κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΚΘΛ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Γ καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ κύκλου περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΜΘΝ καὶ τεμνέτω τὴν ΚΘΛ κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν τὸ ΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΑ. τετμήσθω δίχα ἡ ΘΑ τῷ Ξ, καὶ κέντρῳ τῷ Ξ γεγράφθω κύκλος τέμνων τὰς ΑΒ, ΑΓ ἐκβληθείσας κατὰ τὰ Δ, Ε, ὥστε μέντοι τὰ ΔΕ ἐπ' εὐθείας εἶναι τῷ Θ· ὅπερ ἂν γένοιτο κανονίου κινουμένου περὶ τὸ Θ τέμνοντος τὰς ΑΔ, ΑΕ καὶ παραγομένου ἐπὶ τοσοῦτον, ἄχρις ἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὰ Δ, Ε ἴσαι γένωνται.

66 τούτου γὰρ γενομένου ἔσται τὸ ζητούμενον· ἡ γὰρ αὐτὴ κατασκευή ἐστὶ τῇ τε ὑπὸ Ἡρώωνος καὶ Φίλωνος γεγραμμένη, καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ἡ ἀποδείξις ἡ αὐτὴ ἀρμόσει. Ὡς Διοκλῆς ἐν τῷ Περὶ πυρίων. Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΕΒ, ΒΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος τῇ ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι τῶν ΓΗ, ΗΘ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΔ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΚ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῇ ΗΔ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὰ Ε, Ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν· ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ ΓΛΕ, ΖΛΔ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Κ, Η· καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὸ τὴν ΛΕ τῇ ΛΖ ἴσην εἶναι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΗΔ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ· μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ ΕΚ τῶν ΔΚ, ΚΓ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ καὶ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν ΔΚ τῇ ΓΗ, ἡ δὲ ΚΕ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῇ ΗΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. ἐὰν δὲ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β ληφθῶσιν περιφέρειαι ἴσαι αἱ ΜΒ, ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΒ ἡ ΝΞ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΔΜ, ἔσονται πάλιν τῶν ΓΞ, ΞΟ μέσαι ἀνάλογον αἱ ΝΞ, ΞΔ.

68 πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ Β ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ Β ὡς ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐπὶ τὰ γενάμενα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ Δ, ὡς τῶν ὁμοίων ταῖς ΔΕ, ΔΜ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν Β, Δ κατὰ τινὰ σημεῖα, ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ Ο, Θ, ἐφ' ᾧ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας ἔξομεν καταγεγραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμὴν, ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΒ, ἔσται ἡ ἀχθεῖσα καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ Δ μέσαι ἀνάλογον τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ Γ σημείῳ καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον. τούτων προκατεσκευασμένων ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ Α, Β, καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμὴ, ὡς προεῖρηται, ἡ ΔΘΖ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΚ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΜ· διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν ΓΛ, ΛΘ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΛ, ΛΔ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΘ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς ΓΛ, ΑΜ, ΛΔ, ΛΘ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν Α, Β, ὡς τὰς Ν, Ξ, ἔσονται εἰλημμένοι τῶν Α, Β μέσαι ἀνάλογον αἱ Ν, Ξ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

70 Ὡς Πάππος ἐν Μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς. Προέθετο μὲν ὁ Πάππος κύβον εὑρεῖν πρὸς τὸν δοθέντα κύβον λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ὡς πρὸς τὴν τοιαύτην πρόθεσιν καὶ τὰ τῆς ἀποδείξεως αὐτῷ προέρχεται, δῆλον δέ, ὅτι τούτου εὐρισκομένου καὶ τὸ προκείμενον εὐρίσκεται· δύο γὰρ δοθεισῶν εὐθειῶν ἐὰν τῶν ὀφειλουσῶν μέσων εὑρεθῇ ἡ δευτέρα εὑρεθῇ, καὶ ἡ τρίτη αὐτόθεν δοθήσεται. γεγράφθω γάρ, ὡς φησιν αὐτὸς κατὰ λέξιν, ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΒ, καὶ κινείσθω κανόνιον περὶ τὸ Α σημεῖον, ὥστε τὸ μὲν ἐν

πέρας αὐτοῦ περικεῖσθαι τυλίω τινὶ κατὰ τὸ Α σημεῖον ἐστῶτι, τὸ δὲ λοιπὸν μέρος ὡς περὶ κέντρον τὸ τυλάριον κινεῖσθαι μεταξύ τῶν Β, Γ. τούτων δὲ κατεσκευασμένων ἐπιτετάχθω δύο κύβους εὐρεῖν λόγον ἔχοντας πρὸς ἀλλήλους τὸν ἐπιταχθέντα. καὶ τῷ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ.

⁷² παραγέσθω δὴ τὸ κανόνιον μεταξύ τῶν Β, Γ, ἕως οὗ τὸ ἀπολαμβανόμενον αὐτοῦ μέρος μεταξύ τῶν ΖΕ, ΕΒ εὐθειῶν ἴσον γένηται τῷ μεταξύ τῆς ΒΕ εὐθείας καὶ τῆς ΒΚΓ περιφερείας· τοῦτο γὰρ πειράζοντες καὶ μετάγοντες τὸ κανόνιον ῥαδίως ποιήσομεν. γεγονέτω δὴ, καὶ ἐχέτω θέσιν τὴν ΑΚ, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΗΘ, ΘΚ. λέγω, ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα, τουτέστι τὸν τῆς ΒΔ πρὸς ΔΕ. νενοήσθω γὰρ ὁ κύκλος ἀναπεπληρωμένος, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν τῇ ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΚΘ τῇ ΗΘ, τὴν δὲ ΚΔ τῇ ΔΛ. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ τε ΑΛ καὶ ἡ ΛΓ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· καὶ κάθετος ἡ ΑΜ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΓΜ πρὸς ΜΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ. κοινὸς προσκείσθω ὁ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ λόγος· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΜ πρὸς ΜΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ὁ τῆς ΓΜ πρὸς ΜΗ λόγος, ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΗ καὶ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΗ ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ· καὶ ὁ τῆς ΓΜ ἄρα πρὸς ΜΗ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶ τῷ λόγῳ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ τῆς ΑΜ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΜΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΜ πρὸς ΜΗ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΕ, τουτέστιν ὡς ὁ δοθεὶς λόγος, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον.

⁷⁴ τῶν ἄρα ὀφειλουσῶν εὐρεθῆναι δύο μέσων ἀνάλογον τῶν ΒΔ, ΔΕ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΔΘ· καὶ ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὴν ΒΔ πρὸς ΔΘ, τὴν ΘΔ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται καὶ ἡ τρίτη ἡρῆμένη. Προσέχειν δὲ χρή, ὡς καὶ ἡ τοιαύτη κατασκευὴ ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ὑπὸ Διοκλέους εἰρημένη τούτῳ μόνον διαφέρουσα τῷ ἐκεῖνον μὲν γραμμὴν τινὰ καταγράφειν διὰ συνεχῶν σημείων μεταξύ τῶν Α, Β, ἐφ' ἧς ἐλαμβάνετο τὸ Η ἐκβαλλομένης τῆς ΓΕ καὶ τεμνούσης τὴν εἰρημένην γραμμὴν, ἐνταῦθα δὲ τὸ Η πορίζεται διὰ τοῦ ΑΚ κανόνος κινουμένου περὶ τὸ Α. ὅτι γὰρ τὸ Η τὸ αὐτό ἐστὶ, εἴτε ὡς ἐνταῦθα διὰ τοῦ κανόνος ληφθῇ, εἴτε ὡς ἔφη Διοκλῆς, μάθοιμεν ἂν οὕτως. ἐκβληθείσης τῆς ΜΗ κατὰ τὸ Ν ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΗ, καὶ παράλληλος ἡ ΗΝ τῇ ΘΒ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΕ τῇ ΕΝ. καὶ κοινὴ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΒ· ἡ γὰρ ΚΝ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνεται ὑπὸ τῆς διὰ τοῦ κέντρου· καὶ βάσις ἄρα βάσει ἴση, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΒ περιφέρεια τῇ ΒΝ. τὸ ἄρα Η ἐστὶν τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τοῦ Διοκλέους. καὶ ἡ ἀπόδειξις δὲ ἡ αὐτὴ ἐστὶν. ἔφασκεν γὰρ ὁ Διοκλῆς, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΜ πρὸς ΜΝ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ καὶ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΝΜ τῇ ΜΛ· ἡ γὰρ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΜ πρὸς ΜΛ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΑ καὶ ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ. τῶν ἄρα ΓΜ, ΜΗ μέσαι ἀνάλογόν εισιν αἱ ΑΜ, ΜΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΜ πρὸς ΜΗ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς ΜΛ, ἡ ΑΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ· καὶ τῶν δύο μέσων ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΕ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΔΘ, ἥντινα ἐπορίσατο καὶ ὁ Πάππος. Ὡς Σπόρος.

⁷⁶ (1τ) Ὡς τωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ δύο μέσας ἀνάλογον εὐρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒΕ, καὶ κέντρῳ τῷ Β, διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ, ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΔΑΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα οὕτως, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΗΘ τῇ ΘΚ· τοῦτο γὰρ δυνατόν· καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Κ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετοι αἱ ΗΛ, ΚΝΜ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΜΒ πρὸς ΒΛ, ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΛ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΜΕ τῇ ΛΔ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΛΕ ἐστὶν ἴση, καὶ διὰ τοῦτό ἐστὶν, ὡς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ, ἡ ΛΕ πρὸς ΕΜ.

ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ, ἡ ΚΜ πρὸς ΗΛ, ὥς δὲ ἡ ΛΕ πρὸς ΕΜ, ἡ ΗΛ πρὸς ΝΜ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὥς ἡ ΔΜ πρὸς ΜΚ, ἡ ΚΜ πρὸς ΜΕ, ὥς ἄρα ἡ ΔΜ πρὸς ΜΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ· ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὥς ἡ ΜΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΛΕ πρὸς ΕΒ, ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΜΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΚΜ πρὸς ΘΒ, ὥς δὲ ἡ ΛΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΗΛ πρὸς ΓΒ, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΚΜ πρὸς ΘΒ, ἡ ΗΛ πρὸς ΓΒ· καὶ ἐναλλάξ, ὥς ἡ ΚΜ πρὸς ΗΛ, ἡ ΘΒ πρὸς ΓΒ. ἀλλ' ὥς ἡ ΚΜ πρὸς ΗΛ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, ἡ ΒΘ πρὸς ΒΓ.

78 εἰλήφθω τῶν ΘΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἡ Ξ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ, ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΘ, ἡ δὲ ΘΒ πρὸς ΒΓ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΒ πρὸς Ξ, καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΘ, ἡ ΒΘ πρὸς Ξ. ἀλλ' ὥς ἡ ΘΒ πρὸς Ξ, ἡ Ξ πρὸς ΒΓ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΘ, ἡ ΘΒ πρὸς Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς ΒΓ. Φανερόν δέ, ὅτι καὶ αὕτη ἡ αὕτη ἐστίν τῇ τε ὑπὸ Πάππου καὶ Διοκλέους γεγραμμένη. Ὡς Μέναιχμος. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ Α, Ε· δεῖ δὴ τῶν Α, Ε δύο μέσας ἀνάλογον εὐρεῖν. γεγονέτω, καὶ ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκείσθω θέσει εὐθεῖα ἡ ΔΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ πρὸς τῷ Δ τῇ Γ ἴση κείσθω ἡ ΔΖ, καὶ ἦχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΘ, καὶ τῇ Β ἴση κείσθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης τῆς Α καὶ τῆς Γ, τουτέστι τῆς ΔΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἐπὶ παραβολῆς ἄρα τὸ Θ διὰ τοῦ Δ γεγραμμένης, ἦχθωσαν παράλληλοι αἱ ΘΚ, ΔΚ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν τὸ ὑπὸ Β, Γ· ἴσον γάρ ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α, Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΚΘΖ.

80 ἐπὶ ὑπερβολῆς ἄρα τὸ Θ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ. δοθὲν ἄρα τὸ Θ· ὥστε καὶ τὸ Ζ. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Α, Ε, ἡ δὲ τῇ θέσει ἡ ΔΗ πεπερασμένη κατὰ τὸ Δ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παραβολή, ἥς ἄξων μὲν ἡ ΔΗ, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ Α, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΗ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ δυνάσθωσαν τὰ παρὰ τὴν Α παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Δ σημείω. γεγράφθω καὶ ἔστω ἡ ΔΘ, καὶ ὀρθῇ ἡ ΔΚ, καὶ ἐν ἀσυμπτώτοις ταῖς ΚΔ, ΔΖ γεγράφθω ὑπερβολή, ἀφ' ἧς αἱ παρὰ τὰς ΚΔ, ΔΖ ἀχθεῖσαι ποιήσουσιν τὸ χωρίον ἴσον τῷ ὑπὸ Α, Ε· τεμεῖ δὴ τὴν παραβολήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Θ, καὶ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΖ, ἔστιν, ὥς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΖΔ, ἔστιν, ὥς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΔ πρὸς τὴν Ε. ἀλλ' ὥς ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ· καὶ ὥς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΔ καὶ ἡ ΖΔ πρὸς Ε. κείσθω τῇ μὲν ΘΖ ἴση ἡ Β, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ Γ· ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Β πρὸς τὴν Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Ε. αἱ Α, Β, Γ, Ε ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει εὐρεῖν. Ἄλλως.

82 (1τ) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ γεγονέτωσαν αὐτῶν μέσαι αἱ ΔΒ, ΒΕ, ὥστε εἶναι, ὥς τὴν ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως τὴν ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ τὴν ΒΕ πρὸς ΒΑ, καὶ ἦχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΔΖ, ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὥς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τουτέστι τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, τὸ Ζ ἄρα ἄπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὥς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΒΔ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι τῆς ΔΖ· τὸ Ζ ἄρα ἄπτεται παραβολῆς τῆς περὶ ἄξονα τὴν ΒΔ. ἦπται δὲ καὶ ἐτέρας δοθείσης τῆς περὶ τὴν ΒΕ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. καὶ κάθετοι αἱ ΖΔ, ΖΕ· δοθέντα ἄρα τὰ Δ, Ε. συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἀπειρον ἀπὸ τοῦ Β, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΒΕ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας ἐπὶ τὴν ΒΕ δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΒΓ. πάλιν γεγράφθω περὶ ἄξονα τὴν ΔΒ παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν ΑΒ· τεμοῦσιν δὲ ἀλλήλας αἱ παραβολαί. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΖΔ, ΖΕ. ἐπεὶ

οὖν ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ.

84 πάλιν, ἐπεὶ ἐν παραβολῇ κατῆκται ἡ ΖΔ, τουτέστιν ἡ ΕΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΒ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΒΕ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς ΒΑ· ὅπερ ἔδει εὐρεῖν. [Γράφεται δὲ ἡ παραβολὴ διὰ τοῦ εὐρεθέντος διαβήτου τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ τῷ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ, γραφέντος δὲ ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὸ γενόμενον αὐτῷ υπόμνημα τῶν Ἑρῶνος Καμαρικῶν]. Ἡ Ἀρχύτου εὕρησις, ὡς Εὐδημος ἱστορεῖ. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, Γ· δεῖ δὴ τῶν ΑΔ, Γ δύο μέσας ἀνάλογον εὐρεῖν. γεγράφθω περὶ τὴν μείζονα τὴν ΑΔ κύκλος ὁ ΑΒΔΖ, καὶ τῇ Γ ἴση ἐνηρμόσθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Π, παρὰ δὲ τὴν ΠΔΟ ἤχθω ἡ ΒΕΖ, καὶ νεονήσθω ἡμικυλίνδριον ὀρθὸν ἐπὶ τοῦ ΑΒΔ ἡμικυκλίου, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΔ ἡμικύκλιον ὀρθὸν ἐν τῷ τοῦ ἡμικυλινδρίου παραλληλογράμμῳ κείμενον· τοῦτο δὴ τὸ ἡμικύκλιον περιαγόμενον ὡς ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β μένοντος τοῦ Α πέρατος τῆς διαμέτρου τεμεῖ τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν ἐν τῇ περιαγωγῇ καὶ γράψει ἐν αὐτῇ γραμμὴν τινα. πάλιν δέ, ἐὰν τῆς ΑΔ μενούσης τὸ ΑΠΔ τρίγωνον περιενεχθῇ τὴν ἐναντίαν τῷ ἡμικυκλίῳ κίνησιν, κωνικήν ποιήσει ἐπιφάνειαν τῇ ΑΠ εὐθείᾳ, ἡ δὲ περιαγομένη συμβαλεῖ τῇ κυλινδρικῇ γραμμῇ κατὰ τι σημεῖον· ἅμα δὲ καὶ τὸ Β περιγράψει ἡμικύκλιον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. ἐχέτω δὴ θέσιν κατὰ τὸν τόπον τῆς συμπτώσεως τῶν γραμμῶν τὸ μὲν κινούμενον ἡμικύκλιον ὡς τὴν τοῦ ΔΚΑ, τὸ δὲ ἀντιπεριαγόμενον τρίγωνον τὴν τοῦ ΔΛΑ, τὸ δὲ τῆς εἰρημένης συμπτώσεως σημεῖον ἔστω τὸ Κ, ἔστω δὲ καὶ τὸ διὰ τοῦ Β γραφόμενον ἡμικύκλιον τὸ ΒΜΖ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τοῦ ΒΔΖΑ κύκλου ἔστω ἡ ΒΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΔΑ ἡμικυκλίου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω· πεσεῖται δὲ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν διὰ τὸ ὀρθὸν ἐστάναι τὸν κύλινδρον.

86 πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΚΙ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ι ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευχθεῖσα συμβαλέτω τῇ ΒΖ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ ΑΛ τῷ ΒΜΖ ἡμικυκλίῳ κατὰ τὸ Μ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΚΔ, ΜΙ, ΜΘ. ἐπεὶ οὖν ἐκάτερον τῶν ΔΚΑ, ΒΜΖ ἡμικυκλίων ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΜΘ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΒΖ ὀρθή ἐστὶν ἡ ΜΘ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΘΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΘΙ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΜΘ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΜΙ τρίγωνον ἐκατέρῳ τῶν ΜΙΘ, ΜΑΘ, καὶ ὀρθή ἡ ὑπὸ ΙΜΑ. ἔστιν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΚΑ ὀρθή· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΚΔ, ΜΙ, καὶ ἔσται ἀνάλογον, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΚ, τουτέστιν ἡ ΚΑ πρὸς ΑΙ, οὕτως ἡ ΙΑ πρὸς ΑΜ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων. τέσσαρες ἄρα αἱ ΔΑ, ΑΚ, ΑΙ, ΑΜ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΜ ἴση τῇ Γ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΑΒ· δύο ἄρα δοθειῶν τῶν ΑΔ, Γ δύο μέσαι ἀνάλογον ηὔρηται αἱ ΑΚ, ΑΙ.

88 Ὡς Ἐρατοσθένης. Βασιλεῖ Πτολεμαίῳ Ἐρατοσθένης χαίρειν. Τῶν ἀρχαίων τινὰ τραγωδοποιῶν φασιν εἰσαγαγεῖν τὸν Μίνω τῷ Γλαύκῳ κατασκευάζοντα τάφον, πυθόμενον δέ, ὅτι πανταχοῦ ἐκατόμπεδος εἶη, εἰπεῖν· μικρόν γ' ἔλεξας βασιλικὸν σηκὸν τάφου· διπλάσιος ἔστω, τοῦ καλοῦ δὲ μὴ σφαλεῖς δίπλαζ' ἕκαστον κῶλον ἐν τάχει τάφου. ἐδόκει δὲ διημαρτηκέναι· τῶν γὰρ πλευρῶν διπλασιασθειῶν τὸ μὲν ἐπίπεδον γίνεται τετραπλάσιον, τὸ δὲ στερεὸν ὀκταπλάσιον. ἐζητεῖτο δὲ καὶ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, τίνα ἂν τις τρόπον τὸ δοθὲν στερεὸν διαμένον ἐν τῷ αὐτῷ σχήματι διπλασιάσειεν, καὶ ἐκαλεῖτο τὸ τοιοῦτον πρόβλημα κύβου διπλασιασμός· ὑποθέμενοι γὰρ κύβον ἐζήτουν τοῦτον διπλασιάσαι. πάντων δὲ διαπορούντων ἐπὶ πολὺν χρόνον πρῶτος Ἰπποκράτης ὁ Χῖος ἐπενόησεν, ὅτι, ἐὰν εὐρεθῇ δύο εὐθειῶν γραμμῶν, ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονός ἐστι διπλασία, δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, διπλασιασθήσεται ὁ κύβος, ὥστε τὸ ἀπόρημα αὐτῷ εἰς ἕτερον οὐκ ἔλασσον ἀπόρημα κατέστρεφεν. μετὰ χρόνον δὲ τινὰς φασιν Δηλίους ἐπιβαλλομένους κατὰ χρησμὸν διπλασιάσαι

τινὰ τῶν βωμῶν ἐμπεσεῖν εἰς τὸ αὐτὸ ἀπόρημα, διαπεμψαμένους δὲ τοὺς παρὰ τῷ Πλάτῳ ἐν Ἀκαδημίᾳ γεωμέτρως ἀξιοῦν αὐτοῖς εὐρεῖν τὸ ζητούμενον.

90 τῶν δὲ φιλοπόνως ἐπιδιδόντων ἑαυτοὺς καὶ ζητούντων δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσας λαβεῖν Ἀρχύτας μὲν ὁ Ταραντῖνος λέγεται διὰ τῶν ἡμικυλίνδρων εὐρηκέναι, Εὐδόξος δὲ διὰ τῶν καλουμένων καμπύλων γραμμῶν· συμβέβηκε δὲ πᾶσιν αὐτοῖς ἀποδεικτικῶς γεγραφέναι, χειρουργῆσαι δὲ καὶ εἰς χρεῖαν πεσεῖν μὴ δύνασθαι πλὴν ἐπὶ βραχὺ τι τὸν Μέναιχμον καὶ ταῦτα δυσχερῶς. ἐπινενόηται δὲ τις ὑφ' ἡμῶν ὀργανικὴ λήψις ῥαδία, δι' ἧς εὐρήσομεν δύο τῶν δοθεισῶν οὐ μόνον δύο μέσας, ἀλλ' ὅσας ἂν τις ἐπιτάξῃ. τούτου δὲ εὕρισκομένου δυνησόμεθα καθόλου τὸ δοθὲν στερεὸν παραλληλογράμμοις περιεχόμενον εἰς κύβον καθιστάναι ἢ ἐξ ἐτέρου εἰς ἕτερον μετασχηματίζειν καὶ ὅμοιον ποιεῖν καὶ ἐπαύξειν διατηροῦντας τὴν ὁμοιότητα, ὥστε καὶ βωμοὺς καὶ ναοὺς δυνησόμεθα δὲ καὶ τὰ τῶν ὑγρῶν μέτρα καὶ ξηρῶν, λέγω δὲ οἷον μετρητὴν ἢ μέδιμνον, εἰς κύβον καθίστασθαι καὶ διὰ τῆς τούτου πλευρᾶς ἀναμετρεῖν τὰ τούτων δεκτικὰ ἀγγεῖα, πόσον χωρεῖ. χρήσιμον δὲ ἔσται τὸ ἐπινόημα καὶ τοῖς βουλομένοις ἐπαύξειν καταπαλτικὰ καὶ λιθοβόλα ὄργανα· δεῖ γὰρ ἀνάλογον ἅπαντα αὐξηθῆναι καὶ τὰ πάχη καὶ τὰ μεγέθη καὶ τὰς κατατρήσεις καὶ τὰς χοινικίδας καὶ τὰ ἐμβαλλόμενα νεῦρα, εἰ μέλλει καὶ ἡ βολὴ ἀνάλογον ἐπαυξηθῆναι, ταῦτα δὲ οὐ δυνατὰ γενέσθαι ἄνευ τῆς τῶν μέσων εὐρέσεως. τὴν δὲ ἀπόδειξιν καὶ τὴν κατασκευὴν τοῦ λεχθέντος ὀργάνου ὑπογέγραφα σοι. δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὐρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΑΕ, ΔΘ, καὶ κείσθω ἐπὶ τινος εὐθείας τῆς ΕΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΕΘ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς τὰ ΑΖ, ΖΙ, ΙΘ, καὶ ἦχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΙΘ· ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι.

92 μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ΖΙ συνωσθήτω τὸ μὲν ΑΖ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ΙΘ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γέννηται τὰ Α, Β, Γ, Δ κατ' εὐθεῖαν, καὶ διήχθω διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων εὐθεῖα καὶ συμπίπττω τῇ ΕΘ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὸ Κ· ἔσται δὴ, ὥς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΖΒ παραλλήλοις ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. ὥς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ καὶ ἡ ΚΖ πρὸς ΚΗ. πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν, ὥς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἐν μὲν ταῖς ΒΖ, ΓΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἐν δὲ ταῖς ΒΗ, ΓΘ παραλλήλοις ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὥς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὥς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὥς ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ὥς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ, ὥς δὲ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ καὶ ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ. ἠύρηνται ἄρα τῶν ΑΕ, ΔΘ δύο μέσαι ἢ τε ΒΖ καὶ ἡ ΓΗ. ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρούμενων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται· ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίων ξύλινον ἢ ἐλεφάντινον ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους, ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοὶ εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσιν καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσιν· τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται· πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένη πάντα καὶ ἄσχεστα καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις.

94 ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἔστιν καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχοημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα, μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὥς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ. Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὐρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ ΑΕ, ΔΘ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γέννηται τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα. νοείσθω δὴ, ὥς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΒΖ παραλλήλοις ἡ

ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ ἢ ΖΚ πρὸς ΚΗ· ὥς ἄρα ἢ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἢ ΚΖ πρὸς ΚΗ. ὥς δὲ αὐταὶ πρὸς ἀλλήλας, ἢ τε ΑΕ πρὸς ΒΖ καὶ ἢ ΒΖ πρὸς ΓΗ. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ, ὥς ἢ ΖΒ πρὸς ΓΗ, ἢ ΓΗ πρὸς ΔΘ· ἀνάλογον ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ.

96 ἡϋρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι. ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσιν ταῖς ΑΕ, ΔΘ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς ΑΕ, ΔΘ τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὐρεῖν, αἰεὶ ἐνὶ πλείους πινακίσκους καταστησόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων· ἢ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή· Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλήσιον, ὧγαθέ, τεύχειν φράζει ἢ στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην ἢ σιρὸν ἢ κοίλου φρεΐατος εὐρὺ κύτος τῇδ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις συνδρομάδας δισσωὺς ἐντὸς ἔλης κανόνων. μὴδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων μὴδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας διζήσῃ, μὴδ' εἴ τι θεοῦδέος Εὐδόξοιο καμπύλον ἐγ γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται. τοῖσδε γὰρ ἐν πινακέσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις ῥεῖά κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος. εὐαίων, Πτολεμαῖε, πατήρ ὅτι παιδί συνηβῶν πάνθ', ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα, αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ, καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερὸς. καὶ τὰ μὲν ὡς τελέοιτο, λέγοι δὲ τις ἄνθεμα λεύσσων τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένης. Ὡς Νικομήδης ἐν τῷ Περὶ κογχοειδῶν γραμμῶν.

98 (1τ) Γράφει δὲ καὶ Νικομήδης ἐν τῷ ἐπιγεγραμμένῳ πρὸς αὐτοῦ Περὶ κογχοειδῶν συγγράμματι ὀργάνου κατασκευὴν τὴν αὐτὴν ἀποπληροῦντος χρεῖαν, ἐφ' ᾗ καὶ μεγάλα μὲν σεμνυνόμενος φαίνεται ὁ ἀνὴρ, πολλὰ δὲ τοῖς Ἐρατοσθένης ἐπεγγελῶν εὐρήμασιν ὡς ἀμηχάνοις τε ἅμα καὶ γεωμετρικῆς ἔξεως ἐστερημένοις. τοῦ τε ἀνελλιποῦς τοίνυν τῶν περὶ τὸ πρόβλημα πεπονηκότων τῆς τε πρὸς Ἐρατοσθένη συγκρίσεως ἔνεκα καὶ αὐτὸν τοῖς ἤδη γεγραμμένοις συνάπτομεν δυνάμει γράφοντα οὕτως· νοεῖν χρὴ κανόνας δύο πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοισι συμβεβλημένους οὕτως, ὥστε μίαν ἀποσώζειν αὐτοὺς ἐπιφάνειαν, καθάπερ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐν δὲ τῷ ΑΒ σωλῆνα πελεκινοειδῇ, εἰς ὃν χελώνιον διατρέχειν δυνήσεται, ἐν δὲ τῷ ΓΔ κατὰ τὸ μέρος τὸ πρὸς τῷ Δ καὶ τὴν μέσον διαιροῦσαν εὐθεῖαν τὸ πλάτος αὐτοῦ κυλίνδριον συμφυὲς τῷ κανόνι καὶ βραχὺ ὑπερέχον τῆς ἄνωθεν ἐπιφανείας αὐτοῦ τοῦ κανόνος, ἄλλον δὲ κανόνα ὡς τὸν ΕΖ μετὰ βραχὺ τι διάστημα τοῦ πρὸς τῷ Ζ πέρατος ἀνατομὴν ἔχοντα ὡς τὴν ΗΘ δυναμένην περιβαίνειν τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίῳ, πρὸς δὲ τῷ Ε ὀπὴν στρογγύλην, ἣτις ἐγκείσεται εἰς τι ἄξόνιον συμφυὲς τῷ διατρέχοντι χελωναρίῳ ἐν τῷ πελεκινοειδεῖ σωλῆνι τῷ ὄντι ἐν τῷ ΑΒ κανόνι. ἐναρμοσθέντος τοίνυν τοῦ ΕΖ κανόνος κατὰ μὲν τὴν ΗΘ ἀνατομὴν ἐν τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίῳ, κατὰ δὲ τὴν Ε ὀπὴν ἐν τῷ ἄξωνίῳ τῷ συμφυεῖ τῷ χελωναρίῳ, ἐὰν τις ἐπιλαβόμενος τοῦ Κ ἄκρου τοῦ κανόνος κινήσῃ αὐτὸν ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Α μέρη, ἔπειτα ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Β, τὸ μὲν Ε σημεῖον αἰεὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒ κανόνος ἐνεχθήσεται, ἢ δὲ ΗΘ ἀνατομὴ ἐπὶ τῷ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίῳ κινήσεται αἰεὶ τῆς μέσης τοῦ ΕΖ κανόνος εὐθείας ἐν τῇ κινήσει διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ πρὸς τῷ Δ κυλινδρίου νοουμένης, τῆς δὲ ΕΚ ὑπεροχῆς τοῦ κανόνος αἰεὶ τῆς αὐτῆς μενούσης.

100 ἐὰν τοίνυν πρὸς τῷ Κ ἐπινοήσωμέν τι γραφεῖον ἐφαπτόμενον τοῦ ἐδάφους, γραφήσεται τις γραμμὴ, οἷα ἐστὶν ἡ ΛΜΝ, ἣντινα καλεῖ Νικομήδης κογχοειδῇ πρώτην γραμμὴν, καὶ διάστημα μὲν τῆς γραμμῆς τὸ ΕΚ μέγεθος τοῦ κανόνος, πόλον δὲ τὸ Δ. ταύτῃ δὴ τῇ γραμμῇ συμβαῖνον δείκνυσιν τὸ αἰεὶ ἐπ' ἔλαττον μὲν συμπορεύεσθαι τῷ ΑΒ κανόνι, καὶ ἐὰν τις εὐθεῖα διαχθῇ μεταξὺ τῆς τε γραμμῆς καὶ τοῦ ΑΒ κανόνος, ὅτι πάντως τέμνει τὴν γραμμὴν. καὶ τὸ μὲν πρότερον τῶν συμβαινόντων ἐστὶν εὐκατανόητον ἐφ' ἑτέρας καταγραφῆς. κανόνος γὰρ νοουμένου τοῦ ΑΒ, πόλου δὲ τοῦ Γ, διαστήματος δὲ τοῦ ΔΕ, γραμμῆς δὲ κογχοειδοῦς τῆς ΖΕΗ, προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ Γ δύο αἱ ΓΘ, ΓΖ, ἴσων δηλονότι γινομένων τῶν ΚΘ, ΑΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΖΜ κάθετος ἐλάττων τῆς ΘΝ καθέτου. μείζονος γὰρ οὔσης τῆς ὑπὸ ΜΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΝΚΓ

λοιπή ή λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ή ὑπὸ ΜΛΖ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΝΚΘ ἐστὶν ἐλάσσων, καὶ διὰ τοῦτο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν πρὸς τοῖς Μ, Ν μείζων ἔσται καὶ ή πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Θ. καὶ ἐὰν τῇ πρὸς τῷ Θ ἴσῃν συστησώμεθα τὴν ὑπὸ ΜΖΞ, ή ΚΘ, τουτέστιν ή ΛΖ, πρὸς ΘΝ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν ή ΞΖ πρὸς ΖΜ· ὥστε ή ΖΛ πρὸς τὴν ΘΝ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν ΖΜ, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ή ΘΝ τῆς ΖΜ.

102 τὸ δὲ δευτέρον ἦν τὸ τὴν διαγομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τῆς τε ΑΒ καὶ τῆς γραμμῆς τέμνειν τὴν γραμμὴν· καὶ τοῦτο δὲ οὕτω γίνεται γινώριμον· ή γὰρ διαγομένη ἦτοι παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ ἢ οὐ. ἔστω πρότερον παράλληλος, ὡς ή ΖΗΘ, καὶ γεγονέτω, ὡς ή ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ή ΔΕ πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Κ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῇ Κ, περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ή ΓΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς ή ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ή ΛΖ πρὸς ΖΓ. ἀλλ' ὡς ή ΔΗ πρὸς ΗΓ, οὕτως ἦν ή ΔΕ πρὸς τὴν Κ, τουτέστι τὴν ΓΖ· ἴση ἄρα ή ΔΕ τῇ ΛΖ· ὅπερ ἀδύνατον· δεῖ γὰρ εἶναι τὸ Ζ πρὸς τῇ γραμμῇ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ή διαγομένη παράλληλος, καὶ ἔστω ὡς ή ΜΗΝ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΑΒ ή ΖΗ. ή ἄρα ΖΗ συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ· ὥστε πολλῷ μᾶλλον ή ΜΝ. τούτων δὲ ὄντων τῶν παρακολουθημάτων διὰ τοῦ ὀργάνου τὸ χρήσιμον εἰς τὸ προκείμενον δείκνυται οὕτως· πάλιν γωνίας δοθείσης τῆς Α καὶ σημείου ἐκτὸς τοῦ Γ διαγαγεῖν τὴν ΓΗ καὶ ποιεῖν τὴν ΚΗ ἴσην τῇ δοθείσῃ. ἦχθω κάθετος ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ ή ΓΘ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ δοθείσῃ ἴση ἔστω ή ΔΘ, καὶ πόλῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ δοθέντι τῷ ΔΘ, κανόνι δὲ τῷ ΑΒ, γεγράφθω κογχοειδὴς γραμμὴ πρώτη ή ΕΔΖ· συμβάλλει ἄρα τῇ ΑΗ διὰ τὸ προδειχθέν.

104 συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ή ΓΗ· ἴση ἄρα ή ΚΗ τῇ δοθείσῃ. τούτων δειχθέντων δεδόσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΛ, ΛΑ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς εὐρεῖν, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς Δ, Ε σημείοις, καὶ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ή ΔΛ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η, τῇ δὲ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ή ΕΖ, καὶ προσβεβλήσθω ή ΓΖ ἴση οὖσα τῇ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ή ΖΗ καὶ αὐτῇ παράλληλος ή ΓΘ, καὶ γωνίας οὔσης τῆς ὑπὸ τῶν ΚΓΘ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ζ διήχθω ή ΖΘΚ ποιοῦσα ἴσην τὴν ΘΚ τῇ ΑΔ ἢ τῇ ΓΖ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν, ἐδείχθη διὰ τῆς κογχοειδοῦς· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ή ΚΛ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ή ΓΛ πρὸς ΚΓ, ή ΚΓ πρὸς ΜΑ καὶ ή ΜΑ πρὸς τὴν ΑΛ. ἐπεὶ ή ΒΓ τέτμηται δίχα τῷ Ε, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ή ΚΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΚ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τῶν ἀπὸ ΓΕΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΚΕΖ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΚΖ. καὶ ἐπεὶ, ὡς ή ΜΑ πρὸς ΑΒ, ή ΜΛ πρὸς ΛΚ, ὡς δὲ ή ΜΛ πρὸς ΛΚ, οὕτως ή ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ ὡς ἄρα ή ΜΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως ή ΒΓ πρὸς ΓΚ.

106 καὶ ἐστὶν τῆς μὲν ΑΒ ἡμίσεια ή ΑΔ, τῆς δὲ ΒΓ διπλῇ ή ΓΗ (ἐπεὶ καὶ ή ΛΓ τῆς ΔΒ)· ἔσται ἄρα καί, ὡς ή ΜΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ή ΗΓ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὡς ή ΗΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ή ΖΘ πρὸς ΘΚ διὰ τὰς παραλλήλους τὰς ΗΖ, ΓΘ· καὶ συνθέντι ἄρα, ὡς ή ΜΔ πρὸς ΔΑ, ή ΖΚ πρὸς ΚΘ. ἴση δὲ ὑπόκειται καὶ ή ΑΔ τῇ ΘΚ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΓΖ ἴση ἐστὶν ή ΑΔ· ἴση ἄρα καὶ ή ΜΔ τῇ ΖΚ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΜΔ τῷ ἀπὸ ΖΚ. καὶ ἐστὶν τῷ μὲν ἀπὸ ΜΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΒΜΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΒΚΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΖ· ἴση γὰρ ὑπόκειται ή ΑΔ τῇ ΓΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΜΑ τῷ ὑπὸ ΒΚΓ. ὡς ἄρα ή ΜΒ πρὸς ΒΚ, ή ΚΓ πρὸς ΑΜ. ἀλλ' ὡς ή ΜΒ πρὸς ΒΚ, ή ΓΛ πρὸς ΓΚ· καὶ ὡς ἄρα ή ΛΓ πρὸς ΓΚ, ή ΓΚ πρὸς ΑΜ. ἔστιν δὲ καί, ὡς ή ΛΓ πρὸς ΓΚ, ή ΜΑ πρὸς ΑΛ· καὶ ὡς ἄρα ή ΛΓ πρὸς ΓΚ, ή ΓΚ πρὸς ΑΜ καὶ ή ΑΜ πρὸς ΑΛ. Εἰς τὸ β' θεωρήμα. Καὶ συνθέντι, ὡς ή ΔΘ πρὸς ΘΓ, ή ΓΑ πρὸς ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ ὡς γὰρ ἐπὶ αὐτῆς τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΓΒΑ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ή ΒΕ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοία ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις, καὶ διὰ

τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ καὶ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ· ὥστε καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ.

108 ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ· ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δείκνυται, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. διὰ γὰρ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ἐστὶ πάλιν, ὡς ἡ μὲν ΑΓ πρὸς ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΓ, πρὸς ΓΕ, τουτέστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. εἴτα ἐφεξῆς δεικνύναι πειρώμενος τῷ ΒΑΖ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσον τὸν ΒΚΖ κῶνον ἐκθέμενος κῶνον τὸν Ν βάσιν μὲν ἔχοντα ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ΒΑΖ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, φησὶν, ὅτι ὁ Ν κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ΖΑΒΘ στερεῷ τομεῖ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἰστέον δέ, ὅτι ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ οὐ τὸν τοιοῦτον τομέα ἀπεδείκνυνεν ἴσον ὄντα τῷ οὕτως λαμβανομένῳ κῶνῳ, ἀλλὰ τὸν περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς τοῦ κῶνου ἐπιφανείας καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας ἐλάττονος ἡμισφαιρίου, ὄντινα καὶ κυρίως ἐν τοῖς ὅροις τομέα στερεὸν καλεῖν ἐφαίνετο. ἔφασκεν γάρ· τομέα δὲ στερεὸν καλέω, ἐπειδὴν σφαῖραν κῶνος τέμνη τὰν κορυφὰν ἔχων ποτὶ τῷ κέντρῳ τᾶς σφαίρας, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ κῶνου ἐπιφανείας καὶ τᾶς ἐντὸς τοῦ κῶνου υ.

110 τὸ δὲ νῦν προκείμενον σχῆμα περιέχεται μὲν ὑπὸ κωνικῆς ἐπιφανείας τὴν κορυφὴν ἐχούσης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας καὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης τοῦ κῶνου. ὅτι δὲ καὶ τὸ τοιοῦτον σχῆμα ἴσον γίνεται τῷ κῶνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ σφαιρικῇ τῇ περιεχοῦσῃ τὸ τμήμα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δειχθήσεται οὕτως διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ δεδειγμένων. νενοήσθω χωρὶς σφαῖρα καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῷ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλῳ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Α, καὶ νοείσθω κῶνος [ὁ] βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ἐκκείσθω δὲ κῶνος ὁ Ε, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας· ὁ ἄρα Ε κῶνος ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ· τετραπλάσιος γὰρ ἐστὶ τοῦ κῶνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτό, οὐπερ καὶ ἡ σφαῖρα ἐδείχθη τετραπλάσια. ἐκκείσθωσαν δὲ καὶ ἄλλοι δύο κῶνοι οἱ Ζ, Η, ὧν ὁ μὲν Ζ βάσιν ἔχέτω ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν ΒΓΔ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ Η βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κατὰ τὴν ΒΘΔ τμήματος, ὕψος δὲ τὸ αὐτό· ὁ ἄρα Ζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τομεῖ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἐπιφάνεια δὲ σφαιρικὴ ἡ κατὰ τὴν ΒΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ Ε κῶνου βάσις ταῖς τῶν Ζ, Η κῶνων βάσεσιν, καὶ εἰσιν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα, τοῖς Ζ, Η κῶνοις.

112 ἀλλ' ὁ Ζ ἴσος ἐδείχθη τῷ κατὰ τὴν ΒΓΔ στερεῷ τομεῖ κορυφὴν ἔχοντι τὸ Α· λοιπὸς ἄρα ὁ Η κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ λοιπῷ τμήματι βάσιν ἔχων τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κατὰ τὴν ΒΘΔ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου. εἴτα πάλιν φησὶν· ἴσος ἄρα ὁ Ν κῶνος, τουτέστιν ὁ ΒΘΖΑ τομεύς, τῷ ΒΘΖΚ σχήματι ἐπεὶ γὰρ συνήχθη ὁ Ν κῶνος ἴσος ὧν κῶνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ΘΚ, ὁ δὲ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτή, ὕψος δὲ ἡ ΕΚ, ἴσος τῷ τε εἰρημένῳ κῶνῳ καὶ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ΕΘ· πρὸς ἀλλήλους γὰρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη· κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κῶνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ΕΘ, λοιπὸν τὸ ΒΘΖΚ σχῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ κῶνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΖ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΘΚ, τουτέστι τῷ Ν κῶνῳ, τουτέστι τῷ ΒΑΘΖ τομεῖ. ἐπαγαγὼν δὴ τὸ ἐκ τῶν συναχθέντων πόρισμα ἐπὶ τέλει τοῦ θεωρήματος ἐξῆς δι' ἐτέρας ἀποδείξεως συνάγει τὸ τελευταῖον μέρος τοῦ θεωρήματος, τουτέστιν ὅτι τὸ ΑΒΖ τμήμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΚΖ κῶνῳ, καὶ προίων φησιν· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ὅλη ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ ἐστὶν, ὡς ἡ

ΔΘ πρὸς ΔΓ ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, ἡ ΘΓ πρὸς ΓΔ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, τουτέστιν ἡ ΚΘ πρὸς ΘΑ· ἦν γάρ, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΓ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΓ, ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΘΑ. καὶ μετ' ὀλίγον· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΔΘ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΓ νοείσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ ΚΔ, ΑΓ, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ.

114 λέγω, ὅτι ἐστὶν καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΘΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, καὶ συνθέντι ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ· ὥστε καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ κοινοῦ ὕψους τῆς ΘΔ λαμβανομένης, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ κοινοῦ πάλιν ὕψους λαμβανομένης τῆς ΕΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. ἐδείχθη δέ, ὡς τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. καὶ ἀνάπαλιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Εἰς τὸ γ'. Ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ὡς γὰρ ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ, ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΒ κάθετος ἦκται καὶ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἡ ΔΓ, μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις· ὥστ' ἐστὶν, ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, οὕτως ἡ πρώτη ἡ ΒΓ πρὸς τρίτην τὴν ΓΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ.

116 Δοθεὶς δὴ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ· ὥστε δοθέν ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπεὶ γὰρ ἡ σφαῖρα ὑπόκειται δεδομένη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΑΒ. καὶ δέδοται ὁ λόγος τῆς ΑΓ πρὸς ΓΒ· ἐὰν δὲ δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, δέδοται ἐκάτερον τῶν τμημάτων· ὥστε δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΓ. καὶ δοθέν τὸ Α· ἐπὶ γὰρ τῆς κοινῆς τομῆς ἐστὶ θέσει δεδομένων γραμμῶν· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Γ. Εἰς τὸ δ'. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ καὶ ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ ἐν γὰρ τῷ πρὸ τούτου συνήγετο οὕτως· ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΚΔ, ΔΧ πρὸς ΔΧ, οὕτως ἡ ΡΧ πρὸς ΧΒ, διελόντι, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΧ, ἡ ΡΒ πρὸς ΒΧ· ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΚΔ, τουτέστιν ἡ ΚΒ, πρὸς ΒΡ, ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΔΧ πρὸς ΧΔ, οὕτως συναμφοτέρος ἡ ΚΒ, ΒΧ πρὸς ΧΒ, διελόντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ. ἦν δὲ καὶ, ὡς ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ καὶ ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ. Καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ὅλην τὴν ΚΛ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ ὡς γὰρ ἐν πρὸς ἑν, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. Ὡς ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ ἐπεὶ γάρ ἐστὶν, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΚ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἐστὶν ἄρα, ὡς ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΡΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ.

118 ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΡΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ· ἀνάλογον γὰρ εἰσιν· ὡς ἄρα ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. Κείσθω τῇ ΚΒ ἴση ἡ ΒΖ· ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ Ρ πεσεῖται, δῆλον ἐπεὶ γάρ ἐστὶν, ὡς ἡ ΧΔ πρὸς ΧΒ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΡ, μείζων δὲ ἡ ΔΧ τῆς ΧΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ τῆς ΒΡ. ἐκτὸς ἄρα τοῦ Ρ πίπτει τὸ Ζ. Ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς ΔΛ πρὸς ΛΧ δοθεὶς καὶ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ, καὶ τῆς ΡΛ ἄρα πρὸς ΛΔ λόγος ἐστὶ δοθεὶς ἐπεὶ γάρ ἐστὶν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΚΒΧ πρὸς ΒΧ, τουτέστιν ἡ ΖΧ πρὸς ΧΒ, οὕτως ἡ ΛΧ πρὸς ΧΔ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΧΖ πρὸς ΖΒ, οὕτως ἡ ΧΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΧ, ἡ ΛΔ πρὸς ΛΧ. δέδοται δὲ ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ λόγος, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΖΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς δεδομένης σφαίρας, ἡ δὲ ΒΧ τῶν Β, Χ περάτων αὐτῆς δεδομένων καθ' ὑπόθεσιν τετμημένης τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ διὰ τῆς ΑΓ ἐπιπέδου καὶ τῆς ΔΒ πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῇ ΑΓ δέδοται, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ὅλη ἡ ΧΖ καὶ ὁ τῆς

XZ πρὸς ZB· ὥστε καὶ ὁ τῆς XΛ πρὸς ΛΔ λόγος ἐστὶν δοθείς· πάλιν, ἐπειδὴ δέδοται ὁ λόγος τῶν τμημάτων, καὶ ὁ τοῦ ΛΑΓ κώνου πρὸς τὸν ΑΡΓ κώνον λόγος ἔσται δοθείς· ὥστε καὶ ὁ τῆς ΛΧ πρὸς ΧΡ· πρὸς ἀλλήλους γὰρ εἰσιν ὡς τὰ ὕψη· καὶ ὅλης ἄρα τῆς ΡΛ πρὸς τὴν ΛΧ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπεὶ οὖν ἑκατέρας τῶν ΡΛ, ΛΔ πρὸς τὴν ΛΧ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ τῆς ΡΛ ἄρα πρὸς ΛΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ γὰρ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον. Ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΡΛ πρὸς ΛΧ λόγος συνήπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΡΛ πρὸς ΛΔ, καὶ ἡ ΛΔ πρὸς ΛΧ ὅτι μὲν ἡ σύνθεσις τῶν λόγων λαμβάνεται τῆς ΛΔ μέσης λαμβανομένης, ὡς κὰν τῇ Στοιχειώσῃ ἐλαμβάνετο, φανερόν· ἐπεὶ δὲ τὸ λεγόμενον ἀδιαρθρώτως πως καὶ οὐχ οὕτως, ὥστε τὴν ἔννοϊαν ἀποπληρῶσαι, λέλεκται, ὡς ἔστιν εὐρεῖν ἐντυγχάνοντας Πάππῳ τε καὶ Θέωνι καὶ Ἀρκαδίῳ ἐν πολλοῖς συντάγμασιν οὐκ ἀποδεικτικῶς, ἀλλ' ἐπαγωγῇ τὸ λεγόμενον παριστῶσιν, οὐδὲν ἄτοπον πρὸς βραχὺ ἐνδιατρίψαντας τῷ λόγῳ τὸ σαφέστερον παραστήσαι.

120 φημὶ τοίνυν, ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμῶν ᾗτοι μεγεθῶν μέσος τις ὅρος ληφθῇ, ὁ τῶν ἐξ ἀρχῆς ληφθέντων ἀριθμῶν λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν μέσον, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ μέσος πρὸς τὸν τρίτον. ὑπομνηστέον δὲ πρότερον, πῶς ἐλέγετο λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι. ὡς γὰρ ἐν τῇ Στοιχειώσῃ· ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσιν τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ διδόμενος λόγος, ὡς φασιν ἄλλοι τε καὶ Νικόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ Περὶ μουσικῆς καὶ Ἡρώνας ἐν τῷ ὑπομνήματι τῷ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν εἰσαγωγῇ, ταῦτόν δὲ εἰπεῖν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πολλαπλασιαζομένου ἐπὶ τὸν ἐπόμενον ὅρον τοῦ λόγου καὶ ποιούντος τὸν ἡγούμενον. καὶ κυριώτερον μὲν ἐπὶ τῶν πολλαπλασίων ἢ πηλικότης ἂν λαμβάνοιτο, ἐπὶ δὲ τῶν ἐπιμορίων ἢ ἐπιμερῶν οὐκέτι τὴν πηλικότητα δυνατόν λαμβάνεσθαι ἀδιαίρετου μενούσης τῆς μονάδος· ὥστ' ἐπ' ἐκείνων διαιρετέον τὴν μονάδα, ὃ εἰ καὶ μὴ κατὰ τὸ προσῆκον τῇ ἀριθμητικῇ ἀλλὰ τῇ λογιστικῇ τυχάνει. διαιρεῖται δὲ ἡ μονὰς κατὰ τὸ μέρος ἢ τὰ μέρη, ἀφ' ὧν ὠνόμασται ὁ λόγος, ὥστε εἶναι ὡς ἐν σαφεστέρῳ τῷ λέγειν τοῦ μὲν ἡμιολίου λόγου πηλικότητα πρὸς τῇ μονάδι καὶ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, τοῦ δὲ ἐπιτρίτου πρὸς τῇ μονάδι τὸ τρίτον, ὥστε, καθὰ καὶ ἀνωτέρῳ εἴρηται, τὴν πηλικότητα τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἐπόμενον ὅρον πολλαπλασιαζομένην ποιεῖν τὸν ἡγούμενον.

122 τοῦ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ ἐξ ἡμιολίου πηλικότης οὔσα ἡ μονὰς καὶ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὸν ζ ποιεῖ τὸν θ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δὲ τὸ αὐτὸ ἔξεστι κατανοεῖν. τούτων δὲ προσαφηνισθέντων ἐπανακτέον ἐπὶ τὸ προτεθέν. ἔστωσαν γὰρ οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, μέσος δὲ αὐτῶν εἰλήφθω τις ὁ Γ· δεικτέον δὲ, ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνήπται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β. εἰλήφθω γὰρ τοῦ μὲν Α, Γ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ Γ, Β ὁ Ε· ὁ ἄρα Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ. ὁ δὲ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω. λέγω, ὅτι ὁ Ζ πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου, τουτέστιν, ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ γὰρ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Β τὸν μὲν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ὁ Η πρὸς τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. ἐναλλάξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, ἐδείχθη ὁ Η πρὸς τὸν Γ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ· ἴσος ἄρα ὁ Α τῷ Η. ἀλλ' ὁ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ· ὁ Ζ ἄρα πηλικότης ἐστὶ τοῦ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγου.

124 καὶ ἔστιν ὁ Ζ τοῦ Δ ἐπὶ τὸν Ε πολλαπλασιασθέντος, τουτέστι τῆς πηλικότητος τοῦ Α, Γ λόγου ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ Γ, Β λόγου· ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἵνα δὲ καὶ ἐπὶ ὑποδείγματος φανερόν γένηται

τὸ εἰρημένον, παρεμπιπτέτω τοῦ ιβ καὶ τοῦ β μέσος τις ἀριθμὸς ὁ δ . λέγω, ὅτι ὁ τοῦ ιβ πρὸς τὸν β λόγος, τουτέστιν ὁ ἑξαπλάσιος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τριπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὰ δ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ δ πρὸς τὰ β . ἐὰν γὰρ τὰς πηλικότητας τῶν λόγων πολλαπλασιάσωμεν ἐπ' ἀλλήλας, τουτέστι τὸν γ ἐπὶ τὸν β , γίνεται ὁ ζ πηλικότης ὧν τοῦ ιβ πρὸς τὰ β λόγου, καὶ ἐστὶν ἑξαπλάσιος, ὅνπερ καὶ προέκειτο ὑποδείξει. εἰ δὲ καὶ ὁ μέσος παρεμπίπτων μὴ ὑπάρχη τοῦ μὲν μείζονος ἐλάττων, τοῦ δὲ ἐλάττονος μείζων, ἀλλ' ἢ τὸ ἀνάπαλιν ἢ ἀμφοτέρων μείζων ἢ ἀμφοτέρων ἐλάττων, καὶ οὕτως ἡ σύνθεσις ἢ προειρημένη ἀκολουθήσει. τοῦ θ καὶ τοῦ ζ μέσος τις παρεμπιπτέτω ἀμφοτέρων μείζων ὁ ιβ . λέγω, ὅτι ἔκ τε τοῦ ὑπεπιτρίτου τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ιβ πρὸς τὸν ζ σύγκειται ὁ ἡμιόλιος τοῦ θ πρὸς τὰ ζ . ἡ γὰρ πηλικότης τοῦ θ πρὸς τὸν ιβ λόγου ἐστὶ τρία τέταρτα, τουτέστιν ἡμισυ καὶ τέταρτον, ἡ δὲ πηλικότης τοῦ ιβ πρὸς τὸν ζ ἐστὶν ὁ β . ἐὰν οὖν πολλαπλασιάσωμεν τὸν β ἐπὶ τὸ ἡμισυ καὶ τέταρτον, γίνεται μονὰς α καὶ ἡμισυ, ἥτις πηλικότης ἐστὶ τοῦ ἡμιολίου λόγου, ὃν ἔχει καὶ ὁ θ πρὸς τὸν ζ . ὁμοίως δέ, κὰν τοῦ θ καὶ ζ μέσος ἐμπέσῃ ὁ δ , ἐκ τοῦ θ πρὸς δ διπλασιεπιτετάρτου καὶ τοῦ δ πρὸς ζ ὑφημιολίου σύγκειται ὁ ἡμιόλιος λόγος.

125 πάλιν γὰρ τὴν πηλικότητα τοῦ διπλασιεπιτετάρτου τὰ β δ' ἐπὶ τὴν πηλικότητα τοῦ ὑφημιολίου, τουτέστι τὰ δύο τρίτα, πολλαπλασιάσαντες ἔξομεν τὸ ἐν ἡμισυ πηλικότητα τοῦ ἡμιολίου, ὡς εἴρηται, λόγου.

126 καὶ ἐπὶ πάντων δὲ ὁμοίως ὁ αὐτὸς ἀρμόσει λόγος. συμφανὲς δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὡς, ἐὰν δύο δοθέντων ἀριθμῶν ἦτοι μεγεθῶν κὰν μὴ εἶς μέσος, πλείους δέ, παρεμπίπτωσιν ὄροι, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ πάντων τῶν λόγων, ὧν ἔχουσιν οἱ κατὰ τὸ ἐξῆς κείμενοι ὄροι ἀρχόμενοι ἀπὸ πρώτου καὶ λήγοντες εἰς τὸν ἔσχατον τῇ κατὰ τοὺς ἐχομένους τάξει. δύο γὰρ ὄντων ὄρων τῶν Α, Β παρεμπιπτέτωσαν πλείους ἑνὸς οἱ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, ὁ δὲ τοῦ Α πρὸς τὸν Δ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Α πρὸς τὸν Γ, καὶ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Β. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν δειχθήσεται. Ἐτι ἐν τῷ ῥητῷ φησιν. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΡΑ πρὸς ΛΔ, ἐδείχθη τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ ἐπεὶ γὰρ δέδεικται, ὡς ἡ ΡΑ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΛ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ· ἐδείχθη γάρ, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΧ διὰ τοῦ συνθέντι· ὡς ἄρα ἡ ΡΑ πρὸς ΛΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ. Πεποιήσθω δέ, ὡς ἡ ΡΑ πρὸς ΛΧ, ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ τὸ Θ σημεῖον ὅπως ποτὲ μὲν ἐὰν τεθῇ, ὅσον πρὸς τὴν ἀκολουθίαν τῆς ἀποδείξεως κατ' οὐδὲν ἐμποδῶν γίνεται τῷ λόγῳ· ὅτι δέ, καθὰ ἐν τῇ καταγραφῇ κεῖται, ἀεὶ μεταξὺ τῶν Β, Ρ πίπτει, οὕτως ἔσται δῆλον.

128 ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΛΚ πρὸς ΔΚ, τουτέστι πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΚΡ πρὸς ΡΒ, καὶ ὡς ἄρα ἐν πρὸς ἐν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα, ὡς ἡ ΛΡ πρὸς ΡΚ, ἡ ΚΡ πρὸς ΡΒ. μείζονα δὲ λόγον ἔχει ἡ ΛΡ πρὸς ΡΧ ἢ περ ἡ ΛΡ πρὸς ΡΚ· καὶ ἡ ΛΡ ἄρα πρὸς ΡΧ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΚΡ πρὸς ΡΒ, τουτέστιν ἡ ΖΒ πρὸς ΡΒ. ἀναστρέψαντι ἡ ΡΑ πρὸς ΛΧ ἐλάσσονα ἔχει λόγον ἢ περ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΡ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν, ὡς ἡ ΡΑ πρὸς ΛΧ, οὕτως τὴν ΒΖ πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ΖΡ. φανερόν δὲ αὐτόθεν, ὅτι ἡ ΖΘ τῆς ΘΒ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΚ, ἡ ΔΧ πρὸς ΧΒ καὶ ἡ ΚΒ πρὸς ΡΒ, μείζων δὲ ἡ ΔΧ τῆς ΧΒ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΔ τῆς ΔΚ καὶ ἡ ΚΒ τῆς ΡΒ· ὥστε καὶ ἡ ΛΔ τῆς ΡΒ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΛΧ τῆς ΧΡ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΘΖ τῆς ΘΒ. Λοιπὸν ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τουτέστι τὸ δοθέν, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, οὕτως ἡ ΖΧ πρὸς ΖΘ ἐπεὶ γὰρ τῷ τῆς ΒΖ πρὸς ΘΖ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ καὶ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ, τῷ δὲ αὐτῷ τῷ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΘ ὁ αὐτός ἐστι καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ καὶ τῆς ΧΖ πρὸς ΖΘ, καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ

πρὸς ΖΧ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΧ καὶ τοῦ τῆς ΧΖ πρὸς ΖΘ. ἐὰν οὖν τὸν ἐν ἀμφοτέροις τοῖς λόγοις κοινὸν ἀφέλωμεν τὸν τῆς ΒΖ πρὸς ΧΖ, λοιπὸς ὁ τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΧΖ πρὸς ΖΘ.

130 Καὶ δὴ δοθεῖσαν τὴν ΔΖ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσα ν· τουτέστι τὴν ΖΘ· οὕτως τὸ δοθὲν ν· τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΔ· πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Χ. τοῦτο δὲ οὕτως ἀπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν ν, προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων ν· τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ μείζονα τὴν ΒΖ τῆς ΖΘ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν· οὐκ ἔχει διορισμόν· καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον· δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΔΒ, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ τεμεῖν τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΧ, τὴν ΧΖ πρὸς ΖΘ· ἐκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται καὶ συντεθήσεται ἐπὶ τέλει μὲν τὸ προρηθὲν ἐπηγγέιλαιτο δεῖξαι, ἐν οὐδενὶ δὲ τῶν ἀντιγράφων εὐρεῖν ἔνεστι τὸ ἐπάγγελμα. ὅθεν καὶ Διονυσόδωρον μὲν εὐρίσκομεν μὴ τῶν αὐτῶν ἐπιτυχόντα, ἀδυνατήσαντα δὲ ἐπιβαλεῖν τῷ καταλειφθέντι λήμματι, ἐφ' ἑτέραν ὁδὸν τοῦ ὅλου προβλήματος ἐλθεῖν, ἥντινα ἐξῆς γράψομεν· Διοκλῆς μέντοι καὶ αὐτὸς ἐν τῷ Περὶ πυρίων αὐτῷ συγγεγραμμένῳ βιβλίῳ ἐπηγγέλλαι νομίζων τὸν Ἀρχιμήδη, μὴ πεποιηκέναι δὲ τὸ ἐπάγγελμα, αὐτὸς ἀναπληροῦν ἐπεχείρησεν, καὶ τὸ ἐπιχείρημα ἐξῆς γράψομεν· ἔστιν γὰρ καὶ αὐτὸ οὐδένα μὲν ἔχον πρὸς τὰ παραλειμμένα λόγον, ὁμοίως δὲ τῷ Διονυσόδωρῳ δι' ἑτέρας ἀποδείξεως κατασκευάζον τὸ πρόβλημα. ἐν τινι μέντοι παλαιῷ βιβλίῳ· οὐδὲ γὰρ τῆς εἰς πολλὰ ζητήσεως ἀπέστημεν· ἐντετύχαμεν θεωρήμασι γεγραμμένοις οὐκ ὀλίγην μὲν τὴν ἐκ τῶν πταισμάτων ἔχουσιν ἀσάφειαν περὶ τε τὰς καταγραφὰς πολυτρόπως ἡμαρτημένοις, τῶν μέντοι ζητουμένων εἶχον τὴν ὑπόστασιν, ἐν μέρει δὲ τὴν Ἀρχιμήδει φίλην Δωρίδα γλῶσσαν ἀπέσωζον καὶ τοῖς συνήθεσι τῷ ἀρχαίῳ τῶν πραγμάτων ὀνόμασιν ἐγγράπτο τῆς μὲν παραβολῆς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς ὀνομαζομένης, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἀμβλυγωνίου κώνου τομῆς, ὡς ἐξ αὐτῶν διανοεῖσθαι, μὴ ἄρα καὶ αὐτὰ εἶη τὰ ἐν τῷ τέλει ἐπηγγελμένα γράφεσθαι.

132 ὅθεν σπουδαιότερον ἐντυχάνοντες αὐτὸ μὲν τὸ ῥητόν, ὡς γέγραπται, διὰ πλῆθος, ὡς εἴρηται, τῶν πταισμάτων δυσχερὲς εὐρόντες τὰς ἐννοίας κατὰ μικρὸν ἀποσυλήσαντες κοινοτέρᾳ καὶ σαφεστέρᾳ κατὰ τὸ δυνατόν λέξει γράφομεν. καθόλου δὲ πρῶτον τὸ θεώρημα γραφήσεται, ἵνα τὸ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ σαφηνισθῇ περὶ τῶν διορισμῶν· εἶτα καὶ τοῖς ἀναλελυμένοις ἐν τῷ προβλήματι προσαρμοσθήσεται. Εὐθείας δοθείσης τῆς ΑΒ καὶ ἐτέρας τῆς ΑΓ καὶ χωρίου τοῦ Δ προκείσθω λαβεῖν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον ὡς τὸ Ε, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΑΕ πρὸς ΑΓ, οὕτω τὸ Δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ. γεγονένω, καὶ κείσθω ἡ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΗ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΖΒΗ συμπίπτουσα ἐκατέρᾳ τῶν ΓΕ, ΓΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμόν ν, καὶ διὰ τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΓΘ, ΗΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΕΛ, καὶ τῷ Δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΓΗΜ. ἐπεὶ οὖν ἐστι ν, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΖ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΖ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ Δ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΜ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ.

134 ἂλ λ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗΜ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΜ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ. ἂλ λ' ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΜ, τῆς ΗΖ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΗΖ τῷ ἀπὸ ΖΚ. ἐὰν ἄρα περὶ ἄξονα τὴν ΖΗ γραφῇ διὰ τοῦ Η παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΗΜ, ἥξει διὰ τοῦ Κ, καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ δεδομένην εἶναι τὴν ΗΜ τῷ μεγέθει περιέχουσας μετὰ τῆς ΗΓ δεδομένης δοθὲν τὸ Δ· τὸ ἄρα Κ ἄπτεται θέσει δεδομένης παραβολῆς. γεγράφθω οὖν ν, ὡς

εἴρητα ι , καὶ ἔστω ὡς ἡ HK . πάλι ν , ἐπειδὴ τὸ $\Theta\Lambda$ χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓB , τουτέστι τὸ ὑπὸ $\Theta K\Lambda$ τῷ ὑπὸ ABH , ἐὰν διὰ τοῦ B περὶ ἀσυμπτώτους τὰς $\Theta\Gamma$, ΓH γραφῇ ὑπερβολὴ ἢ, ἥξει διὰ τοῦ K διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η' θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείω ν , καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ ἐκατέραν τῶν $\Theta\Gamma$, ΓH , ἔτι μὴν καὶ τὸ B τῇ θέσει δεδόσθαι ι . γεγράφθω, ὡς εἴρητα ι , καὶ ἔστω ὡς ἡ KB . τὸ ἄρα K ἄπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἤπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης παραβολῆς. δέδοται ἄρα τὸ K . καὶ ἐστὶν ἂν π' αὐτοῦ κάθετος ἡ KE ἐπὶ θέσει δεδομένην τὴν AB . δέδοται ἄρα τὸ E .

136 ἐπεὶ οὖν ἐστὶ ν , ὡς ἡ EA πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν AG , οὕτως δοθέν τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ EB , δύο στερεῶν ν , ὧν βάσεις τὸ ἀπὸ EB καὶ τὸ Δ , ὕψη δὲ αἱ EA , AG , ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὥστε ἴσα ἐστὶ τὰ στερεά. τὸ ἄρα ἀπὸ EB ἐπὶ τὴν EA ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἐπὶ δοθεῖσαν τὴν GA . ἀλλὰ τὸ ἀπὸ BE ἐπὶ τὴν EA μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίων λαμβανομένων ἐπὶ τῆς BA , ὅταν ἡ διπλασία ἢ BE τῆς EA , ὡς δειχθήσεται. δεῖ ἄρα τὸ δοθέν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς BE ἐπὶ τὴν EA . συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , ἄλλη δὲ τις δοθεῖσα ἡ AG , τὸ δὲ δοθέν χωρίον τὸ Δ , καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὴν AB , ὥστε εἶναι ι , ὡς τὸ ἐν τμήμα πρὸς τὴν δοθεῖσαν τὴν AG , οὕτως τὸ δοθέν τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος. εἰλήφθω τῆς AB τρίτον μέρος ἡ AE . τὸ ἄρα Δ ἐπὶ τὴν AG ἦτοι μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE ἐπὶ τὴν EA ἢ ἴσον ἢ ἔλασσο ν . εἰ μὲν οὖν μεῖζόν ἐστι ν , οὐ συντεθήσεται ι , ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικται. εἰ δὲ ἴσον ἐστὶ ι , τὸ E σημεῖον ποιήσεται τὸ πρόβλημα α . ἴσων γὰρ ὄντων τῶν στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ν , καὶ ἐστὶ ν , ὡς ἡ EA πρὸς AG , οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ BE . εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ Δ ἐπὶ τὴν AG τοῦ ἀπὸ BE ἐπὶ τὴν EA , συντεθήσεται οὕτως. κείσθω ἡ AG πρὸς ὀρθὰς τῇ AB , καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ AB παράλληλος ἦχθω ἡ ΓZ , διὰ δὲ τοῦ B τῇ AG παράλληλος ἦχθω ἡ BZ καὶ συμπιπτέτω τῇ GE ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ H , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $Z\Theta$ παραλληλόγραμμο ν , καὶ διὰ τοῦ E τῇ ZH παράλληλος ἦχθω ἡ $KE\Lambda$.

138 ἐπεὶ οὖν τὸ Δ ἐπὶ τὴν AG ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ BE ἐπὶ τὴν EA , ἔστι ν , ὡς ἡ EA πρὸς AG , οὕτως τὸ Δ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ἀπὸ τῆς BE , τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς HK . ἔστω οὖν ν , ὡς ἡ EA πρὸς AG , οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ HM , καὶ τῷ Δ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΓZN . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ ν , ὡς ἡ EA πρὸς AG , οὕτως τὸ Δ , τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓZN , πρὸς τὸ ἀπὸ HM , ἀλλ' ὡς ἡ EA πρὸς AG , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς ZH , ὡς δὲ ἡ ΓZ πρὸς ZH , οὕτως τὸ ἀπὸ ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓZH , καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓZH , οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZN πρὸς τὸ ἀπὸ HM . καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓZN , οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZH πρὸς τὸ ἀπὸ HM . ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓZN , ἢ ΓZ πρὸς ZN , ὡς δὲ ἡ ΓZ πρὸς ZN , τῆς ZH κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZH πρὸς τὸ ὑπὸ NZH . καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓZH πρὸς τὸ ὑπὸ NZH , οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZH πρὸς τὸ ἀπὸ HM . ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ HM τῷ ὑπὸ HZN . ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ Z περὶ ἄξονα τὴν ZH γράψωμεν παραβολὴν ν , ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ZN , ἥξει διὰ τοῦ M . γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ MEZ . καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $\Theta\Lambda$ τῷ AZ , τουτέστι τὸ ὑπὸ $\Theta K\Lambda$ τῷ ὑπὸ ABZ , ἐὰν διὰ τοῦ B περὶ ἀσυμπτώτους τὰς $\Theta\Gamma$, ΓZ γράψωμεν ὑπερβολὴν ν , ἥξει διὰ τοῦ K διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ η' θεωρήματος τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείω ν .

140 γεγράφθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ BK τέμνουσα τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ Ξ , καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἦχθω ἡ $\Xi O\Pi$, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ AB παράλληλος ἦχθω ἡ $P\Xi\Sigma$. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ ἐστὶν ἡ $B\Xi K$, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $\Theta\Gamma$, ΓZ , καὶ παράλληλοι ἡγμένα ἐῖσιν αἱ $P\Xi\Pi$ ταῖς ABZ , ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ $P\Xi\Pi$ τῷ ὑπὸ ABZ . ὥστε καὶ τὸ PO τῷ OZ . ἐὰν ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Σ ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα α , ἥξει διὰ τοῦ O . ἐρχέσθω, καὶ ἔστω ὡς ἡ $GO\Sigma$. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ ν , ὡς ἡ OA πρὸς AG , οὕτως ἡ OB πρὸς $B\Sigma$, τουτέστιν ἡ ΓZ πρὸς $Z\Sigma$, ὡς δὲ ἡ ΓZ πρὸς $Z\Sigma$, τῆς ZN κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZN πρὸς τὸ ὑπὸ ΣZN , καὶ ὡς ἄρα ἡ OA πρὸς AG , οὕτως τὸ ὑπὸ ΓZN πρὸς τὸ ὑπὸ

ΣΖΝ . καί ἐστι τῷ μὲν ὑπὸ ΓΖΝ ἴσον τὸ Δ χωρίον ν , τῷ δὲ ὑπὸ ΣΖΝ ἴσον τὸ ἀπὸ ΣΞ , τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΟ , διὰ τὴν παραβολὴν · ὥς ἄρα ἡ ΟΑ πρὸς ΑΓ , οὕτως τὸ Δ χωρίον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ . εἴληπται ἄρα τὸ Ο σημεῖον ποιοῦν τὸ πρόβλημα . ὅτι δὲ διπλασίας οὔσης τῆς ΒΕ τῆς ΕΑ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως λαμβανομένων ἐπὶ τῆς ΒΑ , δειχθήσεται οὕτως . ἔστω γὰρ ρ , ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει , πάλιν δοθεῖσα εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἢ ΑΓ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ διὰ τοῦ Β παραλλήλῳ ἡ γμένη τῇ ΑΓ κατὰ τὸ Ζ , καὶ διὰ τῶν Γ , Ζ παράλληλοι τῇ ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΘΖ , ΓΗ , καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Θ , καὶ ταύτη παράλληλος διὰ τοῦ Ε ἤχθω ἡ ΚΕΛ , καὶ γερονέτω , ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΓ , οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ · τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ διὰ τὸ δύο στερεῶν ἀντιπεπονηθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψει ν .

141 λέγω οὖν , ὅτι τὸ ὑπὸ ΓΗΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ὁμοίως ἐπὶ τῆς ΒΑ λαμβανομένων ν .

142 γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ Η περὶ ἄξονα τὴν ΖΗ παραβολή , ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΗΜ · ἥξει δὲ διὰ τοῦ Κ , ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει δέδεικτα , καὶ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ ΘΓ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς διὰ τὸ ἔβδομον καὶ εἰκοστὸν θεωρήμα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείῳ ν . ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν , καὶ διὰ τοῦ Β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΝΓΗ γεγράφθω ὑπερβολή · ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Κ , ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει εἴρητα . ἐρχέσθω οὖν ὡς ἡ ΒΚ , καὶ ἐκβληθείσῃ τῇ ΖΗ ἴση κείσθω ἡ ΗΞ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο · φανερόν ἄρα , ὅτι ἐφάπτεται τῆς παραβολῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τετάρτου καὶ τριακοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν Στοιχείῳ ν . ἐπεὶ οὖν διπλῇ ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆς ΕΑ · οὕτως γὰρ ὑπόκειται · τουτέστιν ἡ ΖΚ τῆς ΚΘ , καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΘΚ τρίγωνον τῷ ΕΖΚ τριγώνῳ , διπλασία ἐστὶ καὶ ἡ ΕΚ τῆς ΚΟ . ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῆς ΚΠ διπλῇ διὰ τὸ καὶ τὴν ΕΖ τῆς ΕΗ καὶ παράλληλον εἶναι τὴν ΠΗ τῇ ΚΖ · ἴση ἄρα ἡ ΟΚ τῇ ΚΠ . ἡ ἄρα ΟΚΠ ψαύουσα τῆς ὑπερβολῆς καὶ μεταξὺ οὖσα τῶν ἀσυμππτῶτων δίχα τέμνεται · ἐφάπτεται ἄρα τῆς ὑπερβολῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ τρίτου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείῳ ν .

144 ἐφήπτετο δὲ καὶ τῆς παραβολῆς κατὰ τὸ αὐτὸ Κ · ἡ ἄρα παραβολή τῆς ὑπερβολῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Κ . νενοήσθω οὖν καὶ ἡ ὑπερβολή προσεκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὸ Ρ , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Σ , καὶ διὰ τοῦ Σ τῇ ΚΛ παράλληλος ἤχθω ἡ ΤΣΥ καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Τ , καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΓΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΦΤΧ . ἐπεὶ οὖν διὰ τὴν ὑπερβολὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἴσον ἐστὶ τὸ ΦΥ τῷ ΓΒ , κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΣ ἴσον γίνεται τὸ ΦΣ τῷ ΣΗ , καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Χ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τοῦ Σ . ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΣΧ . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΨΧ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΧΗΜ διὰ τὴν παραβολήν , τὸ ἀπὸ ΤΧ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΧΗΜ . γερονέτω οὖν τῷ ἀπὸ ΤΧ ἴσον τὸ ὑπὸ ΧΗΩ . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ ν , ὡς ἡ ΣΑ πρὸς ΑΓ , οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΧ , ἀλλ' ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΧ , τῆς ΗΩ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΗΩ καὶ πρὸς τὸ ἴσον αὐτῷ τὸ ἀπὸ ΧΤ , τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΣ , τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΣ ἐπὶ τὴν ΣΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΩ ἐπὶ τὴν ΓΑ . τὸ δὲ ὑπὸ ΓΗΩ ἐπὶ τὴν ΓΑ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΓΗΜ ἐπὶ τὴν ΓΑ · τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΣ ἐπὶ τὴν ΣΑ ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ . ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ λαμβανομένων τῶν Ε , Β . ἀλλὰ δὲ εἰλήφθω μεταξὺ τῶν Ε , Α σημεῖον τὸ ζ .

146 λέγω , ὅτι καὶ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ μεῖζόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ Βς ἐπὶ τὴν ζ Α . τῶν γὰρ αὐτῶν κατεσκευασμένων ἤχθω διὰ τοῦ ζ τῇ ΚΛ παράλληλος ἡ ρςΡ καὶ συμβαλλέτω τῇ ὑπερβολῇ κατὰ τὸ Ρ · συμβαλεῖ γὰρ αὐτῇ διὰ τὸ παράλληλος εἶναι τῇ ἀσυμππτῳ · καὶ διὰ τοῦ Ρ παράλληλος ἀχθεῖσα τῇ ΑΒ ἢ Α'ΡΒ' συμβαλλέτω τῇ ΗΖ ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ Β' . καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν ὑπερβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ Γ'ρ τῷ ΑΗ , ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Β' ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα

ἤξει διὰ τοῦ ζ . ἐρχέσθω καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΖΒ' . καὶ ἐπεὶ πάλιν διὰ τὴν παραβολὴν ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ Α'Β' τῷ ὑπὸ Β'Η Μ , τὸ ἄρα ἀπὸ ΡΒ' ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Β'Η Μ . γεγονένω τὸ ἀπὸ ΡΒ' ἴσον τῷ ὑπὸ Β'Η Ω . ἐπεὶ οὖν ἐστὶ ν , ὡς ἡ ζΑ πρὸς Α Γ , οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ' , ἀλλ' ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ' , τῆς ΗΩ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΗΩ πρὸς τὸ ὑπὸ Β'Η Ω , τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΒ' , τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ Β ζ , τὸ ἄρα ἀπὸ Βζ ἐπὶ τὴν ζΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΩ ἐπὶ τὴν Γ Α . καὶ μείζον τὸ ὑπὸ ΓΗΜ τοῦ ὑπὸ ΓΗΩ · μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ τοῦ ἀπὸ Βζ ἐπὶ τὴν ζ Α . ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τῶν σημείων τῶν μεταξὺ τῶν Ε , Α λαμβανομένων ν . ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Ε , Β · πάντων ἄρα τῶν ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁμοίως λαμβανομένων μέγιστόν ἐστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἐπὶ τὴν Ε Α , ὅταν ᾗ διπλασία ἡ ΒΕ τῆς Ε Α . Ἐπιστῆσαι δὲ χρή καὶ τοῖς ἀκολουθοῦσιν κατὰ τὴν εἰρημένην καταγραφὴν.

148 ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ἀπὸ ΒΣ ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ τὸ ἀπὸ Βζ ἐπὶ τὴν ζΑ ἔλασσον τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ, δυνατόν ἐστι καὶ τοῦ δοθέντος χωρίου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἐλάσσονος ὄντος τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἐπὶ τὴν ΕΑ κατὰ δύο σημεῖα τὴν ΑΒ τεμνομένην ποιεῖν τὸ ἐξ ἀρχῆς πρόβλημα. τοῦτο δὲ γίνεται, εἰ νοήσῃμεν περὶ διάμετρον τὴν ΧΗ γραφομένην παραβολὴν, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΗΩ· ἡ γὰρ τοιαύτη παραβολὴ πάντως ἔρχεται διὰ τοῦ Τ. καὶ ἐπειδὴ ἀνάγκη αὐτὴν συμπίπτειν τῇ ΓΝ παραλλήλῳ οὔσῃ τῇ διαμέτρῳ, δῆλον, ὅτι τέμνει τὴν ὑπερβολὴν καὶ κατ' ἄλλο σημεῖον ἀνωτέρω τοῦ Κ, ὡς ἐνταῦθα κατὰ τὸ Ρ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἀγομένη, ὡς ἐνταῦθα ἡ Ρζ, τέμνει τὴν ΑΒ κατὰ τὸ ζ, ὥστε τὸ ζ σημεῖον ποιεῖν τὸ πρόβλημα, καὶ ἴσον γίνεσθαι τὸ ἀπὸ ΒΣ ἐπὶ τὴν ΣΑ τῷ ἀπὸ Βζ ἐπὶ τὴν ζΑ, ὡς ἐστὶ διὰ τῶν προειρημένων ἀποδείξεων ἐμφανές. ὥστε δυνατοῦ ὄντος ἐπὶ τῆς ΒΑ δύο σημεῖα λαμβάνειν ποιοῦντα τὸ ζητούμενον ἔξεστιν, ὁποτέρον τις βούλοιο, λαμβάνειν ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Ε, Β ἢ τὸ μεταξὺ τῶν Ε, Α. εἰ μὲν γὰρ τὸ μεταξὺ τῶν Ε, Β, ὡς εἴρηται, τῆς διὰ τῶν Η, Τ σημείων γραφομένης παραβολῆς κατὰ δύο σημεῖα τεμνούσης τὴν ὑπερβολὴν τὸ μὲν ἐγγύτερον τοῦ Η, τουτέστι τοῦ ἄξονος τῆς παραβολῆς, εὐρήσει τὸ μεταξὺ τῶν Ε, Β, ὡς ἐνταῦθα τὸ Τ εὐρίσκει τὸ Σ, τὸ δὲ ἀπωτέρω τὸ μεταξὺ τῶν Ε, Α, ὡς ἐνταῦθα τὸ Ρ εὐρίσκει τὸ ζ. καθόλου μὲν οὖν οὕτως ἀναλέγεται καὶ συντέθεται τὸ πρόβλημα· ἵνα δὲ καὶ τοῖς Ἀρχιμηδεῖσις ῥήμασιν ἐφαρμοσθῇ, νενοήσθω ὡς ἐν αὐτῇ τῇ τοῦ ῥητοῦ καταγραφῇ διάμετρος μὲν τῆς σφαίρας ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΒΖ, καὶ ἡ δεδομένη ἡ ΖΘ.

150 κατηντήσαμεν ἄρα, φησὶν, εἰς τὸ τὴν ΔΖ τεμεῖν κατὰ τὸ Χ, ὥστε εἶνα ι, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς τὴν δοθεῖσα ν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ Χ. τοῦτο δὲ ἀπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμό ν. εἰ γὰρ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μείζον ἐτύγχανεν τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐπὶ τὴν ΒΖ, ἀδύνατον ἦν τὸ πρόβλημα, ὡς δέδεικται, εἰ δὲ ἴσον, τὸ Β σημεῖον ἐποίει τὸ πρόβλημα, καὶ οὕτως δὲ οὐδὲν ἦν πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς Ἀρχιμήδους πρόθεσιν· ἡ γὰρ σφαῖρα οὐκ ἐτέμενετο εἰς τὸν δοθέντα λόγον. ἀπλῶς ἄρα λεγόμενον εἶχεν προσδιορισμόν· προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν ΔΒ τῆς ΖΒ καὶ τοῦ μείζονα εἶναι τὴν ΒΖ τῆς ΖΘ, οὐκ ἔχει διορισμό ν. τὸ γὰρ ἀπὸ ΔΒ τὸ δοθὲν ἐπὶ τὴν ΖΘ τὴν δοθεῖσαν ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐπὶ τὴν ΒΖ διὰ τὸ τὴν ΒΖ τῆς ΖΘ μείζονα εἶναι, οὐπερ ὑπάρχοντος ἐδείξαμεν δυνατόν, καὶ ὅπως προβαίνει τὸ πρόβλημα. κατανοεῖν δὲ χρή καὶ τοῖς ὑπ' Ἀρχιμήδους λεγομένοις συμφώνως ἔχουσιν τοῖς ὑφ' ἡμῶν ἀναλελυμένοις. πρότερον μὲν γὰρ μετὰ τὴν ἀνάλυσιν αὐτοῦ καθόλου τό, εἰς ὃ κατήντησεν, λέγων φησὶν· δοθεῖσαν τὴν ΔΖ τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ Χ καὶ ποιεῖν ν, ὡς τὴν ΧΖ πρὸς δοθεῖσα ν, οὕτως τὸ δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ Χ· εἴτα εἰπὼν, ὡς καθόλου μὲν τὸ λεγόμενον ἔχει διορισμόν, προστεθέντων δὲ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εὐρεθέντων προβλημάτων, τοῦ τε εἶναι διπλασίαν τὴν ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ μείζονα τὴν ΒΖ τῆς ΖΘ, μὴ ἔχειν διορισμόν, μερικώτερον ἐπαναλαμβάνει τὸ πρόβλημα καὶ φησιν, ὅτι· καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον· δύο δοθεῖσων εὐθειῶν τῶν Δ Β, ΒΖ καὶ διπλασίας οὔσης τῆς ΔΒ τῆς ΒΖ καὶ σημείου ἐπὶ τῆς ΒΖ τοῦ Θ τεμεῖν

τὴν ΔΒ κατὰ τὸ Χ, οὐκέτι, ὥς πρότερον, τὴν ΔΖ εἰπὼν ἀλλὰ τὴν ΔΒ δεῖν τεμεῖν διὰ τό, ὥς ἀνωτέρω ἡμεῖς ἀπεδείξαμεν, εἰδέναι αὐτόν, ὥς δύο σημεῖά ἐστι τὰ λαμβανόμενα ἐπὶ τῆς ΔΖ καὶ ποιοῦντα τὸ πρόβλημα, ἐν μὲν τὸ μεταξὺ τῶν Δ, Β, ἕτερον δὲ τὸ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ὣν τὸ μεταξὺ τῶν Δ, Β ἦν τὸ πρὸς τὴν ἐξ ἀρχῆς πρόθεσιν χρήσιμον.

152 ταῦτα μὲν οὖν ἀκόλουθα τοῖς Ἀρχιμήδους ῥήμασιν κατὰ τὸ δυνατόν σαφῶς ἀπεγραψάμεθα· ἐπεὶ δέ, ὥς προεῖρηται, καὶ Διονυσόδωρος οὐδαμοῦ τοῖς ἐπὶ τέλει γραφομένοις παρ' Ἀρχιμήδους ἐπηγγελέμενοις ἐντυχόν, ἀτονήσας δὲ ὥσπερ προσεureῖν τὰ μὴ ἐκτεθέντα ἐφ' ἐτέραν ὁδὸν βαδίζων τοῦ ὅλου προβλήματος οὐκ ἄχαριν εὐρέσεως συνεγράψατο τρόπον, ἀναγκαῖον ῥήθημεν δεῖν καὶ αὐτὸν τούτοις ἐπισυνάψαι διορθωσάμενοι κατὰ δύναμιν· καὶ γὰρ αὐτὸς ἐκ πολλῆς ἀμελετησίας τῶν ἀνθρώπων τὰ πολλὰ τῶν ἀποδείξεων τῷ πλήθει τῶν πταισμάτων ἠφανισμένα ἔχων ἐν πᾶσιν, οἷς ἡμεῖς ἐντετύχαμεν, ἀντιγράφοις ἐφέρετο. Ὡς Διονυσόδωρος. Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα αὐτῆς πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, ὃ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ.

154 δεῖ δὴ τεμεῖν τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ ὀρθῶ πρὸς τὴν ΑΒ, ὥστε τὸ τμήμα, οὗ κορυφή τὸ Α, πρὸς τὸ τμήμα, οὗ κορυφή τὸ Β, λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, ἐχέτω ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, καὶ τῶν ΖΑ, ΑΗ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ ΑΘ· μείζων ἄρα ἡ ΑΘ τῆς ΑΗ. καὶ περὶ ἄξονα τὴν ΖΒ διὰ τοῦ Ζ γεγράφθω παραβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι παρὰ τὴν ΑΗ· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Θ, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΖΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΘ. γεγράφθω οὖν καὶ ἔστω ὡς ἡ ΖΘΚ, καὶ διὰ τοῦ Β ἀνήχθω παρὰ τὴν ΑΘ ἡ ΒΚ καὶ τεμνέτω τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Η περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΖΒΚ γεγράφθω ὑπερβολή· τεμεῖ δὴ τὴν παραβολὴν μεταξὺ τῶν Θ, Κ. τεμνέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἦχθω ἡ ΛΜ, καὶ διὰ Η, Λ τῇ ΑΒ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΗΝ, ΛΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστὶν ἡ ΗΛ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΑΒΚ, καὶ παράλληλοι ταῖς ΑΗΝ αἱ ΜΛΞ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΝ τῷ ὑπὸ ΜΛΞ διὰ τὸ ἡ' θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων. ἀλλ' ἡ μὲν ΗΝ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΜΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΛΜΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ διὰ τὸ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν μέσων αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΛΜ πρὸς ΗΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΜ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν παραβολὴν τὸ ἀπὸ ΛΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΜ, ΑΗ, ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΖΜ πρὸς ΜΛ, οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης· ὡς ἄρα ἡ ΖΜ πρὸς ΑΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ.

156 ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΜ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς ΑΗ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΜ, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΜ· καὶ ὡς ἄρα ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΜ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς ΑΗ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΑΗ, ἴσος ἐστὶ τῷ κῶνι τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΒΜ, ὕψος δὲ τὴν ΖΜ· ὥν γὰρ κῶνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΖΑ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, ὕψος δὲ τὴν ΑΗ, ἐστίν, ὥς ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· καὶ ὁ κῶνος ἄρα ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν ΖΑ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ

τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ BM, ὕψος δὲ τὴν ZM, ἐστίν, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ AB, ὕψος δὲ τὴν ZA, ἴσος ἐστὶ τῇ σφαίρᾳ, ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ BM, ὕψος δὲ τὴν ZM, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ B, ὕψος δὲ ἡ BM, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται· καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα πρὸς τὸ εἰρημένον τμήμα λόγον ἔχει, ὃν ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ· καὶ διελόντι τὸ τμήμα, οὗ κορυφὴ τὸ A, ὕψος δὲ ἡ AM, πρὸς τὸ τμήμα, οὗ κορυφὴ τὸ B, ὕψος δὲ ἡ BM, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ.

158 τὸ ἄρα διὰ τῆς AM ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ὀρθὸν πρὸς τὴν AB τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ὅτι δὲ ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ BM, ὕψος δὲ τὴν ZM, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ B, ὕψος δὲ ἡ BM, δειχθήσεται οὕτως. γεγονέτω γάρ, ὡς ἡ ZM πρὸς MA, οὕτως ἡ OM πρὸς MB· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ τὴν OM, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ZM πρὸς MA, οὕτως ἡ OM πρὸς MB, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ZM πρὸς MO, οὕτως ἡ AM πρὸς MB, ἀλλ' ὡς ἡ AM πρὸς MB, οὕτως τὸ ἀπὸ ΠΜ πρὸς τὸ ἀπὸ MB, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΠΜ πρὸς τὸ ἀπὸ MB, οὕτως ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΠΜ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ MB, ὡς ἄρα ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΠΜ, πρὸς τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ MB, οὕτως ἡ MZ πρὸς MO. ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ MB, ὕψος δὲ τὴν ZM, ἴσος ἐστὶ τῷ κῶνι τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ΠΜ, ὕψος δὲ τὴν MO· ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ὥστε καὶ τῷ τμήματι ἴσος ἐστίν.

160 Ὡς Διοκλῆς ἐν τῷ Περὶ πυρίων. Γράφει δὲ καὶ ὁ Διοκλῆς ἐν τῷ Περὶ πυρίων προλέγων τάδε· Ἐν τῷ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Ἀρχιμήδης ἀπέδειξεν, ὅτι πᾶν τμήμα σφαίρας ἴσον ἐστὶν κῶνι τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθείαν τινὰ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς τοῦ τμήματος κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετον, ὃν ἔχει συναμφοτέρος ἢ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ ἡ τοῦ ἐναλλάξ τμήματος κάθετος πρὸς τὴν τοῦ ἐναλλάξ τμήματος κάθετον. οἶον, ἐὰν ᾗ σφαῖρα ἡ ABΓ καὶ τμηθῇ ἐπιπέδῳ τινὶ τῷ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλῳ, καὶ διαμέτρου οὔσης τῆς AB, κέντρου δὲ τοῦ E, ποιήσωμεν, ὡς συναμφοτέρον τὴν EA, ZA πρὸς ZA, οὕτως τὴν HZ πρὸς ZB, ἔτι τε, ὡς συναμφοτέρον τὴν EB, BZ πρὸς ZB, οὕτως τὴν ΘZ πρὸς ZA, ἀποδεδείκται, ὅτι τὸ μὲν ΓΒΔ τμήμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ κῶνι, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ZH, τὸ δὲ ΓΑΔ τμήμα ἴσον ἐστὶ τῷ κῶνι, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτὴ, ὕψος δὲ ἡ ΘZ. προταθέντος οὖν αὐτῷ τοῦ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα, κατασκευάσας τὰ εἰρημένα φησί· λόγος ἄρα δοθεὶς καὶ τοῦ κῶνου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ZΘ, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἡ αὐτὴ, ὕψος δὲ ἡ ZH· καὶ γὰρ καὶ τοῦτο ἀπεδείχθη.

162 οἱ δὲ κῶνοι οἱ ἐπ' ἴσων βάσεων ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· λόγος ἄρα τῆς ΘZ πρὸς ZH δοθεὶς. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΘZ πρὸς ZA, οὕτως συναμφοτέρος ἡ EBZ πρὸς τὴν ZB, διελόντι, ὡς ἡ ΘA πρὸς AZ, οὕτως ἡ EB πρὸς ZB. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὡς ἡ HB πρὸς ZB, οὕτως ἡ αὐτὴ εὐθεῖα πρὸς τὴν ZA. γέγονεν οὖν πρόβλημα τοιοῦτον· θέσει οὔσης εὐθείας τῆς AB καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν A, B καὶ δοθείσης τῆς EB τεμεῖν τὴν AB κατὰ τὸ Z καὶ προσθεῖναι τὰς ΘA, BH, ὥστε λόγον εἶναι τῆς ΘZ πρὸς ZH δοθέντα, ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν ΘA πρὸς AZ, οὕτως τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ZB, ὡς δὲ τὴν HB πρὸς BZ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς ZA. τοῦτο δὲ ἐξῆς δέδεικται· ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης μακρότερον αὐτὸ δείξας καὶ οὕτως εἰς πρόβλημα ἕτερον ἀπάγει, ὃ οὐκ ἀποδείκνυσιν ἐν τῷ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου. θέσει δεδομένης εὐθείας τῆς AB καὶ δύο δοθέντων σημείων τῶν A, B καὶ λόγου τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς

τὴν Δ, τεμεῖν τὴν ΑΒ κατὰ τὸ Ε καὶ προσθεῖναι τὰς ΖΑ, ΗΒ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὴν ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, ἔτι τε εἶναι, ὡς τὴν ΖΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως δοθεῖσάν τινα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὴν ΗΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΕΑ. γεγονέντω, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΘΑΚ, ΛΒΜ, καὶ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴση κείσθω ἑκατέρα τῶν ΑΚ, ΒΜ. ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΚΕ, ΜΕ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Λ, Θ, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἤχθω τῇ ΑΒ ἡ ΛΝ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΝΚ ἡ ΞΕΟΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΜΒ πρὸς ΒΕ· ὑπόκειται γάρ· ὡς δὲ ἡ ΜΒ πρὸς ΒΕ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΖΑ τῇ ΘΑ.

164 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΒΛ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΘΑΕ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΜΒΕ, οὕτως συναμφοτέρος ἡ ΚΑΕ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΑΒΕ· ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΘΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΚΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΒΕ. κείσθω τῇ ΚΑ ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΡ, ΒΣ. ἐπεὶ οὖν συναμφοτέρος μὲν ἡ ΘΑΕ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΕ, συναμφοτέρος δὲ ἡ ΑΒΕ ἴση τῇ ΕΗ, συναμφοτέρος δὲ ἡ ΚΑΕ ἴση τῇ ΡΕ, συναμφοτέρος δὲ ἡ ΜΒΕ ἴση τῇ ΣΕ, καὶ ἐδείχθη τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΘΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΚΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΒΕ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΡΕΣ. διὰ δὴ τοῦτο, ὅταν τὸ Ρ μεταξὺ τῶν Α, Ζ πίπτῃ, τότε τὸ Σ ἐξωτέρω τοῦ Η πεσεῖται, καὶ τὸ ἀνάπαλιν. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ.

166 τὸ δὲ ὑπὸ ΖΕΗ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΡΕΣ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΟ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΟ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ ἀπὸ τῶν Σ, Ρ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΣΤ, ΡΥ συμβαλλέτωσαν αὐτῇ κατὰ τὰ Τ, Υ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου τοῦ Β πρὸς θέσει δεδομένην τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΤΥ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΒΟ ἡμίσειαν ὀρθῆς, δέδοται ἡ ΤΥ τῇ θέσει. καὶ ἀπὸ δεδομένων τῶν Σ, Ρ θέσει ἡγμέναι αἱ ΣΤ, ΡΥ τέμνουσιν αὐτὴν κατὰ τὰ Τ, Υ· δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ Τ, Υ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΤΥ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν τῶν ΕΟΒ, ΣΤΒ τριγώνων ὁμοιότητά ἐστίν, ὡς ἡ ΤΒ πρὸς ΒΟ, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς ΒΕ, καὶ συνθέντι ἐστίν, ὡς ἡ ΤΟ πρὸς ΟΒ, οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΟ πρὸς ΟΥ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΡ· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΤΟ πρὸς ΟΥ, οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΡ. ἀλλ' ὡς ἡ ΤΟ πρὸς ΟΥ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΤΟΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΥ, ὡς δὲ ἡ ΣΕ πρὸς ΕΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΣΕΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΤΟΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΥ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΣΕΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΡ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΤΟΥ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΕΡ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΡ. τὸ δὲ ἀπὸ ΟΥ τοῦ ἀπὸ ΕΡ διπλάσιον, ἐπειδὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΟΒ τοῦ ἀπὸ ΒΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΤΟΥ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΣΕΡ ἐστὶ διπλάσιον. τὸ δὲ ὑπὸ ΣΕΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ ἐδείχθη λόγον ἔχειν, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ τὸ ὑπὸ ΤΟΥ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς Γ πρὸς τὴν Δ. τὸ δὲ ἀπὸ ΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΟ· ἑκατέρα γὰρ τῶν ΕΗ, ΞΟ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΒΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΤΟΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ λόγον ἔχει, ὃν ἡ διπλασία τῆς Γ πρὸς τὴν Δ.

168 καὶ δέδοται ὁ τῆς διπλασίας τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγος· δέδοται ἄρα καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΤΟΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ λόγος. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν, ὡς τὴν Δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ, οὕτως τὴν ΤΥ πρὸς ἄλλην τινὰ ὡς τὴν Φ, καὶ περὶ τὴν ΤΥ γράψωμεν ἔλλειψιν, ὥστε τὰς καταγομένης ἐν τῇ ὑπὸ ΞΟΒ γωνίᾳ, τουτέστιν ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς, δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΤΥ, Φ, ἥξει διὰ τοῦ Ξ διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ εἰκοστοῦ θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων. γεγράφθω καὶ ἔστω ὡς ἡ ΥΞΤ· τὸ ἄρα Ξ σημεῖον ἄπτεται θέσει δεδομένης ἐλλείψεως. καὶ ἐπεὶ διαγώνιός ἐστίν ἡ ΑΚ τοῦ ΝΜ παραλληλογράμμου, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΝΞΠ τῷ ὑπὸ ΑΒΜ. ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ Β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΘΚΜ γράψωμεν ὑπερβολήν, ἥξει διὰ τοῦ Ξ καὶ ἔσται θέσει δεδομένη διὰ τὸ καὶ τὸ Β σημεῖον τῇ θέσει δεδοσθαι

καὶ ἐκατέραν τῶν AB, BM καὶ διὰ τοῦτο τὰς ΘKM ἀσυμπτώτους. γεγράφθω καὶ ἔστω ὡς ἡ ΞΒ· τὸ ἄρα Ξ σημεῖον ἄπτεται θέσει δεδομένης ὑπερβολῆς. ἤπτετο δὲ καὶ θέσει δεδομένης ἐλλείψεως· δέδοται ἄρα τὸ Ξ. καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ΞΕ· δέδοται ἄρα τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ MB πρὸς BE, οὕτως ἡ ZA πρὸς AE, καὶ δέδοται ἡ AE, δέδοται ἄρα καὶ ἡ AZ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δέδοται καὶ ἡ HB. συντεθήσεται δὲ οὕτως· ὡς γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἣν δεῖ τεμεῖν, ἡ AB, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐτέρα ἡ AK, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ. ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ BM ἴση οὔσα τῇ AK, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KM, καὶ τῇ μὲν KA ἴση κείσθω ἡ AP καὶ ἡ ΒΣ, ἀπὸ δὲ τῶν Ρ, Σ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΡΥ, ΣΤ, καὶ πρὸς τῷ Β σημείῳ συνεστάτω ἡμίσεια ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ABO, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ BO ἐφ' ἐκάτερα τεμνέτω τὰς ΣΤ, ΡΥ κατὰ τὰ Τ, Υ, καὶ γεγονέντω, ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ, οὕτως ἡ ΤΥ πρὸς τὴν Φ, καὶ περὶ τὴν ΤΥ γεγράφθω ἔλλειψις, ὥστε τὰς καταγομένης ἐν ἡμισείᾳ ὀρθῆς δύνασθαι τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν Φ ἐλλείποντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΤΥ, Φ, διὰ δὲ τοῦ Β περὶ ἀσυμπτώτους τὰς AK, KM γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΒΞ τέμνουσα τὴν ἔλλειψιν κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἤχθω ἡ ΞΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Π, διὰ δὲ τοῦ Ξ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΞΝ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ KA, MB ἐπὶ τὰ Λ, Θ, καὶ ἡ ΜΕ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ KN κατὰ τὸ Θ.

170 ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ ἐστίν ἡ ΒΞ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΚ, KM, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΝΞΠ τῷ ὑπὸ ABM διὰ τὸ ἡ' θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων, καὶ διὰ τοῦτο εὐθεῖα ἐστίν ἡ ΚΕΛ. κείσθω οὖν τῇ μὲν ΘΑ ἴση ἡ AZ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ BH. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ διπλασία τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ Φ πρὸς τὴν ΤΥ, ὡς δὲ ἡ Φ πρὸς τὴν ΤΥ, οὕτως τὸ ὑπὸ TOY πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ διὰ τὸ κ' θεώρημα τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων, ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ TOY πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ TB πρὸς BO, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς BE, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ TO πρὸς OB, οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς EB. ἀλλ' ὡς ἡ BO πρὸς OY, οὕτως ἡ BE πρὸς EP· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ TO πρὸς OY, οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς EP. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ TOY πρὸς τὸ ἀπὸ OY, οὕτως τὸ ὑπὸ ΣΕΡ πρὸς τὸ ἀπὸ EP· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ TOY πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΕΡ, οὕτως τὸ ἀπὸ OY πρὸς τὸ ἀπὸ EP.

172 ἀλλὰ τὸ ἀπὸ OY τοῦ ἀπὸ EP διπλάσιον διὰ τὸ καὶ τὸ ἀπὸ BO τοῦ ἀπὸ BE· ἴση γάρ ἐστίν ἡ BE τῇ EO ἡμισείας ὀρθῆς οὔσης ἐκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Β, Ο· καὶ τὸ ὑπὸ TOY ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΣΕΡ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ διπλασία τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ TOY πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση· ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ EH· ἴση γὰρ ἡ ΞΟ τῇ EH διὰ τὸ ἐκατέραν αὐτῶν ἴσην εἶναι συναμφοτέρῳ τῇ ΛΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΘΑΕ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΜΒΕ, οὕτως συναμφοτέρος ἡ ΚΑΕ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΛΒΕ· ἐκάτερος γὰρ τῶν λόγων ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΘΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΚΑΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΒΕ. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ μὲν τῇ ΘΑΕ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΕ, συναμφοτέρῳ δὲ τῇ ΛΒΕ ἴση ἡ ΕΗ, συναμφοτέρῳ δὲ τῇ ΚΑΕ ἴση ἡ ΡΕ, συναμφοτέρῳ δὲ τῇ ΜΒΕ ἴση ἡ ΕΣ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΡΕΣ. ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΕΣ πρὸς τὸ ἀπὸ EH· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ EH. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ EH, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς EH· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς EH. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ MB πρὸς BE, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς AE, ἴση δὲ ἡ ΘΑ τῇ ΖΑ, ὡς ἄρα ἡ MB πρὸς BE, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς AE. διὰ τὰ αὐτὰ καί, ὡς ἡ KA πρὸς AE, οὕτως ἡ HB πρὸς BE. εὐθείας ἄρα δοθείσης τῆς AB καὶ ἐτέρας τῆς AK καὶ λόγου τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ εἴληπται ἐπὶ τῆς AB τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ προσετέθησαν εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, HB, καὶ γέγονεν ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἡ ΖΕ πρὸς EH, ἔτι τέ ἐστίν, ὡς ἡ δοθεῖσα ἡ MB πρὸς BE, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς AE, ὡς δὲ αὐτὴ ἡ δοθεῖσα ἡ KA πρὸς AE, οὕτως ἡ HB πρὸς BE· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

τούτων δεδειγμένων δυνατόν ἐστὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν οὕτως· ἔστω γὰρ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος, ὃν δεῖ ἔχειν τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα, ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ E, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς AB σημεῖον τὸ Z, καὶ προσκείσθωσαν αἱ HA, ΘB, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν Γ πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὴν HZ πρὸς τὴν ZΘ, ἔτι τε εἶναι, ὡς μὲν τὴν HA πρὸς AZ, οὕτως δοθεῖσαν τὴν EB πρὸς BZ, ὡς δὲ τὴν ΘB πρὸς BZ, οὕτως τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τὴν EA πρὸς AZ· τοῦτο γὰρ ὡς δυνατόν ποιεῖν, προδέδεικται· καὶ διὰ τοῦ Z τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ KZΛ, καὶ διὰ τῆς KΛ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν AB τεμνέτω τὴν σφαῖραν. λέγω, ὅτι τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν τῆς Γ πρὸς τὴν Δ. ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς ἡ HA πρὸς AZ, οὕτως ἡ EB πρὸς BZ, καὶ συνθέντι· ὡς ἄρα ἡ HZ πρὸς ZA, οὕτως συναμφοτέρως ἡ EB, BZ πρὸς BZ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν KΛ, ὕψος δὲ τὴν ZH, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν ZA. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΘB πρὸς BZ, οὕτως ἡ EA πρὸς AZ, καὶ συνθέντι ἐστίν, ὡς ἡ ΘZ πρὸς BZ, οὕτως συναμφοτέρως ἡ EA, AZ πρὸς AZ· ὁ ἄρα κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν KΛ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ZΘ, ἴσος ἐστὶ τῷ τμήματι τῆς σφαίρας τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ τὴν BZ. ἐπεὶ οὖν οἱ εἰρημένοι κῶνοι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη, τουτέστιν ὡς ἡ HZ πρὸς ZΘ, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ τὰ τμήματα ἄρα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν δοθέντα· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

176 Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΓA, AB τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ A, καὶ δεδόσθω σημείον τι τὸ Δ, καὶ προκείσθω διὰ τοῦ Δ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΓA, AB γράψαι ὑπερβολὴν. ἐπεζεύχθω ἡ AΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ E, καὶ κείσθω τῇ AΔ ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΔZ, καὶ κείσθω τῇ AZ ἴση ἡ ZΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ B, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔE, H, καὶ ἐκβληθείσης τῆς AΔ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν H ὑπερβάλλοντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔE, H. λέγω, ὅτι τῆς γεγραμμένης ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΓA, AB. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστίν ἡ ΔZ τῇ BA, καὶ ἴση ἡ ΓZ τῇ ZA, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔB· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΓB ἴσον τῷ ὑπὸ ΔE, H· ἐκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔB τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔE, H εἵδους. αἱ ἄρα ΓA, AB ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς ὑπερβολῆς διὰ τὸ πρῶτον θεωρημα τοῦ β' βιβλίου τῶν Ἀπολλωνίου Κωνικῶν στοιχείων. Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ δ'.

178 (1τ) Ἐν δὲ τῇ συνθέσει προσεκβάλλων τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας τὴν ΔB καὶ ἀποθέμενος τῇ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἴσην τὴν ZB καὶ τεμὼν αὐτὴν εἰς τὸν δοθέντα λόγον κατὰ τὸ Θ καὶ ἐπὶ τῆς ΔB λαβὼν τὸ X οὕτως, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν XZ πρὸς ΘZ, οὕτως τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔX, τὰ αὐτὰ κατασκευάζων τοῖς πρότερόν φησι, ὅτι· γεγονέτω, ὡς συναμφοτέρως ἡ KΔX πρὸς ΔX, οὕτως ἡ PX πρὸς X B, καὶ τίθησιν τὸ P μεταξὺ τῶν Θ, Z. ὅτι δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει, δεικτέον. ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς συναμφοτέρως ἡ KΔX πρὸς ΔX, ἡ PX πρὸς XB, διελόντι, ὡς ἡ KΔ πρὸς ΔX, ἡ PB πρὸς XB· ἐναλλάξ, ὡς ἡ KΔ πρὸς PB, ἡ ΔX πρὸς BX. μείζων δὲ ἡ ΔX τῆς XB· μείζων ἄρα καὶ ἡ KB τῆς BP, τουτέστιν ἡ ZB τῆς BP· ὥστε τὸ P ἐντὸς τοῦ Z πεσεῖται. ὅτι δὲ καὶ ἐκτὸς τοῦ Θ, δειχθήσεται ὁμοίως τοῖς ἐν τῇ ἀναλύσει προελθούσης πάσης τῆς συνθέσεως τοῦ θεωρήματος. συνάγεται γὰρ, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ PX πρὸς XΛ, ἡ BΘ πρὸς ΘZ· ὥστε καὶ συνθέντι. καὶ διὰ τοῦτο γίνεται ἀκόλουθος τοῖς ἄνω εἰρημένοις καὶ ἐνταῦθα ἡ δεῖξις. Καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένη ἀναλογίᾳ τεταραγμένην ἀναλογίαν ἐν τοῖς Στοιχείοις ἐμάθομεν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, ὅταν ᾖ, ὡς μὲν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, ὡς δὲ ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι ἐν τοῖς

πρώτοις, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. κἀνταῦθα οὖν δέδεικται, ὡς μὲν ἡγούμενον ἢ ΡΛ πρὸς ἐπόμενον τὴν ΛΔ, οὕτως ἡγούμενον ἢ ΧΖ πρὸς ἐπόμενον τὴν ΖΘ, ὡς δὲ ἐπόμενον ἢ ΔΛ πρὸς ἄλλο τι τὴν ΛΧ, οὕτως ἄλλο τι ἢ ΒΖ πρὸς ἡγούμενον τὴν ΧΖ.

180 ἔπεται ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πέμπτῳ τῶν Στοιχείων, ὡς ἢ ΡΛ πρὸς ΛΧ, οὕτως ἢ ΒΖ πρὸς ΖΘ. Εἰς τὸ ε'. Καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΖΗ τμήμα τῷ ΘΚΛ τμήματι, ὁμοιος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ ΕΖΩ κῶνος τῷ ΨΘΚ κῶνῳ νενοήσθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι αἱ καταγραφαὶ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ ΕΗ, ΗΖ, ΕΟ, ΟΖ, ΘΛ, ΛΚ, ΘΞ, ΞΚ. ἐπεὶ οὖν ὁμοιά ἐστὶ τὰ ΕΖΗ, ΘΚΛ τμήματα, ἴσαι εἰσὶν καὶ αἱ ὑπὸ ΕΗΖ, ΘΛΚ γωνίαι· ὥστε καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Φ, Υ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΗΦΖ τρίγωνον τῷ ΛΥΚ, καὶ ἐστὶν, ὡς ἢ ΗΦ πρὸς ΦΖ, ἢ ΛΥ πρὸς ΥΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἰσογώνιων ὄντων τῶν ΦΖΟ, ΥΚΞ τριγώνων ἐστὶν, ὡς ἢ ΖΦ πρὸς ΦΟ, ἢ ΚΥ πρὸς ΥΞ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἢ ΗΦ πρὸς ΦΟ, ἢ ΛΥ πρὸς ΥΞ. καὶ συνθέντι, ὡς ἢ ΗΟ πρὸς ΟΦ, ἢ ΛΞ πρὸς ΞΥ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, ὡς ἢ ΣΟ πρὸς ΟΦ, ἢ ΡΞ πρὸς ΞΥ· καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΣΟΦ πρὸς ΦΟ, τουτέστιν ἢ ΩΦ πρὸς ΦΗ, οὕτως συναμφοτέρος ἢ ΡΞΥ πρὸς ΞΥ, τουτέστιν ἢ ΨΥ πρὸς ΥΛ. ἀλλ' ὡς ἢ ΗΦ πρὸς ΦΖ, ἢ ΑΥ πρὸς ΥΚ· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἢ ΩΦ πρὸς ΦΖ, ἢ ΨΥ πρὸς ΥΚ· καὶ τῶν ἐπομένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἢ ΩΦ πρὸς ΕΖ, ἢ ΨΥ πρὸς ΘΚ.

182 τῶν ἄρα ΩΕΖ, ΨΘΚ κῶνων ἀνάλογόν εἰσιν οἱ ἄξονες καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων· ὁμοιοὶ ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λόγος δὲ τῆς ΩΦ πρὸς τὴν ΕΖ δοθεὶς ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομένοι εἰσὶ καὶ αἱ διαμέτροι τῶν βάσεων καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων· ὥστε δέδοται ἢ ΕΖ καὶ ἢ ΗΦ. καὶ ἢ ἡμίσεια ἄρα τῆς ΕΖ ἢ ΕΦ δοθήσεται· ὥστε καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΦΟ. ἐὰν δὲ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ δοθεῖσαν· δοθεῖσα ἄρα ἢ ΦΟ. ἀλλὰ καὶ ἢ ΦΗ· καὶ ὅλη ἄρα ἢ διάμετρος τῆς σφαίρας δοθεῖσά ἐστὶ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἢ ἡμίσεια αὐτῆς δέδοται ἢ ΣΟ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἢ ΟΦ· δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ΣΟ πρὸς ΟΦ λόγος. καὶ συνθέντι ὁ συναμφοτέρου τῆς ΣΟΦ πρὸς τὴν ΟΦ λόγος δοθεὶς ἐστὶν, τουτέστι τῆς ΩΦ πρὸς ΦΗ. καὶ δέδοται ἢ ΦΗ· δέδοται ἄρα καὶ ἢ ΩΦ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἢ ΕΖ· δέδοται ἄρα καὶ ὁ τῆς ΩΦ πρὸς ΕΖ λόγος. τὰ αὐτὰ δὲ ἂν ῥηθεῖη καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ τμήματος, καὶ συναχθήσεται ὁ τῆς ΧΤ πρὸς ΑΒ λόγος δοθεὶς καὶ διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ΑΒ δοθεῖσα ἔσται καὶ ἢ ΧΤ. ὅτι δέ, ἂν τὰ τμήματα δεδομένα ᾖ, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν δοθήσονται, πρόδηλον μὲν, ἵνα δὲ καὶ τοῦτο ἀκολουθῶς τῇ στοιχειώσει τῶν δεδομένων δοκῇ συνάγεσθαι, λεχθήσεται. ἐπειδὴ δέδοται τὰ τμήματα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ ἢ ΕΖ καὶ ἢ ἐν τῷ τμήματι γωνία· ὥστε καὶ ἢ ἡμίσεια αὐτῆς.

184 καὶ ἐὰν νοήσωμεν ἐπιζευγνυμένην τὴν ΕΗ, δεδομένης τῆς πρὸς τῷ Φ ὀρθῆς δεδομένη ἔσται καὶ ἢ λοιπὴ καὶ τὸ ΕΗΦ τρίγωνον τῷ εἶδει· ὥστε καὶ ὁ τῆς ΕΦ πρὸς ΦΗ λόγος δοθεὶς ἔσται. καὶ δέδοται ἢ ΕΦ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΕΖ· δέδοται ἄρα καὶ ἢ ΦΗ. ἔνεστι δὲ καὶ ἄλλως λέγειν. ἐπειδὴ δέδοται ἢ ΕΖ τῇ θέσει, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Φ· διχοτομία γάρ ἐστὶ τῆς ΕΖ· πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἢ ΦΗ τῇ θέσει, δέδοται δὲ καὶ ἢ περιφέρεια τοῦ τμήματος τῇ θέσει, δέδοται ἄρα τὸ Η. ἦν δὲ καὶ τὸ Φ δεδομένον· δέδοται ἄρα καὶ ἢ ΦΗ. Ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἢ ΨΥ πρὸς ΧΤ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, οὕτως ἢ ΚΘ πρὸς Δ ἐπεὶ γὰρ γέγονεν, ὡς ἢ ΨΥ πρὸς ΘΚ, ἢ ΧΤ πρὸς Δ, ἐναλλάξ, ὡς ἢ ΨΥ πρὸς ΧΤ, ἢ ΚΘ πρὸς Δ. ἀλλ' ὡς ἢ ΨΥ πρὸς ΧΤ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ· ἴσων γὰρ ὄντων τῶν κῶνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ὡς δὲ αἱ βάσεις πρὸς ἀλλήλας, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, ἢ ΘΚ πρὸς τὴν Δ. Καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἢ ΑΒ πρὸς ΘΚ, ἢ ζ πρὸς Δ ἐπειδὴ τῷ λόγῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ ὁ αὐτὸς ἐδείχθη ὁ τῆς ΒΑ πρὸς ζ καὶ ὁ τῆς ΚΘ πρὸς Δ, καὶ ὁ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς ζ ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τῆς ΚΘ πρὸς Δ· ὥστε ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἢ ΒΑ πρὸς ΘΚ, ἢ ζ πρὸς Δ. Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ ε'. Ἐπειδὴ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΘΚ, ζ, Δ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΚ, ἢ ΘΚ πρὸς Δ καθόλου γάρ,

ἐὰν ὥσιν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, ἔσται, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἢ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην.

186 ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, ἢ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, ἐναλλάξ, ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἢ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. ἀλλ' ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, ἢ δευτέρα πρὸς τὴν τετάρτην. Εἰς τὸ ζ'. Ἐπεὶ δὲ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΚΛΜ τῷ ΑΒΓ τμήματι, ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΡΛ πρὸς ΡΝ, ἢ ΒΠ πρὸς ΠΘ ἐὰν γὰρ ἐπιζευχῶσιν αἱ ΜΝ, ΓΘ, ἐπεὶ ὁμοιά εἰσιν τὰ τμήματα, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Λ γωνίαι. εἰσὶν δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Μ, Γ ὀρθαί· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ, καὶ ἰσογώνια τὰ τρίγωνα, καὶ ἐστὶν, ὥς ἡ ΘΒ πρὸς ΘΓ, οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ. ἀλλ' ὥς ἡ ΘΓ πρὸς ΘΠ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΡ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΓΘΠ, ΜΝΡ τριγώνων· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὥς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΠ, ἢ ΛΝ πρὸς ΝΡ· ὥστε καὶ διελόντι, ὥς ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ, οὕτως ἡ ΑΡ πρὸς ΡΝ. Λόγος δὲ τῆς ΕΖ πρὸς ΒΓ δοθεὶς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν, δεδομένοι εἰσὶ καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων καὶ τὰ ὕψη τῶν τμημάτων· ὥστε, ἐπεὶ δέδοται ἡ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ἡμίσεια αὐτῆς ἡ ΓΠ. δέδοται δὲ καὶ ἡ ΒΠ, καὶ ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσιν· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ δοθεῖσά ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΕΖ λόγος δοθεὶς ἐστὶν. Εἰς τὴν σύνθεσιν τοῦ ζ'.

188 (1τ) Ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΚΜ, ΑΓ τμήματα κύκλων ἐὰν γάρ, ὥς ἐν τῇ ἀναλύσει, ἐπιζευχῶσιν αἱ ΓΘ, ΜΝ, ἐπεὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Γ, Μ, καὶ κάθετοι αἱ ΓΠ, ΜΡ, μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων· ὥστε ἐστίν, ὥς ἡ πρώτη ἢ ΒΠ πρὸς τὴν τρίτην τὴν ΠΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τῆς ΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τῆς ΠΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὥς ἡ ΑΡ πρὸς ΡΝ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΜ. καὶ ἐστὶν, ὥς ἡ ΒΠ πρὸς ΠΘ, ἢ ΡΛ πρὸς ΡΝ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΜ· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΠΓ, ἢ ΑΡ πρὸς ΡΜ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνια ἄρα τὰ τρίγωνα. ἴσαι ἄρα αἱ πρὸς τοῖς Β, Λ γωνίαι καὶ αἱ διπλασίους αὐτῶν αἱ ἐν τοῖς τμήμασιν· ὁμοια ἄρα εἰσὶν τὰ τμήματα. Εἰς τὸ ζ'. Λόγος ἄρα δεδομένος συναμφοτέρου τῆς ΕΔΖ πρὸς ΔΖ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρος ἡ ΕΔ, ΔΖ πρὸς ΔΖ λόγον ἔχει δεδομένον, ἐὰν δεδομένον μέγεθος πρὸς τι μῶριον ἑαυτοῦ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἔξει δεδομένον· ὥστε συναμφοτέρος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΕΔ λόγον ἔχει δεδομένον. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΕΔ, ΔΖ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΕΔΖ λόγον ἔχει δεδομένον, καὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον· δέδοται ἄρα ὁ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΖ λόγος. καὶ δέδοται ἡ ΕΔ· δέδοται γὰρ ἡ διάμετρος· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΔΖ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΒ δοθήσεται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΖ, τουτέστιν ἡ ΑΖ δοθεῖσα ἔσται· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΓ. καὶ ἄλλως δὲ λέγοις ἄν, ὅτι ἡ ΑΓ δοθεῖσά ἐστιν.

190 ἐπεὶ γὰρ δέδοται ἡ διάμετρος ἡ ΔΒ τῇ θέσει, δέδοται δὲ καὶ τὸ Ζ, ὥς ῥηται, καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Ζ πρὸς ὀρθὰς ῥηται ἡ ΑΓ, δέδοται ἡ ΑΓ τῇ θέσει. ἀλλὰ καὶ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια· δοθέντα ἄρα τὰ Α, Γ, καὶ αὐτὴ ἡ ΑΖΓ δοθεῖσά ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ συναμφοτέρος μὲν ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ συναμφοτέρος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ ἐπεὶ γὰρ ἡ ΕΔ μείζων ἢ ἡμίσειά ἐστι τῆς ΔΖ, συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΕΔΖ τῆς ΔΖ μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιολία. συναμφοτέρος δὲ ἡ ΕΔ, ΔΒ τῆς ΔΒ ἡμιολία· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ ἥπερ ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ. ἢ καὶ ἄλλως. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΔΒ τῆς ΔΖ, ἄλλη δὲ τις ἡ ΕΔ, ἢ ΕΔ ἄρα πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ· συνθέντι συναμφοτέρος ἡ ΕΔΖ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ συναμφοτέρος ἡ ΕΔΒ πρὸς ΔΒ. ἢ σύνθεσις τοῦ θεωρήματος σαφὴς διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων. Εἰς τὸ η'. Ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογώνῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετος ῥηται ἡ ΑΖ, τῶν πρὸς τῇ καθετῷ τριγώνων ὁμοίων ὄντων ἐστίν, ὥς ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, ἢ ΑΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν

τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· ὡς ἄρα ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

192 ἀλλ' ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ· ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ. συναχθεὶς δ' ἂν τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως οὕτως ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΖ τῆς ΒΔ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ὑπὸ ΔΒΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΒΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΒΔΖ ἴσον τὸ ἀπὸ ΔΑ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ καθόλου γάρ, ἐὰν ὡσιν δύο μεγέθη ἄνισα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς ἴσα, τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ συντεθέν πρὸς τὸ συντεθέν. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προσκείσθωσαν αὐταῖς ἴσαι αἱ ΒΕ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΕ, τουτέστι πρὸς ΔΖ· ὥστε καὶ συνθέντι ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΖ πρὸς ΔΖ διὰ τὰ προδεδειγμένα. Ἐλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἐὰν γὰρ ὡς τρεῖς εὐθεῖαι συνεχεῖς ὡς αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὴν Α πρὸς τὴν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἢ περ τὴν Β πρὸς τὴν Γ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῶν Α, Γ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Β. ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν, ὡς τὴν Α πρὸς τὴν Β, τὴν Β πρὸς ἄλλην τινά, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς Γ, εἴπερ δεῖ ἐλαττωσαί τὸν τῆς Β πρὸς Γ λόγον.

194 καὶ ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς Α καὶ τῆς μείζονος τῆς Γ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Β· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ ὡς γὰρ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΗ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἔλασσον· τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἔλασσον. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΖΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ δῆλον, ὅτι, ὅσω τῆς διχοτομίας ἀφέστηκεν τὸ Ζ μείζονι, ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἴσων· μετὰ γὰρ μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ τῶν ἴσων. ὥστε ἡ εὐθεῖα κἂν εἰς ἄνισα τέμνηται κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν ἑγγιον τῆς διχοτομίας μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ἀπωτέρων τμημάτων. Ἡ ΖΒ ἄρα πρὸς ΒΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ καθόλου γάρ, ἐὰν τέσσαρες ὅροι ὡσιν, ὡς οἱ Α, Β, Γ, ΔΕ, καὶ ἢ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ Β, Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς ΔΕ. ἔστω γὰρ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΖΕ· ἐστὶν ἄρα, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν ΖΕ. ὁ δὲ Γ πρὸς τὸν ΖΕ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸν ΕΔ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ Γ πρὸς ΔΕ.

196 Ἦστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ ἐπεὶ γὰρ τῷ ὑπὸ ΘΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΝ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ· καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ, συνθέντι, ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΒ, ἡ ΚΝ πρὸς ΚΒ· ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΚ, ἡ ΝΒ πρὸς ΒΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. Τὸ δὲ ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ πάλιν γὰρ δύο ἀνίσοις ταῖς ΘΖ, ΖΚ πρόσκειται ἡ ΝΖ, καὶ διὰ τὸ ἀνωτέρω εἰρημένον ἡ ΘΖ πρὸς ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΝ πρὸς ΝΚ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΚ, τουτέστιν ἡ ΘΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΚΖ πρὸς ΖΗ. Ἡ ἄρα ΘΖ πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμίολιον τοῦ τῆς ΚΖ πρὸς ΖΗ

νοεῖθωσαν γὰρ χωρὶς κείμεναι εὐθεῖαι, ὡς αἱ AB, Γ, Δ, ὥστε τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ μείζονα λόγον ἔχειν ἥπερ τὴν Γ πρὸς τὴν Δ.

198 λέγω, ὅτι ἡ AB πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ἀπὸ Γ λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς AB πρὸς Γ, ὁ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς Ε, καὶ ἡ AB ἄρα πρὸς Γ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ Γ πρὸς Ε. γεγονέντω οὖν, ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς ΒΖ. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΒΖ, Γ, Ε, Δ, ἡ ΒΖ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΖ πρὸς Γ, τουτέστιν ἡ Γ πρὸς Ε. ἔχει δὲ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς Γ πρὸς Ε· ἡ ἄρα ΒΖ πρὸς Δ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἡ Γ πρὸς Δ· ὥστε ἡ AB πρὸς Δ μείζονα ἢ ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ τῆς Γ πρὸς Δ. Λήμμα εἰς τὸ ἐξῆς. Ἔστωσαν τέσσαρες ὅροι οἱ Α, Γ, Δ, Β. λέγω, ὅτι ὁ συγκεείμενος λόγος ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ μετὰ τοῦ τῆς Β πρὸς Δ λόγου ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὴν Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὴν Δ. ἔστω γὰρ τῷ μὲν ὑπὸ Α, Β ἴσος ὁ Κ, τῷ δὲ ἀπὸ Γ ἴσος ὁ Λ, καὶ γεγονέντω, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, οὕτως ὁ Λ πρὸς Μ· ὁ ἄρα τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Κ πρὸς Λ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τοῦ Λ πρὸς Μ, τουτέστι τοῦ Β πρὸς Δ. ὁ δὲ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν ποιεῖτω, ὁ δὲ Λ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ο.

200 ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ὁ Κ ἐστίν, ὁ δὲ Κ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν, ὁ ἄρα Ν ἐστὶν ὁ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ἀπὸ Γ ὁ Λ ἐστίν, ὁ δὲ Λ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν ὁ Ο ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸν Δ· ὥστε ὁ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τοῦ Ν πρὸς Ο. ἐπεὶ οὖν ἐκάτερος τῶν Κ, Λ τὸν Β πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Λ ἐκάτερον τῶν Β, Δ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ξ, Ο πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Ξ πρὸς Ο. ἀλλ' ὡς ὁ Β πρὸς Δ, ὁ Λ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Λ πρὸς Μ, ὁ Ξ πρὸς Ο. οἱ ἄρα Κ, Λ, Μ τοῖς Ν, Ξ, Ο ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν σύνδυο λαμβανόμενοι· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ Κ πρὸς Μ, οὕτως ὁ Ν πρὸς Ο. καὶ ἐστὶν ὁ τοῦ Κ πρὸς Μ λόγος ὁ αὐτός τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸν ἀπὸ Γ καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ, ὁ δὲ τοῦ Ν πρὸς Ο λόγος ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β πρὸς τὸν ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ· ὁ ἄρα συγκεείμενος λόγος ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸν ἀπὸ Γ καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ὁ Β πρὸς Δ, ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ τοῦ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β πρὸς τὸν ἀπὸ Γ ἐπὶ τὸν Δ. φανερόν δὲ καί, ὅτι τὸ ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α. ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β τοῦ Β κοινοῦ ὕψους λαμβανομένου, ἐὰν δὲ τέσσαρες ὅροι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ ἄρα ὑπὸ Α, Β ἐπὶ τὸν Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸν Α. Εἰς τὸ ἄλλως τοῦ η'.

202 (1t) Εἴρηται ἐν τοῖς προλαβοῦσιν, ὡς, ἐὰν δύο μεγεθῶν ληφθῇ τι μέσον, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ πρῶτον πρὸς τὸ μέσον, καὶ τὸ μέσον πρὸς τὸ τρίτον. ὁμοίως δὲ κἂν πλείονα μέσα ληφθῇ, ὁ τῶν ἄκρων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λόγων, ὧν ἔχουσι πάντα κατὰ τὸ ἐξῆς πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη. καὶ ἐνταῦθα οὖν φησιν, ὅτι· ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμήμα λόγος σύγκειται ἐκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ΒΑΔ τμήμα πρὸς τὸν κῶνον ν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλος ζ, κορυφή δὲ τὸ Α σημεῖο ν, καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν ν, κορυφὴν δὲ τὸ Γ σημεῖο ν, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμήμα α, δηλαδὴ τοῦ ΔΑΒ τμήματος καὶ τοῦ ΒΓΔ μέσων λαμβανομένων τῶν εἰρημένων κῶνων. Ἄλλ' ὁ μὲν τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸν ΒΑΔ κῶνον ὁ τῆς ΗΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ. διὰ τὸ πόρισμα τοῦ δευτέρου θεωρήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου· ἐλέγετο γὰρ τὸ τμήμα πρὸς τὸν ἐν ἑαυτῷ κῶνον τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρος ἢ τε ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τῆς σφαίρας καὶ τὸ

ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. Ὁ δὲ τοῦ ΒΑΔ κώνου πρὸς τὸν ΒΓΔ κώνον ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΓ ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντες πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. Ὁ δὲ τοῦ ΒΓΔ κώνου πρὸς τὸ ΒΓΔ τμήμα ὁ τῆς ΑΘ ἐστὶ πρὸς ΘΖ διὰ τὸ ἀνάπαλιν τοῦ εἰρημένου πορίσματος, ὥστε ὁ τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὸ ΒΓΔ τμήμα λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ καὶ τοῦ τῆς αΘ πρὸς ΘΖ.

204 ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΘ πρὸς ΘΓ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς Θ Γ , ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ· τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΖ ὁ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ὡς δέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι λήμματι. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΗΘΑ ἐπὶ τὴν ΘΑ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν Θ Η καὶ τοῦτο γὰρ συναποδέδεικται ἐν τῷ προληφθέντι· ὅρα τοῦ τμήματος πρὸς τὸ τμήμα λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. ἐπεὶ οὖν δεῖ δεῖξαι, ὅτι τὸ τμήμα πρὸς τὸ τμήμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου, δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ἢ ἐπιφάνεια τοῦ ΒΑΔ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ΒΓΔ, τουτέστι τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἢ ΑΘ πρὸς ΘΓ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς προλαβοῦσιν θεωρήμασιν; δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς Θ Γ. ἀλλὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ λόγου διπλασίος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ· ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ, τῆς ΘΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ· χρή ἄρα δειχθῆναι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν Θ Η.

206 πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο μείζον ἐστὶ· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΖΘ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν Θ Η , τουτέστιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ ΖΘ τῆς Θ Η. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν; ἀνίσοις γὰρ ταῖς ΑΘ, ΘΓ ἴσαι πρόσκεινται αἱ ΖΑ, ΓΗ. ταῦτα εἰπὼν αὐτὸς μὲν οὐκ ἐπήγαγεν τὴν σύνθεσιν, ἡμεῖς δὲ αὐτὴν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἢ ΖΘ τῆς ΘΗ μείζων ἐστίν, τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ αὐτὸ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ, τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ. ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ λόγος διπλασίος ἐστὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΓ. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, ὁ δὲ τῶν ἐπιφανειῶν τῷ, ὃν ἔχει ἢ ΑΘ πρὸς ΘΓ· τὸ ἄρα τμήμα πρὸς τὸ τμήμα ἐλάσσονα ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου. ἐξῆς δὲ ἀναλύων τὸ ἕτερον μέρος τοῦ θεωρήματος ἐπάγει· φημὶ δὴ, ὅτι τὸ μείζον τμήμα πρὸς τὸ ἔλασσον μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου.

207 ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ, τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγου ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβου τοῦ γὰρ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ διπλασίος μὲν ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον, τριπλασίος δὲ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον.

208 ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον· ὡς γὰρ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἢ ΑΘ πρὸς ΘΒ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓ, ΑΒΘ

τριγώνων, ἐὰν δὲ ὥσιν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογόν εἰσιν· ὥστε ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον ἡμιόλιον λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ τετράγωνον, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. ἀλλ' ὡς τὸ τμήμα πρὸς τὸ τμήμα, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ. φημὶ οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΒ κύβον, τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ καὶ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς Θ Β· ὁ γὰρ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ διπλασίων τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ αὐτὸς γίνεται τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον· ἐκάτερον γὰρ τοῦ αὐτοῦ ἐστι τριπλάσιος. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ προσλαβὼν τὸν τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘ Β. ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΘΒ πρὸς ΘΓ τῆς ΒΘ μέσης ἀνάλογον ὑπαρχούσης, ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ μετὰ τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ.

209 ἀλλ' ὁ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ τῆς ΒΘ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης· ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ μετὰ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ.

210 ἀλλ' ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ καὶ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ τοῦ ἀπὸ ΒΘ μέσου λαμβανομένου· ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΘ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν ΘΗ τῆς ΘΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης. φημὶ δὲ ἡ, ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν Θ Η. πρὸς δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστι· δεικτέον, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΒΘΓ ἐπὶ τὴν Θ Η, ὃ ταυτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸς ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΗ πρὸς Θ Ζ. ἐὰν γὰρ ὥσιν τέσσαρες ὅροι, ὡς ἐνταῦθα τὸ ἀπὸ ΓΘ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΘΒ καὶ ἡ ΘΗ καὶ ΘΖ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἔλασσον ἢ τοῦ ὑπὸ τῶν μέσων, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω. εὐλόγως ἄρα ἐχρῆν δεῖξαι τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσον τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ, ὃ ταυτόν ἐστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΗ πρὸς ΘΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ, ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΗ πρὸς ΘΖ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ.

212 ἥχθω ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΒΛ· ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι δεῖ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς Θ Β. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΘΖ συναμφοτέρω τῇ Θ Α, Κ Ε· ἡ γὰρ ΑΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστίν· δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφοτέρον τὴν Θ Α, Κ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· καὶ ἀφαιρεθείσης ἄρα ἀπὸ τῆς ΗΘ τῆς Γ Θ, ἀπὸ δὲ τῆς Κ Ε τῆς ΕΛ ἴσης τῆς Β Θ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ ΓΗ πρὸς λοιπὴν συναμφοτέρον τὴν Α Θ, Κ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς Θ Β. ἐπεὶ γὰρ δεῖ δειχθῆναι, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς συναμφοτέρον τὴν Θ Α, Κ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ Θ Α, Κ Ε πρὸς ΘΒ, τουτέστι πρὸς Λ Ε, καὶ διελόντι ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ Θ Α, Κ Λ πρὸς Λ Ε, τουτέστι πρὸς ΒΘ, ἐναλλάξ, ὅτι ἡ ΗΓ πρὸς συναμφοτέρον τὴν Θ Α, Κ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς Θ Α, τουτέστιν ἡ Λ Ε πρὸς ΑΘ· ὅτι ἄρα ἡ ΗΓ πρὸς συναμφοτέρον τὴν Θ Α, Κ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ Λ Ε πρὸς ΑΘ, καὶ ἐναλλάξ, ὅτι ἡ Γ Η, τουτέστιν ἡ Κ Ε, πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ Κ Λ, Θ Α πρὸς Θ Α· διελόντι, ὅτι ἡ Κ Λ πρὸς Λ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ αὐτὴ ἡ Κ Λ πρὸς Θ Α, τουτέστιν ὅτι ἐλάσσων ἡ Λ Ε

τῆς ΘΑ ἐστὶ ν. ἐξῆς δὲ ἡμεῖς τὴν σύνθεσιν προσθήσομεν. ἐπεὶ ἡ ΛΕ τῆς ΑΘ ἐλάσσων, ἡ ἄρα ΚΛ πρὸς ΛΕ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΚΛ πρὸς ΑΘ· συνθέντι ἡ ΚΕ πρὸς ΕΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ ΚΛ, ΑΘ πρὸς ΑΘ.

214 ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΒΘ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς ΒΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ ΚΛ, ΑΘ πρὸς ΑΘ. ἐναλλάξ· ἡ ἄρα ΗΓ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΚΛ, ΑΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ· ἐναλλάξ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ ΚΛ, ΑΘ πρὸς ΘΒ· συνθέντι ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ συναμφοτέρος ἡ ΚΛ, ΑΘ μετὰ τῆς ΘΒ, τουτέστι συναμφοτέρος ἡ ΑΘ, ΚΕ, πρὸς ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΚΕ τῇ ΑΖ· ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΒ· ἐναλλάξ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ. ὥς δὲ ἡ ΓΘ πρὸς ΘΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ· ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. καὶ διὰ τὸ πρότερον εἰρημένα τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὴν ΘΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΓΘΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΘΒ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ τοῦ ἀπὸ ΒΘ μέσου λαμβανομένου σύγκειται ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΒΘ πρὸς ΘΓ, τουτέστι τῷ τῆς ΑΘ πρὸς ΒΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ μετὰ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἕκ τε τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ καὶ τοῦ τῆς ΑΘ πρὸς ΘΒ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΘ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΘΒ κύβον, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ, ὃν ἔχει ὁ ἀπὸ ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ ΒΓ κύβον.

216 ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ ἐπὶ τὴν ΘΖ λόγος ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῶν τμημάτων λόγῳ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΒΓ κύβον λόγος ἡμιόλιος ἐδείχθη τοῦ τῶν ἐπιφανειῶν λόγου· τὸ ἄρα τμήμα πρὸς τὸ τμήμα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡμιόλιον τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν. Εἰς τὸ θ'. Δῆλον δέ, ὅτι ἡ ΒΑ τῆς μὲν ΑΚ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία δυνάμει, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασία ἐπιζευχθείσης γὰρ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμβλείας γινομένης ὑπὸ τῆς ΒΑ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν ἴσων ὄντων· ὥστε τοῦ ἐνὸς αὐτῶν, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. πάλιν δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΒ ἴσου ὄντος τοῖς ἀπὸ ΑΚ, ΚΒ καὶ μείζονος ὄντος τοῦ ἀπὸ ΑΚ τοῦ ἀπὸ ΚΒ τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΑΚ ἔλασσόν ἐστὶν ἢ διπλάσιον [καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ σχήματος, ἐφ' οὗ σημείον, ἐν δὲ τῷ ἐτέρῳ σχήματι τάναντία τούτοις εἰκότως λεχήσεται]. Ἔστω καὶ τῇ ΕΛ ἴση ἡ ΕΝ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ κῶνος ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ Ν σημεῖον. ἴσος δὲ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν ΘΕΖ περιφέρειαν ἡμισφαίριῳ ἐπεὶ γὰρ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ, ὕψος δὲ τὴν ΛΕ, τοῦ μὲν κῶνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὴν αὐτὴν καὶ ὕψος ἴσον τριπλάσιός ἐστι, τοῦ δὲ ἡμισφαίριου ἡμιόλιος, τὸ ἡμισφαίριον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ κῶνου.

218 ἔστιν δὲ καὶ ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΛΝ, διπλάσιος τοῦ αὐτοῦ κῶνου· καὶ τὸ ἡμισφαίριον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ κῶνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ΛΝ. Τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΡΓ μείζον ἐστὶ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΑΚΓ, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἐτέρους μείζονα ἔχει εἴρηται γὰρ ἀνωτέρω, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ εἰς ἄνισα κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημείον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὴν ἐγγυτέραν τῆς διχοτομίας τομὴν μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῶν κατὰ τὴν ἀπωτέρω. ταῦτόν δὲ ἐστὶν εἰπεῖν, διότι τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν τῆς

ἐλάσσονος τοῦ ἐτέρου μείζονα ἔχει· ὅσῳ γὰρ ἐλάσσων ἐστί, τοσούτῳ πλέον ἀφέστηκεν ἡ τομὴ τῆς διχοτομίας· Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΡ ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΓΞ· ἡμισυ γὰρ ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΓ, διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον ῥῆθαι τὴν ΒΚ καὶ τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνά ὅμοια εἶναι τῷ ὅλῳ γίνεται τὸ ὑπὸ ΓΑΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΓΑ καὶ ΑΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΞ, ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΡ. Μείζον οὖν ἐστὶ καὶ τὸ συναμφοτέρου τοῦ συναμφοτέρου ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΓΞ τῷ ἀπὸ ΑΡ, μείζον δὲ τὸ ὑπὸ ΑΡΓ τοῦ ὑπὸ ΑΚΓ, ἐὰν δὲ ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, καὶ ἐκεῖνο μείζον, ὃ καὶ ἐξ ἀρχῆς μείζον, τῷ μὲν ὑπὸ ΑΡΓ προστεθέντος τοῦ ἀπὸ ΑΡ, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΚΓ τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΓΞ μείζον γίνεται τὸ ὑπὸ ΑΡΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΡ τοῦ ὑπὸ ΑΚΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΓ, ΓΞ.

220 ἀλλὰ τὸ ὑπὸ ΑΡΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΡ ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ ΓΑΡ διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῆς Στοιχειώσεως, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΓΞ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΚ, ΚΞ διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ αὐτοῦ βιβλίου· ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΑΡ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΚΞ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΚΓ ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΞΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ· ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΞΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΚΓ. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΞΚΑ μείζον ἦν τὸ ὑπὸ ΓΑΡ· καὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΡ ἄρα μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΜΚΓ. Ἔστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς ΑΡ ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες εὐθεῖαι εἰσὶν αἱ ΓΚ, ΚΜ, ΓΑ ΑΡ, καὶ τὸ ὑπὸ πρώτης τῆς ΓΑ καὶ τετάρτης τῆς ΑΡ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ δευτέρας τῆς ΜΚ καὶ τρίτης τῆς ΚΓ, ἡ πρώτη ἡ ΓΑ πρὸς δευτέραν τὴν ΜΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ τρίτη ἡ ΚΓ πρὸς τετάρτην τὴν ΑΡ· καὶ ἐναλλάξ ἡ ΓΑ πρὸς ΚΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς ΑΡ. Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΒΓ διὰ τὸ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς κάθετον εἶναι τὴν ΒΚ γίνεται, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, καὶ διὰ τοῦτος, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ.

222 ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ· ὅμοιον γὰρ τὸ ΑΒΚ τῷ ΑΓΒ· ἔστιν ἄρα καί, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς ΑΡ· καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς ΑΡ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τὸ ἡμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΒ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΡ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ἡμίσεια τῆς ΜΚ πρὸς τὴν ΑΡ, τουτέστιν ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΑΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ, ἐπειδὴ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΕΖ ὑπόκειται ἴση, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΛ δυνάμει διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ ΕΛ τῇ ΑΖ· τῆς δὲ ΑΡ διπλασία ἡ ΝΛ, ἐπεὶ καὶ τῆς ΑΖ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΡ, ἢ ἐστὶν ἴση τῇ ΑΝ. Μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΖ πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ ἢ περ ἡ ΜΚ πρὸς ΝΛ. ὥστε μείζον ἐστὶν ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τοῦ κῶνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ Μ σημεῖον ἐὰν γὰρ ποιήσωμεν ὡς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΒΔ κύκλον, οὕτως τὴν ΚΜ πρὸς ἄλλην τινά, ἔστι πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΝ. καὶ ἔσται ὁ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν ΖΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν εὐρεθείσαν ἐλάσσονα εὐθείαν, ἴσος μὲν τῷ ΜΒΔ διὰ τὸ ἀντιπεπονθέναι τὰς βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐλάττων δὲ τοῦ ΝΘΖ διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντας πρὸς ἀλλήλους εἶναι ὡς τὰ ὕψη.

224 δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ κατὰ τὴν ΕΖΘ περιφέρειαν μείζον ἐστὶ τοῦ τμήματος τοῦ κατὰ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν ν. [Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου υπόμνημα εἰς τὸ δεύτερον τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου ἐκδόσεως παραναγνώσθεισης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ].