

eul_wid: uvy-ac

Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης · Eutocius of Ascalon

Commentary-the Measurement of the Circle

Ὑπόμνημα εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ κύκλου

Period: Ὀψιμαρχία Late Antique
Dialect: Κοινὴ τεχνικὴ Technical Koine
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

228 Ἐχόμενον ἂν εἴη τὸν ἐμὸν πληροῦντι σκοπὸν τοῖς σαφεστέροις καὶ βραχυτέρας ἐπιστάσεως δεομένοις τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους γεγραμμένων ἐντυγχάνοντι καὶ τὰ ὅπως οὖν ἐν αὐτοῖς ἐπεξεργασίας δεόμενα τὸν δυνατὸν τρόπον συνεχῇ ποιεῖν τοῖς πρότερον ὑφ' ἡμῶν ἐν τῷ Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις εὐχῆς ὡς ἀληθῶς ἀξίου τυγχάνοντος τοῦ καὶ τοῖς μείζοσι καὶ πλείονος φροντίδος δεομένοις ἐπιστῆναι. εἴη δ' ἂν ὡς πρὸς τὸ προκείμενον ἐφεξῆς τὸ γεγραμμένον Ἀρχιμήδει βιβλίδιον Κύκλου μέτρησιν τὴν ἐπιγραφὴν ἔχον, ἐν ᾗ τὴν πρόθεσιν τάνδρὸς ἐξ αὐτῆς τῆς ἐπιγραφῆς γνωρίζομεν· βούλεται γὰρ ἐπιδειξαι, τίνι χωρίῳ εὐθυγράμμῳ ἴσος ἂν εἴη κύκλος, πρᾶγμα πάλαι πρὸς τῶν πρὸ αὐτοῦ κλεινῶν φιλοσόφων ἐζητημένον. δῆλον γάρ, ὅτι τουτὶ ἂν εἴη τὸ ζητούμενον, ὅπερ Ἰπποκράτης τε ὁ Χῖος καὶ Ἀντιφῶν ζητήσαντες ἐπιμελῶς ἐκείνους ἡμῖν τοὺς παραλογισμοὺς εὐρήκασιν, οὓς ἀκριβῶς εἰδέναι νομίζω τοὺς τε τὴν Εὐδήμου Γεωμετρικὴν ἱστορίαν ἐπεσκεμμένους καὶ τῶν Ἀριστοτελικῶν μετασχόντας κηρίων. ἀλλ' ἔστι μὲν τοῦτο τὸ βιβλίον, ὡς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ, πρὸς τὰς τοῦ βίου χρείας ἀναγκαῖον· δείκνυσιν γάρ, ὅτι ἡ περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλασία καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάττονι μὲν ἢ ἐβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἐβδομηκοστομόνοις. τοῦτο οὖν φησιν σύνεγγυς δεδειχθαι, εὐρησθαι μέντοι αὐτῷ διὰ τινων ἐλίκων εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ κύκλου περιφερείᾳ. Εἰς τὸ α' θεώρημα.

230 (1t) Τὸ πρῶτον θεώρημα καὶ τοῖς ἐπὶ ποσὸν μαθημάτων γυμνασάμενοις οὐδεμίαν ἔχον ζήτησιν φαίνεται αὐτῶν τῶν Ἀρχιμήδους ῥημάτων σαφῶς ἐκτεθειμένων καὶ τὸ συμπέρασμα πρὸς τὴν πρότασιν ἀνελλιπῶς ἀποσωζόντων. δοκεῖ δέ τινα κατακεχρῆσθαι πρὸς τὴν ἀπόδειξιν πράγματι μηδέπω δεδειγμένῳ. ἐκθέμενος γὰρ τρίγωνον ὀρθογώνιον φησιν· ἐχέτω τὴν μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τὴν δὲ λοιπὴν τῇ περιφερείᾳ· ἀλλὰ περιφερεία κύκλου ἴσην εὐθεῖαν λαβεῖν οὐδὲ πρὸς αὐτοῦ ἤδη δεδειγμένον εἶναι, ἀλλ' οὐδὲ ὑπ' ἄλλου παραδεδομένον. συνορᾷν δὲ ὅμως χρή, ὡς οὐδὲν ἕξω τῶν προσηκόντων ὑπ' Ἀρχιμήδους γράφεται. εἶναι γάρ τι μέγεθος τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου παντὶ που δῆλον, οἶμαι, καὶ τοῦτο τῶν ἐφ' ἐν διαστατῶν, ἔστιν δὲ καὶ εὐθεῖα τοῦ αὐτοῦ εἴδους· κἂν εἰ μηδέπω οὖν ἐφάνη δυνατὸν περιφερεία κύκλου ἴσην εὐθεῖαν πορίσασθαι, ἀλλ' ὅμως εἶναί τινα τῇ φύσει εὐθεῖαν ἴσην αὐτὸ πρὸς οὐδενός ἐστι ζητούμενον. τὸ τοίνυν καὶ πρὸς Ἀρχιμήδους προτεθὲν τοιοῦτόν ἐστιν, ὅτι τὸ τρίγωνον τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον, ὡς προεῖρηται, τὰς πλευρὰς ἴσον ἐστὶ τῷ κύκλῳ· ὥστε τὸ προτεθὲν ἐκθέμενος οὐδεμιᾷς ἂν καταχρήσεως κρίνοιτο, θαυμαστὸς δ' ἂν μᾶλλον κἂν τούτοις δόξειεν

τοῖς οὕτως ὑπερμεγέθεσιν τῶν ζητημάτων σαφῇ καὶ ῥαδίαν τὴν εὐρησιν ἐπιτιθείς. ὥς δὲ εἴρηται, οὐδεμιᾶς δεῖ ζητήσεως τῷ πρώτῳ θεωρήματι. τὸ γὰρ ΠΟΡ τρίγωνον ὅτι μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΖΟΜ σχήματος, καὶ ὅτι ἀπλῶς περὶ τὸν δοθέντα κύκλον δυνατόν εὐθύγραμμον περιγράψαι, ὥστε τὰ τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν τοῦ κύκλου περιφερειῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ περιγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάττονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου, σαφῶς εἴρηται ἐν τοῖς εἰς τὸ πρῶτον τῶν Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου γεγραμμένοις ἡμῖν.

- 232 Εἰς τὸ γ' θεωρήμα. Ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι συνεχῶς ἐπιταττόμεθα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν εὐρεῖν. τοῦτο δὲ ἀκριβῶς μὲν εὐρεῖν ἐπὶ ἀριθμοῦ μὴ ὄντος τετραγώνου ἀδύνατον· ἀριθμὸς μὲν γὰρ ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενος ποιεῖ τινα τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ ἀριθμὸς δὲ καὶ μόριον ἐφ' ἑαυτὰ γενόμενα οὐκέτι ἀριθμὸν ποιεῖ πλήρη, ἀλλὰ καὶ μόριον. ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὐρεῖν, εἴρηται μὲν Ἡρωνι ἐν τοῖς Μετρικοῖς, εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἐτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου· ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρή περὶ τούτου ζητεῖν ἔξδον τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι. Καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τρίτου ὀρθῆς ἐὰν γὰρ τὴν τοῦ ἐξαγώνου περιφέρειαν διχοτομήσαντες καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πρὸς τῷ Γ ἀπολαβόντες ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΖ, ἔσται ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τρίτου ὀρθῆς. ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ ἀποληφθεῖσα περιφέρεια ἡμίσεια οὕσα τῆς τοῦ ἐξαγώνου δωδέκατόν ἐστι τοῦ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ οὕσα δωδέκατόν ἐστι τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· τρίτου ἄρα ὀρθῆς. Ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τς πρὸς ρνγ ὅτι διπλῇ ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΖΓ, δῆλον ἐντεῦθεν· ἐὰν γὰρ προσεκβαλόντες τὴν ΖΓ ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθέμενοι ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ Ε, συσταθήσεται [ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία διμοῖρου ὀρθῆς.
- 234 ἔστιν δὲ καὶ] ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία διμοῖρου ὀρθῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ διμοῖρου· ἰσοπλεύρου ἄρα τριγώνου ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ τὸ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοπλεύρου ἴσην οὕσαν τῇ ΕΖ δίχα τέμνεσθαι κατὰ τὸ Γ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΖΓ. Ἡ δὲ ΕΓ πρὸς ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ ἐπεὶ γὰρ ἡ ΕΖ ὑπόκειται τς, ἐὰν αὐτὰ ἐφ' ἑαυτὰ πολλαπλασιάσωμεν, γενήσεται Μ θ, γχλς. ἡ δὲ ΓΖ ἐστὶ ρνγ· ὥστε τὸ ἀπ' αὐτῆς ἔσται Μ β, γυθ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΕΓ, ΓΖ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ὄντος Μ θ, γχλς ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ ΓΖ ὑπάρχον Μ β, γυθ, καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ ΕΓ Μ ζ σκζ, ὣν πλευρὰ τετραγωνικὴ σξε καὶ ἔτι μόριον ἐλάχιστον καὶ ἀνεπαίσθητον· λείπεται γὰρ ἡ τῶν σξε δύνამις τῆς ἀκριβοῦς μονάσιν β. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα α, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς Ε Γ, ἡ ΖΗ πρὸς Η Γ, διὰ τὸ τρίτον θεωρήμα τοῦ ἔκτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου Στοιχειώσεως, καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΗ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρος ἡ Ζ Ε, ΕΓ πρὸς Ζ Γ, ἡ ΕΓ πρὸς Γ Η.
- 236 συναμφοτέρος δὲ ἡ ΕΖ, ΕΓ μεῖζων ἐστὶν ἥπερ φοα· ἡ μὲν γὰρ ΖΕ ὑπόκειται τς, ἡ δὲ ΕΓ σξε καὶ ἔτι μορίου τινός· ὥστε μεῖζονές εἰσι τῶν φοα. ἡ δὲ ΖΓ ἐστὶν ρνγ· συναμφοτέρος ἄρα ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ μεῖζονα λόγον ἔχει ἥπερ φοα πρὸς ρνγ· ὥστε καὶ ἡ ΕΓ πρὸς ΗΓ μεῖζονα λόγον ἔχει ἥπερ φοα πρὸς ρν γ. Ἡ ΗΕ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν Μ λδ, θυν πρὸς Μ β, γυθ συναχθήσεται δὲ τοῦτο οὕτως· ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ μεῖζονα λόγον ἔχουσα ἥπερ φοα πρὸς ρνγ, εἴ τις ὑποθοῖτο τὴν μὲν ΕΓ φοα, τὴν δὲ ΓΗ ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ ΕΓ Μ λβ, ζμα, τὸ δὲ ἀπὸ ΓΗ Μ β, γυθ, συναμφοτέρα δὲ ἴσα ὄντα τῷ ἀπὸ ΕΗ ἔσται Μ λδ, θυν. τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ φοα ἡ' ἔγγιστα· ἐλλείπει γὰρ ὁ ἀπὸ τοῦ φοα ἡ' τετράγωνος εἰς τὸ ἀκριβὲς μ ο κα ς' ιε' ἔγγιστα· ἡ ἄρα ΕΗ πρὸς ΗΓ δυνάμει μὲν λόγον ἔχει, ὃν Μ λδ, θυν πρὸς Μ β, γυθ, μήκει δέ, ὃν φοα ἡ' ἔγγιστα πρὸς ρνγ. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ τῇ ΘΕ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μεῖζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν, αρξβ ἡ' πρὸς ρνγ γίνεται γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας, ὡς ἡ ΗΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΓ.

καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἢ HE, EG πρὸς EF, ἢ HG πρὸς ΓΘ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρος ἢ HE, EG πρὸς HG, ἢ EF πρὸς ΓΘ. καὶ ἔστιν ἢ μὲν EF φοα καὶ ἔτι μορίου τινός, ἢ δὲ EH φοα ἢ' καὶ ἔτι μορίου τινός· μείζονες ἄρα εἰσὶν ἢ, ἀρξβ ἢ'. καὶ ἔστιν ἢ HG ρνγ· συναμφοτέρος ἄρα ἢ HE, EG πρὸς HG μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ, ἀρξβ ἢ' πρὸς ρνγ. Ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὄν, ἀροβ ἢ' πρὸς ρνγ ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἢ EF πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχουσα ἥπερ, ἀρξβ ἢ' πρὸς ρνγ, εἴ τις ὑποθοῖτο αὐτὰς οὕτως ἔχειν, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ EF M ρλε φλδ $\angle$ ' ξδ', τὸ δὲ ἀπὸ ΓΘ M β, γυθ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΕΘ ἴσον ὄν τοῖς ἀπὸ EF, ΓΘ ἔσται M ρλζ, γλμγ $\angle$ ' ξδ', ὣν πλευρὰ τετραγωνικὴ, ἀροβ ἢ' ἔγγιστα· λείπεται γὰρ τῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως τὸ ἀπ' αὐτῆς μ ο ξζ $\angle$ '. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται. Ἔτι δίχα ἢ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἢ EF ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ, βτλδ δ' πρὸς ρνγ· πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς ὑπὸ ΘΕΓ γωνίας ἐστίν, ὡς ἢ ΘΕ πρὸς EF, ἢ ΘΚ πρὸς ΓΚ.

240 καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΘΕ, EF πρὸς EF, ἢ ΘΓ πρὸς ΓΚ· ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΘΕ, EF πρὸς ΘΓ, ἢ EF πρὸς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἢ ΘΕ, ἀροβ ἢ' καὶ ἔτι μορίου τινός, ἢ δὲ EF, ἀρξβ ἢ' καὶ ἔτι μορίου τινός, συναμφοτέρος ἄρα ἢ ΘΕ, EF μείζων ἐστὶν ἢ, βτλδ δ'. καὶ ὑπόκειται ἢ ΘΓ ρνγ· συναμφοτέρος ἄρα ἢ ΘΕ, EF πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ, βτλδ δ' πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὄν, βτλδ δ' πρὸς ρνγ· πάλιν γὰρ, ἐπεὶ ὑπόκειται ἢ μὲν EF, βτλδ δ', ἢ δὲ ΓΚ ρνγ, ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ EF M φμδ, ηψκγ ις', τὸ δὲ ἀπὸ ΓΚ M β, γυθ. τούτοις δὲ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ KE· ἔσται ἄρα M φμζ, βρλβ ις', ὣν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἔγγιστα, βτλδ δ'. λείπει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς μ ο μα $\angle$ '. οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται. Ἔτι δίχα ἢ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΕΛ· ἢ EF ἄρα πρὸς ΓΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὰ, δχογ $\angle$ ' πρὸς ρνγ· πάλιν γὰρ διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας ἐστίν, ὡς ἢ ΚΕ πρὸς EF, ἢ ΚΛ πρὸς ΛΓ· καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΚΕ, EF πρὸς EF, ἢ ΚΓ πρὸς ΓΛ· ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρος ἢ ΚΕ, EF πρὸς ΓΚ, ἢ EF πρὸς ΛΓ.

242 καὶ ἐστὶν ἢ μὲν KE, βτλδ δ' καὶ ἔτι μορίου τινός, ἢ δὲ EF, βτλδ δ' καὶ ἔτι μορίου τινός· συναμφοτέρος ἄρα ἢ ΚΕ, EF μείζων ἐστὶν ἢ, δχογ $\angle$ '. καὶ ἐστὶν ἢ ΚΓ ρνγ· συναμφοτέρος ἄρα ἢ ΕΚ, EF πρὸς ΚΓ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ, δχογ $\angle$ ' πρὸς ρνγ. ὡς δὲ συναμφοτέρος ἢ ΚΕ, EF πρὸς ΚΓ, οὕτως ἢ EF πρὸς ΓΛ· καὶ ἢ EF ἄρα πρὸς ΓΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ, δχογ $\angle$ ' πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἢ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτον οὔσα ὀρθῆς δωδέκατον μέρος ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ταύτης δὲ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ ΗΕΓ, ἢ ὑπὸ ΗΕΓ εἰκοστοτέταρτον ἂν εἴη.

244 ταύτης δὲ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ ΘΕΓ· ὥστε μὴ ἐστίν. ταύτης δὲ ἡμίσειά ἐστὶν ἢ ὑπὸ ΚΕΓ· ρς' ἄρα ἐστίν· ἢς ἡμίσεια οὔσα ἢ ὑπὸ ΛΕΓ ροβ' ἐστίν. κείσθω οὖν, φησίν, ἴση αὐτῇ ἢ ὑπὸ ΓΕΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΖΓ ἐπὶ τὸ Μ· ἢ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ διπλασία οὔσα τῆς ὑπὸ ΛΕΓ ρς' ἐστὶ τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὥστε καὶ ἢ ΛΜ πλευρὰ ἐστὶ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ρς. ἐπεὶ οὖν ἢ EF πρὸς ΛΓ δέδεικται μείζονα λόγον ἔχουσα ἥπερ, δχογ $\angle$ ' πρὸς ρνγ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν EF διπλῇ ἢ ΑΓ, τῆς δὲ ΛΓ ἢ ΛΜ, καὶ ἢ ΑΓ ἄρα πρὸς ΛΜ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ, δχογ $\angle$ ' πρὸς ρνγ· ἀναπάλιν ἄρα ἢ ΛΜ πρὸς ΑΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ ρνγ πρὸς, δχογ $\angle$ '. καὶ ἐπεὶ ἢ ΛΜ πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ πλευρὰς ἔχοντος ρς, ἢ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου ἐστὶ Μ α, δχηπ· ὁ γὰρ ρς ἐπὶ τὸν ρνγ πολλαπλασιαζόμενος τοῦτον ποιεῖ ἢ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ΑΓ διάμετρον ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ Μ α, δχηπ πρὸς, δχογ $\angle$ '. ἢ περίμετρος ἄρα τοῦ πολυγώνου τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐστὶ τριπλασία καὶ ἔτι ὑπερέχει μ ο χξζ $\angle$ '. ταῦτα δὲ ἐλάττονα ἐστὶ τοῦ ἐβδόμου τῆς διαμέτρου μιᾶς μονάδος ἐβδόμῳ μέρει· τὰ γὰρ ἐπταπλάσια τῶν χξζ $\angle$ ', ἥπερ ἐστὶ, δχοβ $\angle$ ', ἐλάττονα ἐστὶ τῆς διαμέτρου μ ο α. ἐπεὶ οὖν τὸ πολύγωνον ἔλαττον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον καὶ ἔτι ἐβδόμῳ ὑπερέχον, ἢ δὲ περίμετρος τοῦ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ πολυγώνου, πολλῶ ἄρα ἢ τοῦ κύκλου περιφέρεια τῆς διαμέτρου ἐστὶ

τριπλασία καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι ἢ ἐβδόμῳ μέρει. Ἐξῆς δὲ κατασκευάζων τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ θεωρήματός φησιν· ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὴν Α Γ , καὶ τρίτου ὀρθῆς ἢ ὑπὸ Β Α Γ .

246 τοῦτο δὲ ἔσται, ἂν ἀπὸ τοῦ Γ τῇ τοῦ ἐξαγώνου ἴσην ἀπολαβόντες τὴν Γ Β ἐπιζεύξωμεν τὴν Α Β· ἡ γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ ἐξαγώνου περιφερείας βεβηκυῖα γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ διμοῖρου ἐστὶν ὀρθῆς, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ τρίτου. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Β Γ, τρίτου δὲ ἡ ὑπὸ Β Α Γ, διμοῖρου ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Γ Β. ἂν ἄρα προσεκβάλλοντες τὴν Γ Β ἐπὶ τὸ Β καὶ ἴσην αὐτῇ ἀπολαβόντες ἀπὸ τοῦ Α ἐπιζεύξωμεν, ἰσοπλευρον ἔσται τὸ τρίγωνον, καὶ διὰ τὸ τὴν Α Β κάθετον διχοτομεῖν τὴν βάσιν διπλῇ ἐστὶν ἡ Α Γ τῆς Γ Β. ἂν οὖν πάλιν λάβωμεν τὴν Α Γ , ἀφξ , ἔσται ἡ Γ Β ψ π , καὶ τὸ μὲν ἀπὸ Α Γ ἔσται Μ σ μ γ , δ χ , τὸ δὲ ἀπὸ Γ Β Μ ξ , η υ . καὶ ἂν ἀφέλωμεν τὸ ἀπὸ Γ Β ἀπὸ τοῦ ἀπὸ Α Γ, λοιπὸν καταλειφθήσεται τὸ ἀπὸ Α Β Μ ρ β , ε ς , ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ , α τ ν α ἔγγιστα· περιττεύει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς μ ο α . διὸ φησιν· ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἡ Α Β πρὸς Β Γ ἢ περ , α τ ν α πρὸς ψ π . οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ Β Α Γ τῇ Α Ζ Η .

248 ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Β Α Η τῇ ὑπὸ Η Γ Β· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ Η Α Γ , καὶ ἡ ὑπὸ Η Γ Β ἄρα τῇ ὑπὸ Η Α Γ ἐστὶν ἴσ η . καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ Α Η Γ ὀρθή· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Η Ζ Γ λοιπῇ τῇ ὑπὸ Α Γ Η ἐστὶν ἴσ η . ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Η Γ τρίγωνον τῷ Γ Η Ζ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρ α , ὡς ἡ Α Η πρὸς Η Γ , ἡ Γ Η πρὸς Η Ζ καὶ ἡ Α Γ πρὸς Γ Ζ. τῶν γὰρ ἰσογώνιων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, καὶ ὁμόλογοι αἱ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. Ἄλλ' ὡς ἡ Α Γ πρὸς Γ Ζ, συναμφοτέρως ἡ Γ Α Β πρὸς Γ Β· καὶ ὡς συναμφοτέρως ἄρα ἡ Β Α Γ πρὸς Γ Β, ἡ Α Η πρὸς Η Γ ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ Β Α Γ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς Α Ζ, ἔστιν, ὡς ἡ Β Α πρὸς Α Γ, ἡ Β Ζ πρὸς Ζ Γ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρως ἡ Β Α, Α Γ πρὸς Α Γ, ἡ Β Γ πρὸς Γ Ζ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρως ἡ Β Α, Α Γ πρὸς Β Γ, ἡ Α Γ πρὸς Γ Ζ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν Α Β ἐλάσσων ἢ , α τ ν α , ἡ δὲ Α Γ , ἀφξ , ἡ δὲ Β Γ ψ π · συναμφοτέρως ἄρα ἡ Α Β, Α Γ πρὸς Β Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , β λ ι α πρὸς ψ π · καὶ ἡ Α Γ ἄρα πρὸς Γ Ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , β λ ι α πρὸς ψ π . ὡς δὲ ἡ Α Γ πρὸς Γ Ζ, ἡ Α Η πρὸς Η Γ· καὶ ἡ Α Η ἄρα πρὸς Η Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , β λ ι α πρὸς ψ π . διὰ οὖν ταῦτα ἔσται τὸ μὲν ἀπὸ Α Η Μ ω μ ζ , γ λ κ α , τὸ δὲ ἀπὸ Η Γ Μ ξ , η υ . καὶ ἐστὶν αὐτοῖς ἴσον τὸ ἀπὸ Α Γ· καὶ αὐτὸ ἄρα ἔσται Μ λ η , β τ κ α · ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ , γ ι γ ς ' δ ' ἔγγιστα· ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῶν τῆς ἀκριβοῦς δυνάμεως μ ο τ ζ η ι ς '.

250 διὰ ταῦτα οὖν φησιν, ὅτι ἡ Α Γ πρὸς Γ Η ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , γ ι γ ς ' δ ' πρὸς ψ π . οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Δίχα ἡ ὑπὸ Γ Α Η τῇ Α Θ. διὰ οὖν τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς συναμφοτέρως ἡ Η Α, Α Γ πρὸς Η Γ, ἡ Α Θ πρὸς Θ Γ. καὶ ὑπέκειτο ἡ μὲν Α Η ἐλάσσων ἢ , β λ ι α , ἡ δὲ Α Γ ἐλάσσων ἢ περ , γ ι γ ς ' δ '· συναμφοτέρως ἄρα ἡ Η Α, Α Γ ἐστὶν ἐλάσσων ἢ , ε λ κ δ ς ' δ '· ἡ δὲ Η Γ ἐστὶ ψ π · συναμφοτέρως ἄρα ἡ Η Α, Α Γ πρὸς Η Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , ε λ κ δ ς ' δ ' πρὸς ψ π · ὥστε καὶ ἡ Α Θ πρὸς Θ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , ε λ κ δ ς ' δ ' πρὸς ψ π . ὥστε ἡ Α Θ πρὸς Θ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ υ ν ε ς ' δ ' πρὸς ξ '· ἐκατέρα γὰρ ἐκατέρας ἐστὶ μέρος ι γ '· καὶ τὰ τούτων τετραπλάσια, ἡ Α Θ πρὸς Θ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , α ω κ γ πρὸς σ μ · διὰ τοῦτο γὰρ φησιν, ὅτι ἐκατέρα ἐκατέρας ἐστὶ δ ι γ '.

252 καὶ ἐπεὶ ἡ Α Θ ἐστὶν , α ω κ γ , τὸ ἄρα ἀπ' αὐτῆς ἐστὶ Μ τ λ β , γ τ κ θ . ἔστιν δὲ καὶ ἡ Θ Γ σ μ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ ε , ζ χ · καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ Α Θ, Θ Γ ἴσον τὸ ἀπὸ Α Γ· ἔσται ἄρα Μ τ λ η λ κ θ · ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ , α ω λ η θ ι α '· τὸ γὰρ ἀπ' αὐτῆς ὑπερέχει τοῦ ἀκριβοῦς μ ο τ κ α ἐγγύς. ὥστε ἡ Α Γ πρὸς Θ Γ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ , α ω λ η θ ι α ' πρὸς σ μ . οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ Θ Α Γ γωνία τῇ Κ Α.

254

πάλιν οὖν διὰ τὴν διχοτομίαν τῆς γωνίας καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν καὶ τὸ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστίν, ὡς συναμφότερος ἢ ΘΑ, ΑΓ πρὸς ΓΘ, ἢ ΑΚ πρὸς ΚΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἢ ΘΑ, ΑΓ ἐλάσσων ἐστίν ἢ , γχξ α θ ι α', ἐπειδὴ ἢ μὲν ΘΑ ὑπόκειται , αωκ γ , ἢ δὲ ΑΓ , αωλ η θ ι α'. ἔστιν δὲ καὶ ἢ ΘΓ σμ · συναμφότερος ἄρα ἢ ΘΑ, ΑΓ πρὸς ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , γχξ α θ ι α' πρὸς σμ · ὥστε καὶ ἢ ΑΚ πρὸς ΚΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , γχξ α θ ι α' πρὸς σμ . καὶ ἐπεὶ τῶν μὲν , γχξ α θ ι α' τὸ ι α [καὶ] μ' ἐστὶ , α ζ , τῶν δὲ σμ ξ ζ , ἢ ΑΚ ἄρα πρὸς ΚΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , α ζ πρὸς ξ ζ . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΚ Μ ρ α , δμ θ , τὸ δὲ ἀπὸ ΚΓ , δτν ζ , οἷς ἴσον ὄν τὸ ἀπὸ ΑΓ ἐστὶ Μ ρ α , ηυ ε · ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ , α θ ζ' ἔγγιστα ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς μ ο ι β γ' λ ζ'. ἢ ΑΓ ἄρα πρὸς ΓΚ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , α θ ζ' πρὸς ξ ζ . οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· Ἔτι δίχα ἢ ὑπὸ ΚΑΓ γωνία τῇ Α Λ.

256 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστίν, ὡς συναμφότερος ἢ ΚΑ, ΑΓ πρὸς ΚΓ, ἢ ΑΛ πρὸς ΛΓ. καὶ ἐστίν ἢ μὲν ΑΚ ἐλάσσων ἢ , α ζ , ἢ δὲ ΑΓ ἐλάσσων ἢ , α θ ζ', ἢ δὲ ΚΓ ξ ζ · συναμφότερος ἄρα ἢ ΚΑ, ΑΓ πρὸς ΚΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , βι ζ ζ' πρὸς ξ ζ . καὶ ἢ ΑΛ ἄρα πρὸς ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , βι ζ ζ' πρὸς ξ ζ . καὶ ἐπεὶ ἢ ΑΛ ὑπόκειται , βι ζ ζ' καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς Μ υ ζ , δλ κ η λ ζ', ἢ δὲ ΛΓ ξ ζ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς , δτν ζ , ἴσον δὲ αὐτοῖς ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἔσται ἄρα Μ υ ζ , θσ π δ λ ζ'· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ ἐστὶ , βι ζ δ' ἔγγιστα ὑπερέχει γὰρ τὸ ἀπ' αὐτῆς τοῦ ἀκριβοῦς μ ο ι γ λ' κ'. ὥστε ἢ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , βι ζ δ' πρὸς ξ ζ . οἱ δὲ πολλαπλασιασμοὶ ὑπόκεινται· ἐπεὶ οὖν ἢ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἥπερ , βι ζ δ' πρὸς ξ ζ , ἀνάπαλιν ἄρα ἢ ΛΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ξ ζ πρὸς , βι ζ δ'.

258 καὶ ἐπεὶ ἢ ΓΒ περιφέρεια ἔκτον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἢ ΗΓ ἄρα ι β' μέρος ἐστίν, ἢ δὲ ΘΓ κ δ', ἢ δὲ ΚΓ μ η', ἢ δὲ ΛΓ ρ ζ'· ὥστε ἢ ΛΓ εὐθεῖα πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ρ ζ πλευρὰς ἔχοντος. καὶ ἐστίν ἢ ΛΓ ξ ζ · ἢ ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ , ζ τ λ ζ πρὸς , βι ζ δ' . ταῦτα δὲ ἐστὶ τριπλάσια καὶ ἔτι ὑπερέχει σπ δ δ', ἥπερ μείζονά ἐστὶ δέκα ἑβδομηκοστομόνων· ὃ ἐστὶ μ ο κ ζ λ' ζ' ἔγγιστα τὰ δὲ δεκαπλάσια τούτων σο ζ · πολλῶ ἄρα ἢ τοῦ κύκλου περιφέρεια μείζων ἐστίν ἢ τριπλάσια καὶ δέκα ἑβδομηκοστόμον α. Ὡς μὲν οὖν ἐνεχώρει, οἱ παρ' αὐτοῦ εἰρημένοι ἀριθμοὶ μετρίως ἐσαφηνίσθησαν· ἰστέον δέ, ὅτι καὶ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὀκυτοκίῳ ἀπέδειξεν αὐτὸ δι' ἀριθμῶν ἐτέρων ἐπὶ τὸ σύνεγγυς μᾶλλον ἀγαγόν. τοῦτο δὲ ἀκριβέστερον μὲν εἶναι δοκεῖ, οὐ χρήσιμον δὲ πρὸς τὸν Ἀρχιμήδους σκοπὸν· ἔφαμεν γὰρ αὐτὸν σκοπὸν ἔχειν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὸ σύνεγγυς εὑρεῖν διὰ τὰς ἐν τῷ βίῳ χρείας. ὥστε οὐδὲ Σπόρος ὁ Νικαεὺς εὐκαιρὸν εὑρεθήσεται μέμψιν ἐπάγων Ἀρχιμήδει ὡς μὴ ἀκριβῶς εὐρόντι, ποία εὐθεία ἴση ἐστίν ἢ τοῦ κύκλου περιφέρεια, ἐξ ὧν αὐτὸς ἐν τοῖς Κηρίοις φησὶν τὸν ἑαυτοῦ διδάσκαλον, Φίλωνα λέγων τὸν ἀπὸ Γαδάρων, εἰς ἀκριβεστέρους ἀριθμοὺς ἀγαγεῖν τῶν ὑπ' Ἀρχιμήδους εἰρημένων, τοῦ τε ζ' φημὶ καὶ τῶν ι ο α'· ἅπαντες γὰρ ἐφεξῆς φαίνονται τὸν σκοπὸν αὐτοῦ ἡγνοηκότες. κέχρηται δὲ καὶ τοῖς τῶν μυριάδων πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, οἷς οὐκ εὐκόλον παρακολουθεῖν τὸν μὴ διὰ τῶν Μάγνου Λογιστικῶν ἡγμένον.

260 εἰ δὲ τις ὅλως ἐβούλετο εἰς ἔλαττον αὐτὸ καταγαγεῖν, ἐχρῆν τοῖς ἐν τῇ Μαθηματικῇ συντάξει Κλαυδίου Πτολεμαίου εἰρημένοις ἀκολουθοῦντα διὰ τῶν μοιρῶν καὶ λεπτῶν καὶ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν τοῦτο ποιεῖν, καὶ πεποιήκειν ἂν ἐγὼ τοῦτο, εἰ μὴ, ὅπερ πολλάκις εἶπον, ἐνενόουν, ὡς οὔτε ἀκριβῶς δυνατὸν διὰ τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων εὑρεῖν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσην εὐθεῖαν, καὶ εἴ τις τὸ σύνεγγυς καὶ παρὰ μικρὸν προσέχοι, ἀρκεῖ τὰ ὑπ' Ἀρχιμήδους ἐνταῦθα εἰρημένα. [Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου ὑπόμνημα εἰς τὴν Ἀρχιμήδους τοῦ κύκλου μέτρησιν ἐκδόσεως παραναγνωσθείσης τῷ Μιλησίῳ μηχανικῷ Ἰσιδώρῳ ἡμετέρῳ διδασκάλῳ].