

eul_wid: uvy-ad

Εὐτόκιος ὁ Ἀσκαλωνίτης · Eutocius of Ascalon

Commentary-Conics

Ὑπόμνημα εἰς τὰ Κωνικά

Period: Ὀψιμαρχία Late Antique
Dialect: Κοινή τεχνική Technical Koine
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

168 (4t) Εἰς τὸ πρῶτον. Ἀπολλώνιος ὁ γεωμέτρης, ὃ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος ὁ τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καὶ φησὶ τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδη, τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὐρόντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατὰ γε τὴν ἐμὴν. ὃ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιότερας τῆς στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη ἐπὶ πλεόν καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργάσθαι ταῦτα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμέν· ἀλλ' ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν, ὅτι οἱ παλαιοὶ κῶνον ὀριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφορὰν μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν εἰκότως καὶ τοὺς κῶνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι καὶ μίαν τομὴν ἐν ἐκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν ἔλλειψιν· καὶ ἔστι παρ' αὐτοῖς εὐρεῖν οὕτως ὀνομαζόμενας τὰς τομάς.

170 ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἐνὸς ἐκάστου εἵδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθὰς πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτο· παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κῶνου τομῶν· τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κῶνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κῶνῳ ἐθεώρουν τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κῶνου, τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κῶνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γινομένην κῶνῳ ἀπεδείκνυσαν, τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κῶνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κῶνου· δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κῶνῳ καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ πᾶσαι αἱ τομαὶ εἰσι κατὰ διάφορον τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προσβολήν· ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ δεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων μέγαν γεωμέτρην ἐκάλουν. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἔκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας, ὃ δὲ λέγει, σαφές ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κῶνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΕ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΕΖ γωνιῶν.

172

ὀρθογωνίου μὲν ὄντος τοῦ κώνου καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε παράλληλος ἔσται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ. καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη παραβολὴ οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλου εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου. ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κώνος ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ, δύο ὀρθῶν μείζους ἔσσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ υπερβάλλειν τὰς εἰρημένους γωνίας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΒΑΓ, δύο ὀρθὰς ἢ διὰ τὸ υπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου καὶ συμπίπτειν τῇ ΓΑ ἐκτός.

174 ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ κώνος ὀξείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσσονται δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· ὥστε αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ὅπουδῆποτε· προσαυξήσαι γὰρ δύναμαι τὸν κώνον. ἔσται οὖν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴ, ἥτις καλεῖται ἔλλειψις, οὕτω κληθεῖσα ἥτοι διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένους γωνίας ἢ διὰ τὸ τὴν ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλιπῆ. οὕτως μὲν οὖν οἱ παλαιοὶ ὑποθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τριγώνου καὶ ἔτι διαφόρους τοὺς κώνους ἐθεώρησαν καὶ ἐπὶ ἐκάστου ἰδίαν τομὴν· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ὑποθέμενος τὸν κώνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνὸν τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησε τὰς τομάς. ἔστω γὰρ πάλιν ὡς ἐπὶ τῶν αὐτῶν καταγραφῶν τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἡ ΚΖΛ, κοινὴ δὲ πάλιν αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΕΖ, ἥτις καὶ διάμετρος καλεῖται τῆς τομῆς. ἐπὶ πασῶν οὖν τῶν τομῶν ὑποτίθεται τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, λοιπὸν δέ, εἰ μὲν ἡ ΕΖ παράλληλος εἴη τῇ ΑΓ, παραβολὴν γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν, εἰ δὲ συμπίπτει τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἡ ΕΖ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ὡς κατὰ τὸ Δ, γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ τομὴν ὑπερβολὴν, εἰ δὲ ἐντὸς συμπίπτει τῇ ΑΓ ἡ ΕΖ, γίνεσθαι τὴν τομὴν ἔλλειψιν, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσιν.

176 καθόλου οὖν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη, τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. κάκεῖνο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξανόμενων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει ὁμοίως τῷ κύκλῳ. πλείονων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτὸς φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμεν συναγαγεῖν αὐτὰς ἐκ τῶν ἐμπίπτοντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν, ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους ὡς εἰκὸς τρόπους τῶν ἀποδείξεων. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ ἐπιστολῇ τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχειν ἀγωγὴν στοιχειώδη· ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχειν τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα α. ταῦτα δὲ ἐστίν, ὅσα συμβαίνει παρὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· ἔχουσι γὰρ καὶ ἕτερα τινὰ παρακολουθήματα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ παρὰ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρεῖαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς ς.

178 ὁ δὲ διορισμὸς ὅτι διπλοῦς ἐστὶ παντὶ που δῆλον, ὁ μὲν μετὰ τὴν ἔκθεσιν ἐφιστάνων, τί ἐστὶ τὸ ζητούμενον, ὁ δὲ τὴν πρότασιν οὐ συγχωρῶν καθολικὴν εἶναι, λέγων δέ, πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατόν συστήναι τὸ προτιθέμενον, οἷός ἐστιν ὁ ἐν τῷ εἰκοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς

δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, ἐπειδὴ δέδεικται, ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. τὸ δὲ τρίτον τῶν κωνικῶν περιέχειν φησὶ πολλά καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπω ν. ἐπιπέδους τόπους ἔθος τοῖς παλαιοῖς γεωμέτραις λέγειν, ὅταν ἐπὶ τῶν προβλημάτων οὐκ ἂν ἐνὸς σημείου μόνον, ἀλλ' ἀπὸ πλείονων γίνεται τὸ πρόβλημα, οἷον εἰ ἐπιτάξει τις εὐθείας δοθείσης πεπερασμένης εὐρεῖν τι σημεῖον, ἂν οὗ ἢ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέση ἀνάλογον γίνεται τῶν τμημάτων, τόπον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον· οὐ μόνον γὰρ ἐν σημείῳ ἐστὶ τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὅλος, ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κύκλου. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἡμικύκλιον γραφῇ, ὅπερ ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας λάβῃς σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετον ἀγάγῃς ἐπὶ τὴν διάμετρον, ποιήσει τὸ προβληθέν.

180 ὁμοίως δὲ δοθείσης εὐθείας ἐὰν τις ἐπιτάξῃ εὐρεῖν ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον, ἂν οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις, καὶ ἐπὶ τούτου οὐ μόνον ἐν σημείῳ ἐστὶ τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος, ὃν ἐπέχει ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη· ἐὰν γὰρ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμῶν καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς, ὃ ἂν ἐπ' αὐτῆς λάβῃς σημεῖον, ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν. ὅμοιον γράφει καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ Ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου. δύο δοθέντων [εὐθειῶν] ἐν ἐπιπέδῳ [καὶ] σημείων καὶ λόγου δοθέντος ἀνίσων εὐθειῶν δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, λόγος δὲ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ μείζονος οὔσης τῆς Γ· δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ ἐπιταχθέν. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Β μέρη, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς ἄλλην τινὰ μείζονα δηλονότι τῆς Δ, καὶ ἔστω, εἰ τύχοι, πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ πάλιν γεγονέτω, ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ Δ πρὸς τὴν ΒΖ καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Η. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ τε Γ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς ΕΔ καὶ τῆς Δ καὶ ἡ Η τῶν ΑΖ, ΒΖ.

182 καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ διαστήματι δὲ τῇ Η κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΘ. φανερόν δὴ, ὅτι τέμνει ἡ ΚΘ περιφέρεια τὴν ΑΒ εὐθεῖαν· ἡ γὰρ Η εὐθεῖα μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΑΖ, ΒΖ. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΖ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΖ τῇ Η, καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἡ ΖΘ πρὸς ΖΒ. καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΒΖ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖΘ τῷ ΘΒΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑΒ. ἦχθω δὲ διὰ τοῦ Β τῇ ΑΘ παράλληλος ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, καὶ ὡς ἄρα πρώτη ἡ ΑΖ πρὸς τρίτην τὴν ΖΒ, τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΖ τῇ ὑπὸ ΘΑΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ τῇ ὑπὸ ΘΒΛ ἴση· ἐναλλάξ γάρ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν, καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΘΒ τῷ ΒΘΛ, καὶ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΛ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ, τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, καὶ διὰ τοῦτο, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΕΔ πρὸς Γ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς Δ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΒ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλόμεναι τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον ταῖς Γ, Δ.

184 λέγω δὴ, ὅτι πρὸς ἄλλῳ σημείῳ μὴ ὄντι ἐπὶ τῆς περιφερείας οὐ γίνεται λόγος τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπ' αὐτὸ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς Γ πρὸς Δ. εἰ γὰρ δυνατόν, γεγονέτω πρὸς τῷ Μ ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς ληφθεῖν, τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται καθ' ἐτέραν τῶν ὑποθέσεων· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΜΒ, ΜΖ, καὶ ὑποκείσθω, ὡς ἡ Γ πρὸς Δ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΒ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΜ

πρὸς τὸ ἀπὸ MB. ἀλλ' ὥς ἡ ΕΔ πρὸς Δ, οὕτως ὑπόκειται ἡ AZ πρὸς ZB· καὶ ὥς ἄρα ἡ AZ πρὸς ZB, τὸ ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ MB. καὶ διὰ τὰ προδειχθέντα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ B τῇ AM παράλληλον ἀγάγωμεν, δειχθήσεται, ὥς ἡ AZ πρὸς ZB, τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ ZM. ἐδείχθη δὲ καί, ὥς ἡ AZ πρὸς ZB, τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ ZΘ. ἴση ἄρα ἡ ZΘ τῇ ZM· ὅπερ ἀδύνατον. τόποι οὖν ἐπίπεδοι λέγονται τὰ τοιαῦτα· οἱ δὲ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι τὴν προσωνομίαν ἐσχέκασιν ἀπὸ τοῦ τὰς γραμμὰς, δι' ὧν γράφονται τὰ κατ' αὐτοὺς προβλήματα, ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν τὴν γένεσιν ἔχειν, οἷαί εἰσιν αἱ τοῦ κώνου τομαὶ καὶ ἕτεροι πλείους. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλοι τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν λεγόμενοι, οἱ τὴν ἐπωνυμίαν ἔχουσιν ἀπὸ τῆς περὶ αὐτοὺς ιδιότητος. μέμφεται δὲ ἐξῆς τῷ Εὐκλείδῃ οὐχ, ὥς οἶται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες, διὰ τὸ μὴ εὐρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὃ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγιῶς εὔρε τὴν μίαν μέσσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ ὥς αὐτὸς φησιν οὐκ εὐτυχῶς, καὶ περὶ τῶν δύο μέσων οὐδὲ ὅλως ἐπεχείρησε ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχειώσει, αὐτὸς ὃ τε Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον φαίνεται ζητῆσαι ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ· ἀλλ', ὥς ἔοικεν, ἐτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκῆπτει, ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται.

186 τὰ δὲ ἐφεξῆς περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου λεγόμενα σαφῆ ἔστιν. τὸ δὲ πέμπτον φησὶ περιέχειν τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι ἔστι τι σημεῖον ἐκτός, ἀφ' οὗ τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη ἔστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἔστιν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ζητεῖ ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. τοῦ δὲ ἔκτου καὶ ἐβδόμου καὶ ὀγδόου σαφῶς ἡ πρόθεσις ὑπ' αὐτοῦ εἴρηται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς. Ἀρχόμενος δὲ τῶν ὄρων γένεσιν ὑπογράφει κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τὸν τί ἔστι διορισμὸν παραδέδωκεν· ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς τὸν ὅρον λαμβάνειν. τὸ δὲ λεγόμενον ὑπ' αὐτοῦ διὰ καταγραφῆς σαφὲς ποιήσομεν· ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν καὶ τὰ ἐξῆς. ἔστω κύκλος ὁ AB, οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ σημεῖον τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα μέρη ὥς ἐπὶ τὰ Ε, Ζ.

188 ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ Δ ἡ ΔΒ φέρηται, ἕως ἂν τὸ Β ἐνεχθῇ κατὰ τῆς τοῦ AB κύκλου περιφερείας ἐπὶ τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, γεννήσει ἐπιφανειάν τινα, ἣτις σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἀπτομένων ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ, ἣν καὶ καλεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. φησὶ δέ, ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὖξεται διὰ τὸ καὶ τὴν γράφουσιν αὐτὴν εὐθεῖαν οἶον τὴν ΔΒ εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ. κῶνον δὲ λέγει τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ AB κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν μόνη γράφει ἡ ΔΒ εὐθεῖα, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ, βάσιν δὲ τὸν AB κύκλον. καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ AB κύκλῳ, ὀρθὸν καλεῖ τὸν κῶνον, ἐὰν δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, σκαληνόν· γενήσεται δὲ κῶνος σκαληνός, ὅταν λαβόντες κύκλον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀναστήσωμεν εὐθεῖαν μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀναταθείσης εὐθείας ἐπὶ τὸν κύκλον ἐπιζεύξωμεν εὐθεῖαν καὶ περιαγάγωμεν τὴν ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον τοῦ πρὸς τῷ μετέωρῳ σημείῳ τῆς ἀναταθείσης μένοντος· τὸ γὰρ προσληφθὲν σχῆμα κῶνος ἔσται σκαληνός. δῆλον δέ, ὅτι ἡ περιαγομένη εὐθεῖα ἐν τῇ περιαγωγῇ μείζων καὶ ἐλάττων γίνεται, κατὰ δὲ τινὰς θέσεις καὶ ἴση πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου.

190 ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο οὕτως· ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεισῶν εὐθειῶν μία μὲν ἔστιν ἐλαχίστη μία δὲ μεγίστη, δύο δὲ μόναι ἴσαι παρ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς μεγίστης, αἱ δὲ ἡ ἑγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων. ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ βάσις μὲν ὁ ABΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σκαληνοῦ κώνου ἐπὶ τὸ

ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἤτοι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒΓΖΗ κύκλου πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ ἐντὸς, ἐμπίπτειν πρότερον ἐπὶ τῆς περιφερείας ὥς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς ἢ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Κ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΒΔ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Ε αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ ΕΖ εὐθεῖα τῇ ΕΗ εὐθείᾳ· ἴσας γὰρ περιφερείας ὑποτείνουσιν· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΔΕ, βάσις ἄρα ἢ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἢ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ διάμετρος ἢ ΒΕ, λοιπὴ ἄρα ἢ ΕΖΓ τῇ ΕΗΑ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἢ ΑΕ τῇ ΕΓ.

192 κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΔ· βάσις ἄρα ἢ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΕΖ ὀρθὴ ἐστὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΔΕΖ, μείζων ἐστὶν ἢ ΔΖ τῆς ΔΕ. καὶ πάλιν ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἢ ΕΑ εὐθεῖα τῆς ΕΖ, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἢ ΕΖΑ τῆς ΕΖ περιφερείας, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΔΕ, ἢ ΔΖ ἄρα τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἢ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἢ ΔΕ τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐδείχθη, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἢ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἢ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἢ ΔΒ, αἰεὶ δὲ ἢ ἔγγιον τῆς ΔΕ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν. ἀλλὰ δὲ ἢ κάθετος πιπτέτω ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου ὥς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἢ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΘ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ αἱ ΘΖ, ΘΗ καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΚ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἢ ΖΚ εὐθεῖα τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· κοινὴ δὲ ἢ ΚΕ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΖΚΕ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἴση, καὶ βάσις ἢ ΖΕ τῇ ΗΕ ἴση.

194 ἐπεὶ οὖν ἢ ΖΕ εὐθεῖα τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΔ, βάσις ἄρα ἢ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἢ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἢ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἐκ κέντρου γάρ· κοινὴ δὲ ἢ ΚΕ, δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΑΚΕ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ· καὶ βάσις ἄρα ἢ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἢ ΑΕ εὐθεῖα τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἢ ΕΔ καὶ πρὸς ὀρθὰς, βάσις ἄρα ἢ ΔΑ τῇ ΔΓ ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἢ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΔ, βάσις ἄρα ἢ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἢ ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου πασῶν τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ ἐν τῷ γ' τῆς στοιχειώσεως τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὅταν ἢ ΕΖ ἐφάπτηται, ἔστιν ἄρα, ὥς ἢ ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἢ ΕΖ πρὸς ΕΛ. μείζων δὲ ἐστὶν ἢ ΕΖ τῆς ΕΛ· αἰεὶ γὰρ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΑΕ τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἢ ΕΖ τῆς ΕΑ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΔ, βάσις ἄρα ἢ ΔΖ τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἢ ΚΕ, δύο ἄρα αἱ ΑΚ, ΚΕ ταῖς ΕΚ, ΚΒ, τουτέστιν ὅλη τῇ ΕΚΒ, εἰσιν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἢ ΒΕ ἄρα τῆς ΑΕ μείζων ἐστίν.

196 πάλιν ἐπεὶ ἢ ΑΕ τῆς ΕΒ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΕΔ, βάσις ἄρα ἢ ΔΑ τῆς ΒΔ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἢ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων, ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἢ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἢ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἢ ΔΒ, αἰεὶ δὲ ἢ ἔγγιον καὶ τὰ ἐξῆς. ἀλλὰ δὲ ἢ κάθετος πιπτέτω ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου ὥς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς ἢ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Β, Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΘ, ΔΒ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ αἱ ΘΖ, ΘΗ καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἢ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΘΚΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. καὶ

ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΗΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τῇ ΚΓ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΚ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση.

198 ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἢ τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἴληπται σημεῖον τὸ Ε μὴ ὄν κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν ἡ ΕΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΘ, αἱ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΕΘ τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων· ὥστε ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΕ τῆς ΖΕ ἐλάσσων ἐστίν, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν ΕΖ ἔγγιον ἐστὶ τῆς ΕΘ, ἡ δὲ ΑΕ πορρωτέρω, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο αἱ ΑΚ, ΚΕ δύο ταῖς ΒΚ, ΚΕ, τουτέστιν ὅλη τῇ ΒΚΕ, εἰσιν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονες εἰσιν· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῆς ΕΑ μείζων ἐστίν. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΑ τῆς ΕΒ ἐλάσσων ἐστίν, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσεως τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ, ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΔΘ καὶ τὰ ἐξῆς. Πάσης καμπύλης γραμμῇ ς , ἥτις ἐστὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ φ , διάμετρον καλῶ καὶ τὰ ἐξῆς ς . τὸ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ εἶπε διὰ τὴν ἔλικα τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· αὗται γὰρ οὐκ εἰσὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ.

200 ὁ δὲ λέγει, τοιοῦτόν ἐστιν· ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῇ εὐθεΐαι τινες παράλληλοι αἱ ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Β εὐθεΐα ἡ ΒΛ δίχα αὐτὰς τέμνουσα. φησὶν οὖν, ὅτι τῆς ΑΒΓ γραμμῆς διάμετρον μὲν καλῶ τὴν ΒΛ, κορυφὴν δὲ τὸ Β, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΒΛ κατῆχθαι ἐκάστην τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΛ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους, ἄξων καλεῖται. Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν καὶ τὰ ἐξῆς ς . ἐὰν γὰρ νοήσωμεν τὰς Α, Β γραμμὰς καὶ ἐν αὐταῖς τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ παραλλήλους καὶ τὴν ΑΒ διηγμένην ἐφ' ἐκάτερα καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους δίχα, τὴν μὲν ΑΒ καλῶ, φησὶν, πλαγίαν διάμετρον, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ Α, Β σημεία, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων καλεῖται. ἐὰν δὲ διαχθεῖσά τις εὐθεΐα ὡς ἡ ΠΡ τὰς ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ παραλλήλους τῇ ΑΒ δίχα τέμνει, ὀρθία μὲν διάμετρος καλεῖται ἡ ΠΡ, τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν ΠΡ διάμετρον ἐκάστη τῶν ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, ἄξων ὀρθός, ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΠΡ δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, λέγονται συζυγεῖς διάμετροι, ἐὰν δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, συζυγεῖς ἄξονες ὀνομάζονται.

202 Εἰς τὸ α'. Περὶ τῶν διαφόρων καταγραφῶν ἥτοι πτώσεων τῶν θεωρημάτων τοσοῦτον ἰστέον, ὅτι πτώσις μὲν ἐστὶν, ὅταν τὰ ἐν τῇ προτάσει δεδομένα τῇ θέσει ἢ δοθέντα· ἡ γὰρ διάφορος αὐτῶν μετάληψις τοῦ αὐτοῦ συμπεράσματος ὄντος ποιεῖ τὴν πτώσιν. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς μετατιθεμένης γίνεται πτώσις. πολλὰς δὲ ἐχόντων τῶν θεωρημάτων πάσαις ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἀρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων πλὴν βραχέων, ὡς ἐξῆς εἰσόμεθα· εὐθὺς γὰρ τὸ πρῶτον θεώρημα τρεῖς πρώσεις ἔχει διὰ τὸ τὸ λαμβανόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ Β, ποτὲ μὲν εἰς τὴν κατωτέρω ἐπιφάνειαν εἶναι καὶ τοῦτο διχῶς ἢ ἄνωτέρω τοῦ κύκλου ἢ κατωτέρω, ποτὲ δὲ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῇ ἐπικειμένης. τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα προέθετο ζητῆσαι, ὅτι οὐκ ἐπὶ πάντα δύο σημεία ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λαμβανόμενα ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστίν, ἀλλ' ἡ νεύουσα μόνον ἐπὶ τὴν κορυφὴν, διὰ τὸ

καὶ ὑπὸ εὐθείας τὸ πέρας ἐχούσης μένον γεγενῆσθαι τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθές, τὸ δεύτερον θεώρημα δηλοῖ. Εἰς τὸ β'. Τὸ δεύτερον θεώρημα τρεῖς ἔχει πτώσεις διὰ τὸ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα τὰ Δ, Ε ἢ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν εἶναι ἐπιφανείας ἢ ἐπὶ τῆς κάτω διχῶς ἢ ἐσωτέρω τοῦ κύκλου ἢ ἐξωτερῶ.

204 δεῖ δὲ ἐφιστάνειν, ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα εὐρίσκεται ἔν τισιν ἀντιγράφοις ὅλον διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεδειγμένον. Εἰς τὸ γ'. Τὸ γ' θεώρημα πτώσιν οὐκ ἔχει. δεῖ δὲ ἐν αὐτῷ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐστὶ διὰ τὸ κοινὴ τομὴ εἶναι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ἥτις ὑπὸ εὐθείας ἐγράφη τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας. οὐ γὰρ πᾶσα ἐπιφάνεια ὑπὸ ἐπιπέδου τεμνομένη τὴν τομὴν ποιεῖ εὐθεῖαν, οὐδὲ αὐτὸς ὁ κῶνος, εἰ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς ἔλθῃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Εἰς τὸ δ'. Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος τρεῖς εἰσιν ὥσπερ καὶ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου. Εἰς τὸ ε'. Τὸ πέμπτον θεώρημα πτώσιν οὐκ ἔχει. ἀρχόμενος δὲ τῆς ἐκθέσεως φησιν· τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ πρὸς τὴν βάσιν ν. ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ σκαληνῷ κώνῳ κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο ποιήσομεν οὕτως· λαβόντες τὸ κέντρον τῆς βάσεως ἀναστήσομεν ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως πρὸς ὀρθὰς καὶ δι' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον ἕξομεν τὸ ζητούμενον· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ια' τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ὅτι, ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

206 τὸν δὲ κῶνον σκαληνὸν ὑπέθετο, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τὸ παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον τῷ ὑπεναντίως ἡγμένῳ τὸ αὐτὸ ἐστίν. ἔτι φησιν· τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ φ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ φ, ὑπεναντίως δὲ κείμενο ν. τοῦτο δὲ γίνεται οὕτως· ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΑΗΚ· τὸ ΑΗΚ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον μὲν ἐστίν, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΗΚ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΖΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΗΚ, ΘΖ ἐπίπεδον. τοῦτο δὲ ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον διὰ τὴν ΖΘ καὶ ποιοῦν τὸ προκείμενον. ἐν τῷ συμπεράσματί φησιν, ὅτι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΖΗ, ΕΖΚ τριγώνων ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ. δυνατόν δὲ ἐστὶ τοῦτο δεῖξαι καὶ δίχα τῆς τῶν τριγώνων ὁμοιότητος λέγοντα, ὅτι, ἐπειδὴ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΑΚΗ, ΑΔΕ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Β, ἐν τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τοῦ περιλαμβανόντος κύκλου τὰ Δ, Η, Ε, Κ σημεῖα.

208 καὶ ἐπειδὴ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΚ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσον δύνανται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ. καὶ δυνατόν μὲν ἐστὶν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐχ ἦξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον ἥτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. δεῖξομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἐπ' εὐθείας. ἔστω τις γραμμὴ ἡ ΗΘ, καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ ΗΚ, εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ ΖΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΖΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΟΠ τῷ ὑπὸ ΗΠΚ ἴσον. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΟΚ γραμμὴ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΗΚ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΘ, ΝΟ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ν, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΗΖΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΖΚ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ ΘΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ.

210

ἴσα δέ ἐστι τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ζ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμὴ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΗΚ. δυνατόν δέ ἐστι τὰς ΔΕ, ΗΚ διαμέτρους ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους εἶναι, οὐδέποτε μέντοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΝΑ τῆς ΑΚ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΗ διὰ τὴν ὑπεναντίαν τομήν. ὥστε ἡ τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴση λαμβανομένη μεταξὺ πίπτει τῶν Η, Ν σημείων. πιπτέτω ὡς ἡ ΑΞ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Ξ τῇ ΒΓ παράλληλος ἀγομένη τέμνει τὴν ΗΚ. τεμνέτω ὡς ἡ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΞΑ τῇ ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΞΑ πρὸς ΑΠ, ἡ ΚΑ πρὸς ΑΗ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΗΚΑ, ΞΑΠ τριγώνων, ἡ ΑΗ τῇ ΑΠ ἐστὶν ἴση καὶ λοιπὴ ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ξ, Κ γωνίαί ἴσαι εἰσίν· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ Β· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ο ἴσαι· κατὰ κορυφὴν γὰρ ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΗΟ τρίγωνον τῷ ΠΟΚ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ· ὥστε καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΟΚ καὶ ἡ ΗΟ τῇ ΟΠ καὶ ὅλη ἡ ΗΚ τῇ ΞΠ.

212 καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν μεταξὺ τῶν Ν, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον ὡς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ τῇ ΝΚ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΡΣ, μείζων ἔσται τῆς ΞΠ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῆς ΗΚ, ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν Η, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον οἷον τὸ Τ, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΤΠ, ἐλάττων ἔσται τῆς ΞΠ καὶ τῆς ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΞΠΚ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΞΠ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΟΠΚ τῇ ὑπὸ ΟΗΞ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΟΗΞ τῆς ὑπὸ ΗΞΟ. ἡ ΞΟ ἄρα τῆς ΟΗ μείζων καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΚΟ τῆς ΟΠ. ἐὰν δὲ ποτε ἡ ἑτέρα αὐτῶν δίχα διαιρεθῇ, ἡ λοιπὴ εἰς ἄνισα τμηθήσεται. Εἰς τὸ ζ'.

Προσέχειν χρή, ὅτι οὐ μάτην πρόσκειται ἐν τῇ προτάσει τὸ δεῖν τὴν ἀγομένην εὐθείαν ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημείου παράλληλον μιᾷ τινι τῶν ἐν τῇ βάσει εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς οὔση πάντως τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἄγεσθαι παράλληλον· τούτου γὰρ μὴ ὄντος οὐ δυνατόν ἐστιν αὐτὴν δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ὅπερ ἐστὶ φανερόν ἐκ τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. εἰ γὰρ ἡ ΜΝ, ἥτινι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖΗ, μὴ πρὸς ὀρθὰς εἴη τῇ ΒΓ, δηλόν, ὅτι οὐδὲ δίχα τέμνεται οὐδὲ ἡ ΚΛ. καὶ διὰ τῶν αὐτῶν λόγων συνάγεται, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἰς ἄνισα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ. δυνατόν δὲ κατωτέρω τοῦ κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας τὰ αὐτὰ δείκνυσθαι. Εἰς τὸ ζ'.

214 (1τ) Τὸ ζ' θεωρήμα πτώσεις ἔχει τέσσαρας· ἡ γὰρ οὐ συμβάλλει ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἢ συμβάλλει τριχῶς ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς ἢ ἐπὶ τοῦ Γ σημείου. Μετὰ τὸ ι'. Χρὴ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰ ι ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχονται. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει, ὅτι αἱ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι νεύουσαι ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐν ταύτῃ μένουσιν, τὸ δὲ δευτέρον τὸ ἀνάπαλιν, τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν, τὸ δὲ τέταρτον τὴν παράλληλον τῇ βάσει, τὸ πέμπτον τὴν ὑπεναντίαν, τὸ ἕκτον ὡσανεὶ προλαμβάνεται τοῦ ἐβδόμου δεικνύον, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς ὀφείλει πάντως εἶναι τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ ὅτι τούτου οὕτως ἔχοντος αἱ παράλληλοι αὐτῇ διχοτομοῦνται ὑπὸ τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ ἕβδομον τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς ἔδειξε καὶ τὴν διάμετρον καὶ τὰς ἐπ' αὐτὴν καταγομένας παραλλήλους τῇ ἐν τῇ βάσει εὐθείᾳ. ἐν δὲ τῷ ὀγδόῳ δείκνυσιν, ὅπερ ἐν τοῖς προλεγομένοις εἵπομεν, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἁπειρόν εἰσιν ἀξιομένων, ἐν δὲ τῷ ἐνάτῳ, ὅτι ἡ ἔλλειψις συννεύουσα εἰς ἑαυτὴν ὁμοίως τῷ κύκλῳ διὰ τὸ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτειν ἀμφοτέραις ταῖς πλευραῖς τοῦ τριγώνου οὐκ ἔστι κύκλος· κύκλους γὰρ ἐποιοῦν ἢ τε ὑπεναντία τομὴ καὶ ἡ παράλληλος· καὶ δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τέμνει καὶ τὴν βάσιν, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τὴν τε πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ λοιπῇ πλευρᾷ ἐκβαλλομένην πρὸς τῇ κορυφῇ, ἐπὶ δὲ τῆς ἔλλειψεως καὶ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν.

216 τὸ δὲ δέκατον ἀπλούστερον μὲν τις ἐπιβάλλων ἴσως ἂν οἰηθείη ταὐτὸν εἶναι τῷ δευτέρῳ, τοῦτο μέντοι οὐχ ὡς ἔχει· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐπὶ πάσης τῆς ἐπιφανείας ἔλεγε λαμβάνεσθαι τὰ δύο

σημεῖα, ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῆς γενομένης γραμμῆς. ἐν δὲ τοῖς ἐξῆς τρισὶν ἀκριβέστερον ἐκάστην τῶν τομῶν τούτων διακρίνει μετὰ τοῦ λέγειν καὶ τὰ ἰδιώματα αὐτῶν τὰ ἀρχικά. Εἰς τὸ ια'.

Πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑ Γ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ· σαφὲς μὲν ἔστι τὸ λεγόμενον, πλὴν εἴ τις καὶ ὑπομνησθῆναι βούλεται. ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΟΠΡ, τῷ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΠΡ παραβληθὲν πλάτος ποιεῖτω τὴν ΠΣ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ· γέγονεν ἄρα τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ, ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ, τὸ ΣΡ πρὸς ΡΟ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ. τοῦτο χρησιμεύει καὶ τοῖς ἐξῆς δύο θεωρήμασιν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς Β Α· δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἔκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸν ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν ἐλέγετο, ἐζητήσαμεν αὐτὸ καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεωρήμα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως· οὐ χεῖρον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι διὰ τὸ μὴ πάντως τοὺς ἀναγινώσκοντας κάκεινους ἐντυγχάνειν, καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ.

218 λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ παρώννυμός ἐστιν ὁ λόγος. ἐπὶ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι τὴν πηλικότητα, ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι καὶ μόριον ἢ μόρια, εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀρρήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέθη. ἐπὶ πασῶν δὲ τῶν σχέσεων δῆλον, ὅτι αὐτὴ ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἐπόμενον ὅρον τοῦ λόγου ποιεῖ τὸν ἡγούμενον. ἔστω τοίνυν λόγος ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ εἰλήφθω τις αὐτῶν μέσος, ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ, καὶ ἔστω τοῦ Α, Γ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ Γ, Β ὁ Ε, καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιεῖτω.

220 λέγω, ὅτι τοῦ λόγου τῶν Α, Β πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ, τουτέστιν ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ δὲ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Γ πρὸς τὸν Η. ἐναλλάξ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἦν δέ, ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ, ὁ Ζ πρὸς τὸν Α· ἴσος ἄρα ὁ Η τῷ Α. ὥστε ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖσθαι τοῦτο· οἷ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι μαθηματικαῖς μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστιν. λόγοι γὰρ καὶ πηλικότητες λόγων καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι, κατὰ τὸν εἰπόντα· ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά. Εἰς τὸ ιγ'.

222 (1τ) Δεῖ σημειώσασθαι, ὅτι τοῦτο τὸ θεωρήμα τρεῖς ἔχει καταγραφάς, ὡς καὶ πολλάκις εἴρηται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως· ἡ γὰρ ΔΕ ἢ ἀνωτέρω τοῦ Γ συμπίπτει τῇ ΑΓ ἢ κατ' αὐτοῦ τοῦ Γ ἢ ἐξωτέρω ἐκβαλλομένη τῇ ΑΓ συμπίπτει. Εἰς τὸ ιδ'. Δυνατὸν ἦν καὶ οὕτως δεῖξαι, ὅτι, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΤΟ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΟ, ἔστιν, ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΑ, ἡ ΕΤ πρὸς ΤΑ, καὶ διὰ τὰ αὐτά, ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ, ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΣ πρὸς ΣΒ, ἡ ΕΤ πρὸς ΤΟ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΣΒ, τὸ ἀπὸ ΕΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΤΟ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΓ, τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ἀπὸ

ΞΤ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. καὶ ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ἢ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ, ἢ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ἢ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ἢ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΠ τῇ ΘΡ. πτωσιν μὲν οὖν οὐκ ἔχει, φανερὸς δὲ ἐστὶν ὁ σκοπὸς συνεχῆς ὦν τοῖς πρὸ αὐτοῦ τρισίν· ὁμοίως γὰρ ἐκείνοις τὴν διάμετρον τῶν ἀντικειμένων ζητεῖ τὴν ἀρχικὴν καὶ τὰς παρ' αὐτῶν δύνανται. Εἰς τὸ ις'.

224 (1τ) Ἰσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ΚΑ τῇ Β Λ· ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ ἐστὶν ἴσον, ἀνάλογον ἔσται, ὡς ἢ ΚΒ πρὸς ΑΛ, ἢ ΛΒ πρὸς ΑΚ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἢ ΚΒ πρὸς ΒΛ, ἢ ΛΑ πρὸς ΑΚ· καὶ συνθέντι, ὡς ἢ ΚΛ πρὸς ΛΒ, ἢ ΛΚ πρὸς ΚΑ· ἴση ἄρα ἢ ΚΑ τῇ ΒΛ. δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῷ πεντεκαίδεκάτῳ καὶ ἐκκαίδεκάτῳ θεωρήματι σκοπὸν ἔσχε ζητῆσαι τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἥτοι τῶν ἀντικειμένων· ἢ γὰρ παραβολῇ οὐκ ἔχει τοιαύτην διάμετρον. παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ μὲν τῆς ἐλλείψεως διάμετροι ἐντὸς ἀπολαμβάνονται, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτός. καταγράφοντας δὲ δεῖ τὰς μὲν παρ' αὐτῶν δύνανται ἥτοι τὰς ὀρθίας πλευρὰς πρὸς ὀρθὰς τάττειν καὶ δηλονότι καὶ τὰς παραλλήλους αὐταῖς, τὰς δὲ τεταγμένως καταγομένας καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους οὐ πάντως· μάλιστα γὰρ ἐν ὀξείᾳ γωνίᾳ δεῖ κατάγειν αὐτάς, ἵνα σαφεῖς ὦσιν τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἔτεροι οὔσαι τῶν παραλλήλων τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ. Μετὰ τὸ ἐκκαίδεκατον θεωρήμα ὅρους ἐκτίθεται περὶ τῆς καλουμένης δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, οὓς διὰ καταγραφῆς σαφεῖς ποιήσομεν. ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω ἢ ΓΒΔ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΒΓ καταγόμεναι ἢ ΒΕ.

226 φανερόν οὖν, ὅτι ἢ μὲν ΒΓ εἰς ἄπειρον αὖξεται διὰ τὴν τομὴν, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ὀγδόῳ θεωρήματι, ἢ δὲ ΒΔ, ἣτις ἐστὶν ἢ ὑποτείνουσα τὴν ἐκτὸς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γωνίαν πεπέρασται. ταύτην δὴ διχοτομοῦντες κατὰ τὸ Ζ καὶ ἀγαγόντες ἀπὸ τοῦ Α τεταγμένως κατηγμένην τὴν ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΗ παράλληλον τὴν ΘΖΚ καὶ ποιήσαντες τὴν ΘΖ τῇ ΖΚ ἴσην, ἔτι μέντοι καὶ τὸ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, ἔξομεν τὴν ΘΚ δευτέραν διάμετρον. τοῦτο γὰρ δυνατόν διὰ τὸ τὴν ΘΚ ἐκτὸς οὔσαν τῆς τομῆς εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι καὶ δυνατόν εἶναι ἀπὸ τῆς ἀπείρου προτεθείσης εὐθείᾳ ἴσην ἀφελεῖν. τὸ δὲ Ζ κέντρον καλεῖ, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίως αὐτῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τομὴν φερομένας ἐκ τοῦ κέντρου. ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων· καὶ φανερόν, ὅτι πεπερασμένη ἐστὶν ἑκάτερα τῶν διαμέτρων, ἢ μὲν πρώτη αὐτόθεν ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἢ δὲ δευτέρα, διότι μέση ἀνάλογόν ἐστι πεπερασμένων εὐθειῶν τῆς τε πρώτης διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως οὕτω δῆλον τὸ λεγόμενον. ἐπειδὴ γὰρ εἰς ἑαυτὴν συννεύει, καθάπερ ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς ἀπολαμβάνει πάσας τὰς διαμέτρους καὶ ὠρισμένας αὐτάς ἀπεργάζεται· ὥστε οὐ πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ μέση ἀνάλογον τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς τομῆς περατοῦται· δυνατόν δὲ αὐτὴν συλλογίζεσθαι δι' αὐτῶν τῶν εἰρημένων ἐν τῷ πεντεκαίδεκάτῳ θεωρήματι.

228 ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐκεῖ δέδεικται, αἱ ἐπὶ τὴν ΔΕ καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΒ δύνανται τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν τρίτην αὐταῖς ἀνάλογον γινομένην, τουτέστι τὴν ΖΔ, ἔστιν, ὡς ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΑΒ, ἢ ΑΒ πρὸς ΔΖ· ὥστε μέση ἀνάλογόν ἐστὶν ἢ ΑΒ τῶν ΕΔ, ΔΖ. καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΒ παράλληλοι τῇ ΔΕ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενα τῶν ΔΕ, ΑΒ, τουτέστι τὴν ΑΝ. διὰ δὲ τοῦτο μέση ἀνάλογον γίνεται ἢ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ΒΑ, ΑΝ τοῦ εἴδους πλευρῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι καὶ τοῦτο διὰ τὸ εὐχρηστον τῶν καταγραφῶν· ἐπεὶ γὰρ ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΕ διάμετροι· ἐν μόνῳ γὰρ τῷ κύκλῳ ἴσαι εἰσὶν· δῆλον, ὅτι ἢ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ ἐλάσσονι αὐτῶν ὡς ἐνταῦθα ἢ ΔΖ ἅτε τρίτη ἀνάλογον οὔσα τῶν ΔΕ, ΑΒ μείζων ἐστὶν ἀμφοῖν, ἢ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ μείζονι ὡς ἐνταῦθα ἢ ΑΝ

διὰ τὸ τρίτην ἀνάλογον εἶναι τῶν AB, ΔΕ ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοῖν· ὥστε καὶ συνεχῶς εἶναι τὰς τέσσαρας ἀνάλογον· ὡς γὰρ ἡ AN πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΕ πρὸς AB καὶ ἡ AB πρὸς ΔΖ. Εἰς τὸ ιζ'. Ὁ μὲν Εὐκλείδης ἐν τῷ πεντεκαίδεκάτῳ θεωρήματι τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως ἔδειξεν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἐκτός τε πίπτει καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τούτῳ καθολικόν τι δείκνυσι δυνάμενον ἐφαρμόσαι ταῖς τρισὶ τοῦ κώνου καὶ τῷ κύκλῳ.

230 τοσοῦτον διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ὅτι ἐπ' ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμένως κατηγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἄγονται τῇ διαμέτρῳ· οὐδὲ γὰρ ἄλλαι εὐθεῖαι παράλληλοι ἐαυταῖς ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου διχοτομοῦνται· ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν τομῶν οὐ πάντως πρὸς ὀρθὰς ἄγονται, εἰ μὴ ἐπὶ μόνους τοὺς ἄξονας. Εἰς τὸ ιη'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεωρήμα τοῦτο ἐπὶ μόνῃ παραβολῇ καὶ ὑπερβολῇ ἐστίν, κάλλιον δὲ καθολικώτερον ἔχειν τὴν πρότασιν, εἰ μὴ ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐκείνοις ὡς ἀναμφίβολον παραλέλειπται· ἡ γὰρ ΓΔ ἐντὸς οὕσα τῆς τομῆς πεπερασμένης οὕσης καὶ αὐτὴ κατ' ἀμφοτέρα τέμνει τὴν τομὴν. δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι, καὶ ἡ AZB τέμνει τὴν τομὴν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἀρμόζει. Εἰς τὸ κ'. Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος ἀρχόμενος ἐφεξῆς ἐν πᾶσι τὰ συμπτώματα τῆς παραβολῆς αὐτῇ δείκνυσιν ὑπάρχοντα καὶ οὐκ ἄλλη τινί, ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ τῇ ἐλλείψει καὶ τῷ κύκλῳ τὰ αὐτὰ δείκνυσιν ὑπάρχοντα. ἐπειδὴ δὲ οὐκ ἄχρηστον φαίνεται τοῖς τὰ μηχανικὰ γράφουσι διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων καὶ πολλάκις διὰ συνεχῶν σημείων γράφειν τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος ἔστι πορίσασθαι συνεχῇ σημείᾳ, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολὴ κανόνος παραθέσει.

232 ἐὰν γὰρ ἐκθῶμαι εὐθεῖαν ὡς τὴν AB καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβω συνεχῇ σημείᾳ ὡς τὰ E, Z καὶ ἀπ' αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ AB καὶ ποιήσω ὡς τὰς ΕΓ, ΖΔ λαβὼν ἐπὶ τῆς ΕΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, εἰ μὲν εὐρυτέραν βουλευθείην ποιῆσαι παραβολήν, πόρρω τοῦ E, εἰ δὲ στενωτέραν, ἐγγύτερον, καὶ ποιήσω, ὡς τὴν AE πρὸς AZ, τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὰ Γ, Δ σημεία ἐπὶ τῆς τομῆς ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα ληψόμεθα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολή. Εἰς τὸ κα'. Τὸ θεωρήμα σαφῶς ἔκκειται καὶ πτωσὶν οὐκ ἔχει· δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ παρ' ἣν δύνανται, τουτέστιν ἡ ὀρθία πλευρά, ἐπὶ τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. εἰ γὰρ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ AEB, ἡ ΓΑ πρὸς AB, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ AEB ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΑ τῇ AB. δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι αἱ καταγόμεναι ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς ὀρθὰς εἰσι πάντως τῇ διαμέτρῳ καὶ ἐπ' εὐθείας γίνονται ταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΓ. διὰ δὲ τούτου τοῦ θεωρήματος τῷ αὐτῷ τρόπῳ τοῖς ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἰρημένοις προσέχοντες γράφομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν κανόνος παραθέσει.

234 ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα ἡ AB καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' ἁπειρον ἐπὶ τὸ H, καὶ ἀπὸ τοῦ A ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεία ἐπὶ τῆς ΑΗ τὰ E, H, καὶ ἀπὸ τῶν E, H τῇ ΑΓ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ, καὶ γινέσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΑΗΚ ἴσον τὸ ἀπὸ ΖΗ, τῷ δ' ὑπὸ ΑΕΘ ἴσον τὸ ἀπὸ ΔΕ· διὰ γὰρ τῶν A, Δ, Z ἥξει ἡ ὑπερβολή. ὁμοίως δὲ κατασκευάσομεν καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως. Εἰς τὸ κγ'. δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῇ προτάσει δύο διαμέτρους λέγει οὐχ ἀπλῶς τὰς τυχούσας, ἀλλὰ τὰς καλουμένας συζυγεῖς, ὧν ἑκατέρα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦκται καὶ μέσον λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἵδους πλευρῶν τῆς ἐτέρας διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ιε' θεωρήματι. εἰ γὰρ μὴ οὕτως ληφθῇ, συμβήσεται τὴν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν δύο διαμέτρων τῇ ἐτέρᾳ αὐτῶν παράλληλον εἶναι· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ἐπειδὴ δὲ τὸ H ἔγγιόν ἐστι τῆς διχοτομίας τῆς AB ἢ περ τὸ Θ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ BHA μετὰ τοῦ ἀπὸ HM ἴσον τῷ ἀπὸ AM, τὸ δὲ ὑπὸ AΘB μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘM ἴσον τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἀπὸ ΘM τοῦ ἀπὸ HM μείζον, τὸ ἄρα ὑπὸ BHA μείζον τοῦ ὑπὸ BΘA.

236 Εἰς τὸ κε'. Ἐν τισι φέρεται καὶ αὕτη ἡ ἀπόδειξις· εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΘ· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ ΔΓ· ὥστε καὶ ἡ ΖΕ. πάλιν δὴ εἰλήφθω, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ ΒΑ ἐκβαλλομένη· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ. Εἰς τὸ κς'. Τὸ θεώρημα τοῦτο πτώσεις ἔχει πλείους, πρῶτον μὲν, ὅτι ἡ ΕΖ ἢ ἐπὶ τὰ κυρτὰ μέρη τῆς τομῆς λαμβάνεται ὡς ἐνταῦθα ἢ ἐπὶ τὰ κοῖλα, ἔπειτα, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἔσω μὲν καθ' ἓν σημεῖον συμβάλλει ἀδιαφόρως τῇ διαμέτρῳ ἀπείρῳ οὔσῃ, ἔξω δὲ οὔσα καὶ μάλιστα ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει θέσιν ἢ ἐξωτέρῳ τοῦ Β ἢ ἐπὶ τοῦ Β ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β. Εἰς τὸ κς'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τοῦ κς' θεωρήματος φέρεται τοιαύτη ἀπόδειξις· ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ταύτην τεμνέτω εὐθεΐα τις ἡ ΗΔ ἐντὸς τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ ΗΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

238 ἦχθω γάρ τις διὰ τοῦ Α παρατεταγμένως ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. ἦτοι δὴ ἡ ΗΔ τῇ ΑΕ παράλληλός ἐστιν ἢ οὐ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν, αὕτη τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα, ἐπεὶ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, συμπεσεῖται τῇ τομῇ. μὴ ἔστω δὴ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη συμπίπτέτω τῇ ΑΕ κατὰ τὸ Ε ὡς ἡ ΗΔΕ. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη συμπίπτει, ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ Ε, δῆλον· εἰ γὰρ τῇ ΑΕ συμβάλλει, πολὺ πρότερον τεμεῖ τὴν τομὴν. λέγω, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ ΜΑ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἡ ΑΖ· ἡ ΜΑ ἄρα τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τῶν Μ, Ζ τῇ ΑΒ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΖΚ, ΜΝ· τετραπλεύρου οὖν ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ καὶ θέσει οὔσης τῆς ΛΑ ἦχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ ΓΚΗ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΑΜ παράλληλος ἦχθω ἡ ΞΒΝ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΔΓΒ τρίγωνον· παράλληλος γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΒ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΓΕ, ΑΒ· ὡς δὲ ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ, τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΞ παραλληλόγραμμον, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΔΒ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΞΒΒ παραλληλόγραμμον· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΓΔΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΞΒΒ παραλληλόγραμμον.

240 ἴσον δέ ἐστι τὸ ΖΑΒΞ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΒΔ τριγώνῳ· ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΗΚ τρίγωνον τῷ ΑΛΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΗΔΒΚ τετράπλευρον, τὸ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· τὸ δὲ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΑΒΞ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΒ, ΖΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔΒ τρίγωνον τῷ ΞΖΑΒ παραλληλογράμμῳ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ τῷ ΑΜΝΒ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ ΜΑΒΝ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΑΒ· ἡ γὰρ ΜΑ πρὸς ὀρθάς ἐστὶ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΒ καὶ ἐστὶν ἡ ΜΑ ὀρθία τοῦ εἵδους πλευρά, ἡ δὲ ΑΒ διάμετρος, καὶ ἡ ΓΒ τεταγμένως παράλληλος γὰρ ἐστὶ τῇ ΑΕ· τὸ Γ ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστὶν. ἡ ΔΗΓ ἄρα συμβάλλει τῇ τομῇ κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. σχόλια εἰς τὸ προτεθὲν θεώρημα. πεποιήσθω δὴ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ τοῦτο δέδεικται ἐν σχολίῳ τοῦ ια' θεωρήματος. ἀναγράψας γὰρ τὸ ἀπὸ ΑΕ καὶ παρὰ τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ἴσον παραβαλὼν ἔξω τὸ ζητούμενον. εἰς τὸ αὐτό.

242 (1t) τετραπλεύρου ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ ἦχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ ἀποτέμνουσα τὸ ΓΗΚ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον τοῦτο δὲ ποιήσομεν οὕτως· ἐὰν γάρ, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ὅμοιον τὸ αὐτὸ συστησώμεθα τὸ ΣΤΥ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΣΥ τῇ ΑΔ, καὶ ἀπολάβωμεν τῇ μὲν ΣΥ ἴσην τὴν ΗΚ, τῇ δὲ ΤΥ ἴσην τὴν ΗΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΚ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Υ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Δ, τουτέστι τῇ Η, διὰ τοῦτο ἴσον καὶ ὅμοιον

τὸ ΓΗΚ τῷ ΣΤΥ. καὶ ἴση ἡ Γ γωνία τῇ Ε, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΑΕ. φανερόν δὴ, ὅτι, ὅταν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν, ἡ ΜΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ὅταν δὲ μὴ ἄξων, τέμνει, εἰ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται πάντως τῇ διαμέτρῳ. Εἰς τὸ κη'. Ὅτι, κἂν ἡ ΓΔ τέμνη τὴν ὑπερβολήν, τὰ αὐτὰ συμβήσεται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ ὀκτωκαιδεκάτου. Εἰς τὸ λ'. Καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι ἐπὶ μὲν οὖν τῆς ἐλλείψεως ἐροῦμεν· ἐπειδὴ ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, δι' ἴσου, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· συνθέντι, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ· ἡ γὰρ ΑΒ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ.

244 ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων· ἐπεὶ ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, διότι δι' ἴσου, ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ, τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ· ἀναστρέψαντι, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται ἡ ΖΑ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΖ τοῦ ὑπὸ ΒΖΑ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΑΓ, καὶ καλῶς εἴρηται τὸ ἀναστρέψαντι. Εἰς τὸ λα'. Διελόντι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΒΗ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΗ τοῦ ὑπὸ ΑΗΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. διὰ δὲ τὴν αὐτὴν αἰτίαν καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ὑπὸ ΑΘΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε ὀρθῶς εἴρηται τὸ διελόντι.

246 Εἰς τὸ λβ'. Ἐν τῷ ἑπτακαιδεκάτῳ θεωρήματι ἀπλούστερον ἔδειξεν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τὴν κατηγμένην τεταγμένως ἀγομένη ἐφάπτεται, ἐνταῦθα δὲ τὸ ἐν τοῖς στοιχείοις ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου δεδειγμένον καθολικώτερον ἐπὶ πάσης κώνου τομῆς ὑπάρχον ἐπιδείκνυσι. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅπερ κάκεῖ ἐδείχθη, ὅτι καμπύλην μὲν ἴσως γραμμὴν οὐδὲν ἄτοπόν ἐστίν ἐμπίπτειν μετὰ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, εὐθεῖαν δὲ ἀμήχανον· τεμεῖ γὰρ αὕτη τὴν τομὴν καὶ οὐκ ἐφάπτεται· δύο γὰρ ἐφαπτομένας εὐθείας κατὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀδύνατον. πολυτρόπως δεδειγμένου τούτου τοῦ θεωρήματος ἐν διαφόροις ἐκδόσεσιν ἡμεῖς τὴν ἀπόδειξιν ἀπλουστέραν καὶ σαφεστέραν ἐποιήσαμεν. Εἰς τὸ λδ'. Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΓΔ κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὰς ΔΒ, ΔΑ ὀρίζουσα τὴν ΒΑ καταλιμπάνει ὀφείλουσαν τμηθῆναι εἰς τὸν τῶν ΒΔΑ λόγον, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἀνάπαλιν τὴν ΒΑ τέμνουσα εἰς ὠρισμένον λόγον τὸν τῶν ΒΔΑ ἐπιζητεῖν ἡμᾶς ποιεῖ τὸν τῶν ΒΕ, ΕΑ· οὐδὲν γὰρ δυσχερὲς λόγου δοθέντος ἴσον αὐτῷ πορίσασθαι. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι καθ' ἑκάστην τομὴν καταγραφὰ εἰσι δύο τοῦ Ζ σημείου ἢ ἐσωτέρω τοῦ Γ λαμβανομένου ἢ ἐξωτέρω· ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις ἕξ.

248 χρῆται δὲ καὶ δύο λήμμασιν, ἅπερ ἐξῆς γράψομεν. μείζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΝΞ τοῦ ὑπὸ ΑΟΞ· ἡ ΝΟ ἄρα πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΝΞ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ, γινέσθω τῷ ὑπὸ ΑΝ, ΝΞ ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς ΑΟ καὶ ἄλλης τινὸς τῆς ΞΠ, ἣτις μείζων ἔσται τῆς ΞΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΠ. ἡ δὲ ΝΞ πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν ΞΠ· καὶ ἡ ΟΑ ἄρα πρὸς ΑΝ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ. φανερόν δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅτι, κἂν ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχη ἥπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ, τὸ ὑπὸ ΞΝ, ΝΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ. γινέσθω γὰρ, ὡς ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς μείζονα δηλονότι τῆς ΞΟ ὡς τὴν ΞΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΞΝ, ΝΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΟ, ΞΠ· ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΞΝ, ΝΑ τοῦ ὑπὸ ΑΟ, ΟΞ. εἰς τὸ αὐτό. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΚ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΑΝ, ΕΓ, ΚΒ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΕΓ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΒ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΒ, δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΑΝ πρὸς ΚΒ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ.

- 250 ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ· δι' ἴσου ἄρα, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝ, ΚΒ, τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἀνάπαλιν, ὥς τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ. Εἰς τὸ λζ'. Διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων φανερόν, ὅπως ἐστὶ δυνατόν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν. Εἰς τὸ λη'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεωρήμα τοῦτο ἐπὶ μόνῃς τῆς ὑπερβολῆς εὐρίσκεται δεδειγμένον, καθολικῶς δὲ ἐνταῦθα δέδεικται· τὰ γὰρ αὐτὰ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν. καὶ τῷ Ἀπολλωνίῳ δὲ δοκεῖ μὴ μόνον τὴν ὑπερβολήν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἔλλειψιν ἔχειν δευτέραν διάμετρον, ὥς πολλάκις αὐτοῦ ἠκούσαμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσιν. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως πῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τρεῖς· τὸ γὰρ Ζ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἐφαπτομένη τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, ἢ κατωτέρῳ τοῦ Δ ἐστὶν ἢ ἐπὶ τοῦ Δ ἢ ἀνωτέρῳ τοῦ Δ, καὶ διὰ τοῦτο τὸ Θ ὁμοίως αὐτῷ τρεῖς ἔξει τόπους, καὶ προσεκτέον, ὅτι, εἴτε κατωτέρῳ πέσῃ τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται κατωτέρῳ, εἴτε τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Γ, εἴτε ἀνωτέρῳ τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται ἀνωτέρῳ.
- 252 Εἰς τὸ μα'. Τὸ θεωρήμα τοῦτο ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν ἡ καταγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πίπτῃ, τὰ δὲ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδος ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἶδει. ἔστω γὰρ ἔλλειψις, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον τὸ Δ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τε τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΑΔ εἶδη ἰσογώνια τὰ ΑΖ, ΔΗ, ἐχέτω δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΗ. ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ ῥητῷ δέδεικται, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ΔΗ, φημί, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ, οὕτως τὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΗ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ ΔΗ. Εἰς τὸ μβ'. Τὸ θεωρήμα τοῦτο ἔχει πτώσεις ἰα, μίαν μὲν, εἰ ἐσωτέρῳ λαμβάνοιτο τὸ Δ τοῦ Γ· δῆλον γάρ, ὅτι καὶ αἱ παράλληλοι ἐσωτέρῳ πεσοῦνται τῶν ΑΓΘ.
- 254 ἐτέρας δὲ πέντε οὕτως· ἐὰν τὸ Δ ἐξωτέρῳ ληφθῇ τοῦ Γ, ἡ μὲν ΔΖ παράλληλος δηλονότι ἐξωτέρῳ πεσεῖται τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β ἢ ἐπὶ τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ ἢ ἐπὶ τὸ Θ ἢ ἐξωτέρῳ τοῦ Θ· τοῦ γὰρ Α ἐξωτέρῳ πεσεῖν αὐτὴν ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ Δ ἐξωτέρῳ ἐστὶ τοῦ Γ καὶ δηλονότι καὶ ἡ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀγομένη τῇ ΑΓ. ἐὰν δὲ τὸ Δ ἐπὶ τὰ ἔτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, ἡ ἀμφοτέραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ τῶν Θ, Β περατωθήσονται, ἢ ἡ μὲν ΔΖ ἐσωτέρῳ τοῦ Θ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Θ, ἢ τῆς ΔΖ ὡσαύτως μενούσης τὸ Ε ἐξωτέρῳ τοῦ Θ ἐλεύσεται· τοῦ δὲ Ε πάλιν ἐξωτέρῳ πίπτοντος τὸ Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται, ὥς εἶναι τὴν ΓΘΔ μίαν εὐθείαν, εἰ καὶ μὴ σώζεται κυρίως τότε τὸ τῆς παραλλήλου ἰδίωμα, ἢ ἐξωτέρῳ τοῦ Θ. δεῖ δὲ ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν τελευταίων πέντε πτώσεων τὴν ΔΖ ἐκβάλλειν ἕως τῆς τομῆς καὶ τῆς ΗΓ παραλλήλου καὶ οὕτως ποιεῖσθαι τὴν ἀπόδειξιν. δυνατόν δὲ καὶ ἄλλην μίαν καταγραφὴν ἐπινοεῖν ἐκ τούτων, ὅταν δὴ λαμβανομένου ἐτέρου σημείου αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι ποιῶσι τὸ λεγόμενον, ἀλλὰ τοῦτο θεωρήμα μᾶλλον ἐστὶν ἢ πτώσις. Εἰς τὸ μγ'. Ἐν τισι φέρεται ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου τοιαύτη· ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ, ἔστιν ἄρα, ὥς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΒ, ἢ ΓΒ πρὸς ΓΔ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ.
- 256 ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ὥς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ὥς ἄρα τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον, τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον. ἴσον ἄρα τὸ ΕΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΛ. καὶ ὥς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἀναστρέψαντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ διελόντι, [ὥς] τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον, οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΛΒΖ τετραπλεύρῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς διελόντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ

ἀνάπαλιν ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον. ὁμοίως δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, οὕτως τὸ ΛΓΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ τετράπλευρον· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΚΜ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ, τὸ ἀπὸ EZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ EZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΗΘΚ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΕΛΒΖ, οὕτως τὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΕΛΒΖ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ τῷ ΜΛΒΚ τετραπλεύρῳ.

258 τὸ ἄρα ΜΓΚ τρίγωνον τοῦ ΗΘΚ διαφέρει τῷ ΛΒΓ. ἐπιστῆσαι δεῖ ταύτη τῇ δεῖξει· ὀλίγην γὰρ ἀσάφειαν ἔχει ἐν ταῖς ἀναλογίαις τῆς ἐλλείψεως· ἵνα τὰ διὰ τὴν συντομίαν τοῦ ῥητοῦ ὁμοῦ λεγόμενα διηρημένως ποιήσωμεν, οἷον—φησὶ γάρ· ἐπεὶ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΒΓ, ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν—ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, τὸ ΛΒΓ πρὸς τὸ ΕΖΓ· ἀναστρέψαντι, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ AZB, τουτέστιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Γ τῆς AB, οὕτως τὸ ΛΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον· ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον. ἔχει δὲ πτώσεις ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ια, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν, ὅταν τὸ ἐπὶ τοῦ Η λαμβανόμενον σημεῖον ταυτόν ᾗ τῷ Ε· τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ΕΔΖ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΛΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ΓΕΖ· δέδεικται μὲν γὰρ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΛΒΖΕ τοῦ ΓΖΕ τριγώνου διαφέρει τῷ ΛΒΓ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἢ ταυτόν ἐστι τὸ Η τῷ Ε ἢ ἐσωτέρω λαμβάνεται τοῦ Ε· καὶ δῆλον, ὅτι ἀμφοτέραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ πεσοῦνται τῶν Δ, Ζ, ὡς ἔχει ἐν τῷ ῥητῷ.

260 εἰ δὲ ἐξωτέρω ληφθῇ τὸ Η τοῦ Ε, καὶ ἡ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πέση τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ σημεῖον ποιεῖ πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Δ, Β πίπτει ἢ ἐπὶ τὸ Β ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ. ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ κατηγμένη παράλληλος ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ πάλιν σημεῖον ποιήσει ἄλλας πέντε πτώσεις ὡσαύτως· καὶ δεῖ ἐπὶ τούτῳ σημειώσασθαι, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ταῖς ΕΔ, ΕΖ γιγνόμενον τρίγωνον ἴσον γίνεται τῷ ΛΒΓ τριγώνῳ· ἐπεὶ γάρ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ EZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ· ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ EZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ, τὸ ὑπὸ BZA πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ, ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, τὸ ὑπὸ BZA πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ BZA πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἐδείχθη ἔχον τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, τὸ ΛΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΛΒΓ τρίγωνον. καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἄλλως δὲ ταύτας δυνατὸν δεῖξαι λέγοντας, ὅτι ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων ταῦτα δέδεικται ἐν τῷ σχολίῳ τοῦ μα' θεωρήματος. ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη μεταξὺ πέση τῶν Γ, Α, ἐκβληθήσεται μὲν, ἕως ὅτε ἡ ΓΕ αὐτῇ συμπίπτῃ, τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Δ ἢ ἐπὶ τὸ Β πίπτει ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α· καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ΛΒΓ, ΗΘΚ τριγώνων κατωτέρω συνίστασθαι τῆς AB εὐθείας ὑπὸ τῆς ΛΓ ἐκβαλλομένης.

262 ἐὰν δὲ τὸ Η ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίπτῃ τῶν Β, Ζ, ἐκβληθήσεται μὲν διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἕως οὗ τέμῃ τὴν ΛΓ, τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ζ ἢ μεταξὺ ὄν τῶν Β, Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Ζ πίπτει ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἐπὶ τὸ Ζ πίπτῃ, ὥστε μίαν εὐθεῖαν εἶναι τὴν ΕΖΗ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ ποιήσει πτώσεις· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Γ ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις τρεῖς ἢ μεταξὺ πίπτει τῶν Γ, Α ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α· καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβήσεται

πάλιν τὸ ΗΘΚ τρίγωνον ἴσον γίνεσθαι τῷ ΛΒΓ τριγώνῳ. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α πεσεῖται ἢ ἐπὶ τὸ Α ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. συμβαίνει οὖν ἐπὶ τινος ἐλλείψεως τὰς πάσας πτώσεις εἶναι μβ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου δὲ περιφερείας τοσαύτας, ὡς εἶναι τὰς πάσας πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ρς .

264 Εἰς τὸ μδ'. Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ ἐπεὶ γὰρ ὑπερβολὴ ἐστιν ἡ ΑΖ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ καὶ κατηγμένη ἡ ΖΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ἀπὸ ΓΑ διὰ τὸ λζ' θεωρημα· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΞΓΔ τῷ ὑπὸ ΓΒ ἐστιν ἴσον. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ὑπὸ ΞΓΔ. καὶ ἐστιν ἡ ΟΓ τῇ ΓΞ ἴση· καὶ ἡ ΗΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστιν ἴση· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΓΕ διὰ τὸ λ'. αἱ ἄρα ΖΓΗ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ΕΓΔ. καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς πρὸς τῷ Γ· κατὰ κορυφὴν γάρ. ὥστε καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ ἐστιν ἴση καὶ ἡ ὑπὸ ΓΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΕΔ. αἱ πτώσεις αὐτοῦ ιβ εἰσιν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐν τῷ μγ' ἔχει, καὶ ἡ ἀποδείξις ἡ αὐτή. Εἰς τὸ με'. Ἐπιστῆσαι χρὴ τῷ θεωρήματι τούτῳ πλείους ἔχοντι πτώσεις. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει· τὸ γὰρ ἀντὶ τοῦ Β λαμβανόμενον σημεῖον ἢ ταυτόν ἐστὶ τῷ Α ἢ ταυτόν τῷ Γ· τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΓΔΛ ταυτόν εἶναι τῷ ἀποτεμνομένῳ τριγώνῳ ὑπὸ τῶν παραλλήλων ταῖς ΔΛΓ.

266 ἐὰν δὲ μεταξὺ ληφθῇ τὸ Β σημεῖον τῶν Α, Γ, καὶ τὰ Δ, Α ἀνωτέρω ὧσι τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, γίνονται πτώσεις τρεῖς· τὰ γὰρ Ζ, Ε ἢ ἀνωτέρω τῶν περάτων φέρονται ἢ ἐπ' αὐτὰ ἢ κατωτέρω. ἐὰν δὲ τὰ Δ, Α ἐπὶ τὰ πέρατα ὧσι τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε κατωτέρω ἐνεχθήσονται. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ τὸ Β, [καὶ] ἡ ΘΓ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβληθήσεται, συμβαίνει δὲ οὕτως γίνεσθαι ἄλλας πτώσεις τρεῖς· τοῦ γὰρ Δ σημείου ἢ ἀνωτέρω φερομένου τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἐπ' αὐτὸ ἢ κατωτέρω καὶ τὸ Ζ ὁμοίως φερόμενον ποιήσει τὰς τρεῖς πτώσεις. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς τομῆς ληφθῇ τὸ Β σημεῖον, ἢ μὲν ΓΘ ἐκβληθήσεται ἐπὶ τὸ Θ διὰ τὴν ἀποδείξιν, αἱ δὲ ΒΖ, ΒΕ ποιοῦσι πτώσεις τρεῖς, ἐπειδὴ τὸ Α ἐπὶ τὸ πέραν φέρεται τῆς δευτέρας διαμέτρου ἢ ἀνωτέρω ἢ κατωτέρω. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας οὐδὲν ποικίλον ἐροῦμεν, ἀλλὰ ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι θεωρήματι ἐλέχθη· ὡς εἶναι τὰς πτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου ρδ . δύναται δὲ τὰ τῆς προτάσεως δείκνυσθαι καὶ ἐπὶ ἀντικειμένων.

268 Εἰς τὸ μζ'. Τοῦτο τὸ θεωρημα πτώσεις ἔχει πλείους, ἃς δεῖξομεν προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μβ'. ὑποδείγματος δὲ χάριν, ἐὰν τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Β πίπτοιτο, αὐτόθεν ἐροῦμεν· ἐπεὶ τὸ ΒΔΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΒΔΜ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΝΜΔΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΝΜ τῷ ΝΘΒ ἐστιν ἴσον. ἐπὶ δὲ τῆς λοιπῆς ἐροῦμεν· ἐπειδὴ τὸ ΛΕΔ τῷ ΘΒΔΜ ἐστιν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΗΔΜ καὶ τῷ ΗΖΕ, τουτέστι τῷ ΖΚΝ καὶ τῷ ΝΕΔΜ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΝΕΔΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΝΜ τῷ ΚΖΝ ἴσον. Εἰς τὸ μζ'. Τοῦτο τὸ θεωρημα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτώσεις ἔχει, ὅσας τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχεν, τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν ποιησόμεθα προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μγ' θεωρήματος, καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως δὲ τὰς ἀποδείξεις ἐκ τῶν πτώσεων τοῦ μγ', οἷον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς τοῦ Η σημείου ἐκτὸς εἰλημμένου, ἐπειδὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΑΓ τρίγωνον τοῖς ΘΗΩ, ΩΓΜ, τουτέστι τοῖς ΟΘΓ, ΟΗΜ τριγώνοις, τῷ δὲ ΛΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ τε ΞΠΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΛΑΠΞ τετράπλευρον, τουτέστι τὸ ΝΘΠ τρίγωνον διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μγ' θεωρήματι, καὶ τὰ ΞΠΓ, ΝΘΠ ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ΟΘΓ, ΟΜΗ τριγώνοις.

270 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΘΟΓ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΞΟΝ τῷ ΗΟΜ ἴσον ἐστίν. καὶ παράλληλος ἡ ΝΞ τῇ ΜΗ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ. Εἰς τὸ μη'. Καὶ τούτου αἱ πτώσεις ὡσαύτως ἔχουσι τοῖς προειρημένοις ἐπὶ τοῦ μζ' κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφὴν. Εἰς τὸ μθ'. Λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΑΝ

τρίγωνον τῷ ΔΛΠΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ γωνίᾳ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ ἐκκείσθω γὰρ χωρὶς τὸ ΚΛΝ τρίγωνον καὶ τὸ ΔΛΠΓ παραλληλόγραμμον.

272 καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΠ παραλληλογράμμῳ, ἦχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΑΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΛΝ ἡ ΚΡ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΡ καὶ διπλάσιον τοῦ ΚΛΝ τριγώνου· ὥστε καὶ τοῦ ΔΠ παραλληλογράμμου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ ΔΓ, ΛΠ ἐπὶ τὰ Σ, Τ, καὶ κείσθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΛΠ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΣΤ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ· ὥστε ἴσον τὸ ΛΡ τῷ ΛΣ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον διὰ τὸ τὰς πρὸς τῷ Λ γωνίας κατὰ κορυφὴν οὔσας ἴσας εἶναι· τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογώνιων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς ΛΤ, τουτέστι πρὸς ΔΣ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΝ, καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΔΣ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΔΣ τῆς ΔΓ, τὸ ὑπὸ ΚΛΝ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ΛΔΓ. ἐὰν δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΛΠ ἐστί παράλληλος, ἡ δὲ ΓΠ τῇ ΛΔ μὴ ἐστί παράλληλος, τραπέzion μὲν δηλονότι ἐστὶ τὸ ΔΓΠΛ, καὶ οὕτως δέ φημι, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΛ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ, ΛΠ. ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ΛΡ ἀναπληρωθῇ, ὡς προεῖρηται, ἐκβληθῶσι δὲ καὶ αἱ ΔΓ, ΛΠ, καὶ τεθῇ τῇ μὲν ΛΠ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΔΓ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΤ, παραλληλόγραμμον ἔσται τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἀρμόσει. χρησιμεύσει δὲ τοῦτο εἰς τὸ ἐξῆς. Εἰς τὸ ν'. Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ὡσαύτως ἔχουσι ταῖς τοῦ μγ', ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ να'. Εἰς τὸν ἐπίλογον.

274 (1τ) Τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον λέγει τὴν γεναμένην ἐν τῷ κώνῳ κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. καὶ φησιν, ὅτι πάντα τὰ δεδειγμένα συμπτώματα τῶν τομῶν ἐν τοῖς προειρημένοις θεωρήμασιν ὑποθεμένων ἡμῶν τὰς ἀρχικὰς διαμέτρους συμβαίνειν δύνανται καὶ τῶν ἄλλων πασῶν διαμέτρων ὑποτιθεμένων. Εἰς τὸ νδ'. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν ΑΒ γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι πρὸς τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου τὸ ἐν τῷ ΑΖΒ τμήματι μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ τὴν ΑΒ κύκλον γράψαι, ὥστε τὴν διάμετρον αὐτοῦ τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ πρὸς τῷ Γ μέρος αὐτῆς πρὸς τὸ λοιπὸν μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ. ὑποκείσθω μὲν νῦν τὸν αὐτόν, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ ἦχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΕΖ· δηλὸν δὴ, ὅτι, εἰ μὲν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, διχοτομία ἔσται τῆς ΕΖ τὸ Δ, εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων καὶ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ, ἡ διχοτομία κατωτέρω ἐστὶ τοῦ Δ, εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐλάσσων, ἀνωτέρω.

276 ἔστω δὲ νῦν τέως κατωτέρω ὡς τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι τῷ ΗΖ κύκλος γεγράφθω· δεῖ δὴ διὰ τῶν Α, Β σημείων ἥξειν ἡ ἐσωτέρω ἢ ἐξωτέρω. καὶ εἰ μὲν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἔρχοιτο, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ὑπερπιπτέτω δὲ τὰ Α, Β, καὶ ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἐκάτερα ἡ ΑΒ συμπίπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ Θ, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΖ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Β τῇ μὲν ΖΚ παράλληλος ἡ ΜΒ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΑΛ· ἔσονται δὲ καὶ αὐταὶ παράλληλοι ταῖς ΖΘ, ΘΕ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΔ τῇ ΔΒ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΔΚ καὶ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὴν ΖΔΕ τῇ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία, καὶ παράλληλοι αἱ ΜΒΛ ταῖς ΖΚΕ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Β· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α. ὥστε ὁ περὶ τὴν ΜΛ κύκλος γραφόμενος ἥξει διὰ τῶν Α, Β. γεγράφθω ὡς ὁ ΜΑΛΒ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΖΚ, ἔστιν, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ. ὁμοίως δὲ καί, ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΛ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ.

278

ὁμοίως δέ, κἄν ὁ γραφόμενος περὶ τὴν ΖΕ κύκλος τέμνοι τὴν ΑΒ, τὸ αὐτὸ δειχθήσεται. Εἰς τὸ νε'. Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἦχθω τις εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἢ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΓ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὰ προκείμενα. κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἢ ΖΘ, καὶ τετμήσθω ἡ ΘΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἦχθω ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τυχοῦσα εὐθεΐα ἢ ΓΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κέντρου ἦχθω ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἢ ΛΣ καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΒ παράλληλος ἦχθω ἢ ΝΜ· ἐφάπτεται ἄρα τοῦ κύκλου. καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ, ἡ ΜΞ πρὸς ΞΝ, καὶ κείσθω τῇ ΞΝ ἴση ἢ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΛΟ τέμνουσαι τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὰ Π, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΠΡΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΞΝ τῇ ΝΟ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΝΛ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΟ τῇ ΛΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΠ τῇ ΛΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΠΟ τῇ ΡΞ ἐστὶν ἴση.

280 παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ ΠΡΔ τῇ ΜΟ. καὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ, ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ· ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς ΘΗ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΘΗ, ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΟΞ πρὸς ΞΜ· συνθέντι, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς ΖΕ, ἡ ΟΜ πρὸς ΜΞ, τουτέστιν ἢ ΠΔ πρὸς ΔΡ. ὡς δὲ ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ, τὸ ὑπὸ ΠΔΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ, ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΔΡ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ὡς ἄρα ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ, τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ἀπὸ ΔΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΓ. Εἰς τὸ νη'. Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΖ, καὶ τῇ ΑΔ παράλληλος ἦχθω ἐν αὐτῷ ἢ ΖΗ λόγον ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεΐα τις ἢ ΑΒ, καὶ κείσθωσαν δύο εὐθεΐαι ἄνισοι αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΕ ἴση κείσθω ἢ ΖΗ, καὶ τετμήσθω ὅλη ἢ ΕΗ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἦχθω καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἢ ΛΜ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἢ ΚΑ συμβαλλέτω τῇ ΛΜ κατὰ τὸ Μ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, καὶ τῇ ΛΝ ἴση ἔστω ἢ ΛΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΚ, ΚΞ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος τεμνέτω αὐτὰς κατὰ τὰ Π, Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΟΡΠ.

282 ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, συνθέντι, ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΝΜ πρὸς ΝΛ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, ἡ ΜΝ πρὸς ΝΞ· διελόντι, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΕ, ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΛ τῇ ΛΞ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΑΚ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΝ τῇ ΚΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΚΠ ἴση· παράλληλος ἄρα ἢ ΝΞ τῇ ΟΠ. ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΜΝ τρίγωνον τῷ ΟΚΡ τριγώνῳ καὶ τὸ ΚΜΞ τῷ ΠΡΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ, ἡ ΜΝ πρὸς ΡΟ. ἀλλὰ καί, ὡς αὐτὴ ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ, ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΜ πρὸς ΡΟ, ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ, ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΟΡΠ τῷ ὑπὸ ΑΡΓ. ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΡΓ. Εἴρηται μὲν ἐν τοῖς μετὰ τὸ ι' θεώρημα σχολίοις ὁ σκοπὸς τῶν ιγ πρώτων θεωρημάτων καὶ ἐν τοῖς εἰς τὸ ἐκκαιδέκατον ὁ τῶν ἐξῆς τριῶν, δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι ἐν μὲν τῷ ιζ' φησὶν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη ἐκτὸς πίπτει, ἐν δὲ τῷ ιη' φησὶν, ὅτι ἡ παράλληλος τῇ ὁπωσοῦν ἐφαπτομένη ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη τεμεῖ τὴν τομὴν, ἐν τῷ ιθ', ὅτι ἡ ἀπὸ τινος σημείου τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτει τῇ τομῇ, ἐν τῷ κ' καὶ κα' τὰς καταγομένας ζητεῖ τῶν τομῶν, ὅπως ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας καὶ τὰ τῆς διαμέτρου ὑπ' αὐτῶν γινόμενα τμήματα, ἐν τῷ κβ' καὶ κγ' λέγει περὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ δύο σημεία τῇ τομῇ συμπιπτούσης, ἐν τῷ κδ' καὶ κε' περὶ τῆς εὐθείας τῆς καθ' ἑν τῇ τομῇ συμπιπτούσης, τουτέστιν ἐφαπτομένης, ἐν τῷ κς' περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ

τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἐν τῷ κζ' περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι κατ' ἀμφοτέρωθεν μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ, ἐν τῷ κη' περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ κθ' περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης, ἐν τῷ λ' φησιν, ὅτι διχοτομεῖται ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἐκβαλλομένη τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ λα' φησὶν, ὅτι ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἡ ἐφαπτομένη τὴν διάμετρον τέμνει μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου, ἐν τῷ λβ' καὶ γ' καὶ δ' καὶ ε' καὶ ς' περὶ τῶν ἐφαπτομένων ποιεῖται τὸν λόγον, ἐν τῷ λζ' περὶ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἀφῆς κατηγμένων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἐν τῷ λη' περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅπως ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐν τῷ λθ' καὶ μ' περὶ τῶν αὐτῶν ποιεῖται τὸν λόγον τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους ἐπιζητῶν, ἐν τῷ μα' περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μβ' ἐπὶ τῆς παραβολῆς λέγει ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κατηγμένης καταλαμβάνομενον τρίγωνον τῷ ἰσοῦσεῖ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ, ἡμίσειαν δ' ἔχοντι βάσιν, ἐν τῷ μγ' ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ζητεῖ, πῶς ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων ἀπολαμβάνομενα τρίγωνα, ἐν τῷ μδ' τὸ αὐτὸ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις, ἐν τῷ με' τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μς' περὶ τῶν μετὰ τὴν ἀρχικὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς ἐτέρων, ἐν τῷ μζ' περὶ τῶν ἐτέρων διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ μη' περὶ τῶν ἐτέρων διαμέτρων τῶν ἀντικειμένων, ἐν τῷ μθ' περὶ τῶν παρ' ἃς δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὰς ἐτέρας διαμέτρους τῆς παραβολῆς, ἐν τῷ ν' περὶ τοῦ αὐτοῦ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ἐν τῷ να' περὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀντικειμένων.

286 ταῦτα εἰπὼν καὶ προσθεὶς τοῖς εἰρημένοις ἐπίλογόν τινα ἐν τῷ νβ' καὶ νγ' δεικνύει πρόβλημα, ὡς δυνατόν ἐν ἐπιπέδῳ γράψαι τὴν παραβολήν, ἐν τῷ νδ' καὶ νε' λέγει, πῶς δεῖ γράψαι τὴν ὑπερβολήν, ἐν τῷ νς' καὶ νζ' καὶ νη', πῶς δεῖ γράψαι τὴν ἔλλειψιν, ἐν τῷ νθ' λέγει, πῶς δεῖ γράφειν ἀντικειμένας, ἐν τῷ ξ' περὶ τῶν συζύγων ἀντικειμένων.

290 (1τ) Εἰς τὸ δεύτερον. Ἀρχόμενος τοῦ β' βιβλίου τῶν Κωνικῶν, ὃ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, τοσοῦτον οἶμαι δεῖν προειπεῖν, ὅτι τοσαῦτα μόνον εἰς αὐτὸ γράφω, ὅσα ἂν μὴ ᾖ δυνατόν διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ νοηθῆναι. Εἰς τὸ α'. Τὸ πρῶτον θεώρημα πτωσὶν οὐκ ἔχει, εἰ μὴ ἄρα τοῦτο γὰρ τῇ καταγραφῇ διαφορὰν οὐ ποιεῖ· αἱ γὰρ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοί τέ εἰσι τῇ τομῇ καὶ αἱ αὐταὶ διαμένουσι κατὰ πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην. Εἰς τὸ β'. Τοῦτο τὸ θεώρημα πτωσὶν οὐκ ἔχει. ἡ μέντοι ΒΘ πάντως τεμεῖ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, συμπεσεῖται τῇ ΓΘ· ὥστε πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. Εἰς τὸ ια'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἄλλως δείκνυται. Ἐστω ὑπερβολή, ἥ ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕΔ, καὶ ἦχθω τις ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, τέμνουσα τὰς ΔΒ, ΒΑ.

292 λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπίπτέτω, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΗ. ἡ ΒΗ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ ΒΗ ἴσον παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπίπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΗ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΑΔ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ· ὥστε καὶ τῷ ὑπὸ ΕΘΖ· ὅπερ ἄτοπον, ἐπεὶ περὶ ἡ ΑΔ παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ. ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. φανερόν δὴ, ὅτι καὶ καθ' ἑν μόνον σημεῖον· παράλληλος γὰρ ἐστὶ τῇ ΒΗ διάμετρος. Εἰς τὸ ιβ'. Ἡυρέθη ἑν τισιν ἀντιγράφοις τοῦτο τὸ θεώρημα δεικνύμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων τῇ ἐφαπτομένῃ, μιᾷς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἐτέρας δὲ διὰ τοῦ Η· καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ συνθέσεως λόγων ἐδείκνυτο. ἐπελεξάμεθα δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ὡς τὰ αὐτὰ δεικνύσαν ἀπλουστερώς.

ἔχει δὲ καὶ πτώσεις ἕξ τῶν γὰρ ΕΔΖ ἀχθεισῶν τὸ Ε σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν Θ, Β ἢ ἐπὶ τοῦ Β ἢ ἕξ τοῦ Β, ὡς γίνονται τρεῖς, καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Ζ ἄλλαι τρεῖς. Εἰς τὸ ιδ'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις ἠυρέθη ἄλλως δεικνύμενον, ὅτι παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἕλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τοῦ δοθέντος διαστήματος ἕλαττον τὸ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΘ, ἡ ΘΑ πρὸς ΑΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΜΛΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΒ, ἡ ΕΒ ἄρα πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ. ὡς δὲ ἡ ΕΒ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΕ πρὸς ΜΞ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΖΘΕ τῷ ὑπὸ ΒΕΜ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΛΒ πρὸς ΖΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΒ πρὸς ΖΘ, ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ὡς δὲ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ΕΜ τῆς ΚΕ. ἠυρέθησαν δὲ ἔν τισι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐγγεγραμμένα, ἅπερ ὡς περιττὰ ἀφηρέθη ὑφ' ἡμῶν· δεδειγμένου γὰρ τούτου, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ἔγγιον προσάγουσι τῇ τομῇ καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος εἰς ἕλαττον ἀφικνοῦνται, περιττὸν ἦν ταῦτα ζητεῖν.

296 ἀμέλει οὐδὲ ἀποδείξεις ἔχουσί τινας, ἀλλὰ διαφορὰς καταγραφῶν. ἴνα δὲ τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν ἡμέραν δὴλην ποιήσωμεν, ἐκκείσθω ἐνταῦθα τὰ ὡς περιττὰ ἀφηρημένα. Εἴ τινες εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἕτεροι τῶν προειρημένων, ἔγγιον εἰσιν αἱ προειρημέναι τῇ τομῇ. ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ. λέγω, ὅτι, εἴ τινες εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ, ἐκείνων ἔγγιον εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ. ὅτι μὲν οὖν, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, οὐ δύνανται αἱ ΕΖΗ ἀσύμπτωτοι εἶναι, φανερόν, ὥστε εἶναι παράλληλον τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΓΑ, τὴν δὲ ΖΗ τῇ ΑΔ· δέδεικται γάρ, ὅτι συμπεσοῦνται τῇ τομῇ· ἐν γὰρ τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων καὶ τῆς τομῆς εἰσιν. εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεως εἰσιν, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ παράλληλοι οὔσαι ταῖς ΓΑ, ΑΔ, ἔγγιον μᾶλλον εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ τῆς τομῆς ἢ περ αἱ ΕΖ, ΖΗ. εἰ δέ, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης πτώσεως, καὶ οὕτως αἱ μὲν ΓΑ, ΑΔ, ἐὰν ἐκβληθῶσιν εἰς ἄπειρον, ἐγγίζουσι τῆς τομῆς καὶ εἰς ἕλαττον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος ἀφικνοῦνται, αἱ δὲ ΕΖΗ κατὰ μὲν τὸ Ζ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτοῦ ἐντὸς ὄντα τῆς γωνίας σύνεγγυς εἰσι τῆς τομῆς, ἐκβληθεῖσαι δὲ ἀφίστανται τῆς τομῆς μᾶλλον· παντὸς γὰρ τοῦ δοθέντος, ὃ νῦν ἀφεστήκασιν, ἔστιν ἕλασσον.

298 ἔστωσαν δὲ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ· φανερόν δὲ καὶ οὕτως, ὅτι ἡ μὲν ΓΑ ἔγγιον ἐστὶ τῆς τομῆς ἢ περ ἡ ΕΖ, ἐὰν τε ἡ ΕΖ τῇ ΓΑ παράλληλός ἐστιν, ἐὰν τε συμπίπτῃ τῇ ΓΑ. καὶ ἐὰν μὲν ἡ σύμπτωσις ἀνώτερον ἢ τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, τέμνει τὴν τομὴν, ἐὰν δὲ ἡ σύμπτωσις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἢ τῆς τε ἐφαπτομένης καὶ τῆς γωνίας, ὥσπερ καὶ ἡ ΖΗ, κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω ἡ ΘΗ τῆς τομῆς οὐκ ἀφέξει ἕλασσον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος· ὥστε ἡ ΓΑ ἔγγιον ἐστὶ τῆς τομῆς, ἢ περ ἡ ΕΖ ἐστὶν. ἡ δὲ ΔΑ ἔγγιον τῆς τομῆς ἢ περ ἡ ΖΗ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς. ὅτι δὲ ἡ ἀνωτέρω τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης συμπίπτουσα τῇ ΓΑ συμπίπτει καὶ τῇ τομῇ, οὕτως δείκνυται.

300 καὶ ἡ ΖΕ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ σύμπτωσις τῇ ΓΑ ἀνώτερον τῇ ΖΗ. λέγω, ὅτι ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἦχθω γὰρ διὰ τῆς Ε ἀφῆς παράλληλος τῇ ΓΑ ἀσύμπτῶτος ἡ ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα κατὰ μόνον τὸ Ε τέμνει τὴν τομὴν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΑ τῇ ΕΘ παράλληλός ἐστιν, καὶ τῇ ΑΗ συμπίπτει ἡ ΖΗ, καὶ τῇ ΕΘ ἄρα συμπεσεῖται· ὥστε καὶ τῇ τομῇ. Εἴ τίς ἐστιν εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολὴν ἐτέρα τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν, οὐκ ἔστιν ἐλάσσων τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν. ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, ἕτεροι δὲ τινες ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἔστωσαν αἱ ΕΖΗ. λέγω, ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς πρὸς τῷ Α. ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ΕΖΗ ταῖς ΓΑ, ΑΔ παράλληλοι. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῇ πρὸς τῷ Α· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α. μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι, καθὼς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς.

302 φανερόν οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς ὑπὸ ΘΑΗ. ἐπὶ δὲ τῆς γ' μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΑ τῆς πρὸς τῷ Α, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ πρὸς τῷ Ζ τῇ πρὸς τῷ Θ. ἐπὶ δὲ τῆς δ' ἡ κατὰ κορυφὴν

τῆς κατὰ κορυφὴν ἐστὶ μείζων. οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Z τῆς πρὸς τῷ A. Εἰς τὸ κγ'. Τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι ἔστω εὐθεΐα ἡ ΑΚ, καὶ ἔστω ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΘΝ ἴση τῇ ΕΜ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ, Κ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΜΞ, ΚΟ, καὶ κείσθω τῇ ΜΚ ἴση ἡ ΜΞ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΚΟ, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΞΘ, ΘΑ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΞ, τουτέστι τῇ ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΕΚ, τουτέστι τῇ ΚΟ, ἴσον ἄρα τὸ ΘΑ τῷ ΜΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΘ καὶ ΜΟ, τουτέστι τῷ ΘΟ καὶ ΠΡ.

304 καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΞ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΜΚ, τὸ δὲ ΘΟ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ, τὸ δὲ ΠΡ τὸ ὑπὸ ΘΜΕ [τουτέστιν ὑπὸ ΠΞΡ]. ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὸ αὐτό. τετμήσθω ἡ ΜΝ δίχα κατὰ τὸ Σ. φανερόν δὴ, ὅτι καὶ ἡ ΑΚ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Σ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΕΚ· ἴση γὰρ ἡ ΘΚ τῇ ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Σ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ὑπὸ ΛΕΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΣ. τὸ δὲ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΛΕΚ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΚΕ, καὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. διὰ ταῦτα δὴ τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΣΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΣΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ. Εἰς τὸ κδ'. Δεῖ σημειώσασθαι, ὅτι συμπτώσεις καλεῖ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ συμβάλλουσι τῇ τομῇ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεΐαι. καὶ δεῖ, φησὶν, παρατηρεῖν, ὥστε ἐκτὸς εἶναι ἀλλήλων τὰ σημεῖα, ἀλλὰ μὴ τὰ Α, Β.

306 δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι καὶ ἐπὶ ἐφαπτομένων τὰ αὐτὰ συμβαίνει. Εἰς τὸ κη'. Ἄξιον ἐπισκέψασθαι τὴν δοθεῖσαν ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλην γραμμὴν, πότερον κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἢ ἑτέρα τις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν ἢ ἄλλη παρὰ ταύτας. ἔστω δὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ προκείσθω τὸ εἶδος αὐτῆς ἐπισκέψασθαι τὸν εἰρημένον τρόπον. εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Δ σημείων παράλληλοι ἀλλήλαις εὐθεΐαι τινες αἱ ΓΒ, ΔΕ ἐντὸς ἀπολαμβάνόμεναι τῆς γραμμῆς, καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἔτεραι παράλληλοι αἱ ΓΗ, ΔΖ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ μὲν ΓΒ, ΔΕ κατὰ τὰ Θ, Κ, αἱ δὲ ΓΗ, ΔΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΜ.

308 εἰ μὲν οὖν πᾶσαι αἱ τῇ ΒΓ παράλληλοι ὑπὸ τῆς ΚΘ διχοτομοῦνται, πᾶσαι δὲ αἱ τῇ ΓΗ ὑπὸ τῆς ΜΛ, μία ἐστὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἡ ΒΑΓ διαμέτρους ἔχουσα τὰς ΘΚ, ΜΛ, εἰ δὲ μή, οὐ. πάλιν δέ, ποία τῶν δ' ἐστίν, εὐρίσκομεν ἐκβάλλοντες εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὰς ΘΚ, ΛΜ. ἦτοι γὰρ παράλληλοί εἰσιν, καὶ ἐστὶ παραβολή, ἢ ἐπὶ τὰ Θ, Λ μέρη συμπίπτουσιν, καὶ ἐστὶν ἔλλειψις ἢ κύκλος, ἢ ἐπὶ τὰ ἔτερα, καὶ ἐστὶν ὑπερβολή. τὴν δὲ ἔλλειψιν τοῦ κύκλου διακρινούμεν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συμπτώσεως τῶν ΑΘ, ΝΛ, ὅπερ κέντρον γίνεται. εἰ μὲν γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν γραμμὴν προσπίπτουσαι, δηλον, ὅτι κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, εἰ δὲ μή, ἔλλειψις. Ἔστιν αὐτὰς διακρίναι καὶ ἄλλως ἀπὸ τῶν τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγομένων, οἷον τῶν ΓΘ, ΔΚ. εἰ μὲν γὰρ εἴη, ὥς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ, οὕτως ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, παραβολή ἐστὶν, εἰ δὲ τὸ ἀπὸ ΘΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ὑπερβολή, εἰ δὲ ἐλάττονα, ἔλλειψις. Καὶ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων δυνατόν ἐστιν αὐτὰς διακρίναι ἀναμνησθέντας τῶν εἰρημένων αὐταῖς ὑπάρχειν ἀνωτέρω. Εἰς τὸ μη'.

310 (1τ) Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ καὶ διηρήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὰ Ε, Ζ. λέγω, ὅτι, ὧ διαφέρει τὸ ΑΕ τοῦ ΖΓ, τοῦτ' διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. κείσθω τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστὶ τῶν ΑΗ, ΑΕ, τουτέστι τῶν ΓΖ, ΑΕ· τὸ γὰρ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ ἐστὶν ἴσον. ὥστε τὸ ΕΗ ὑπεροχή ἐστὶ τῶν ΕΒ, ΒΗ ἦτοι τῶν ΕΒ, ΖΔ. Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν δ' μεγέθη τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ διαφερέτω, ὧ διαφέρει τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. λέγω, ὅτι συναμφοτέρα τὰ ΑΕΒ συναμφοτέροις τοῖς ΓΖ, ΖΔ ἐστὶν ἴσα. κείσθω πάλιν τῷ ΓΖ ἴσον τὸ ΑΗ· τὸ ΕΗ ἄρα ὑπεροχή ἐστὶ τῶν ΑΕ, ΓΖ. τῷ δὲ αὐτῷ διαφέρειν ὑπόκειται ἀλλήλων τὰ ΕΑ,

ΓΖ καὶ τὰ ΕΒ, ΖΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΗ τῷ ΓΖ· τὸ ΑΒ ἄρα τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον. φανερόν δὴ, ὅτι, ἐὰν πρῶτον δευτέρου ὑπερέχη τινί, καὶ τρίτον τετάρτου ὑπερέχη τῷ αὐτῷ, ὅτι τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον ἴσα ἐστὶ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ κατὰ τὴν καλουμένην ἀριθμητικὴν μεσότητα. ἐὰν γὰρ τούτων ὑποκειμένων ὑπάρχη, ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τέταρτον, ἴσον ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τῷ τρίτῳ, τὸ δὲ δεύτερον τῷ τετάρτῳ.

312 δυνατὸν γὰρ ἐπὶ ἄλλων τοῦτο δειχθῆναι διὰ τὸ δεδειχθαι ἐν τῷ κε' θεωρήματι τοῦ ε' βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως· ἐὰν δ' ἐκείνη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἔσται. Εἰς τὸ τρίτον.

314 (1t) Τὸ τρίτον τῶν Κωνικῶν, ᾧ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, πολλῆς μὲν φροντίδος ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἠξίωται, ὡς αἱ πολύτροποι αὐτοῦ ἐκδόσεις δηλοῦσιν, οὔτε δὲ ἐπιστολὴν ἔχει προγεγραμμένην, καθάπερ τὰ ἄλλα, οὐδὲ σχόλια εἰς αὐτὸ ἄξια λόγου τῶν πρὸ ἡμῶν εὐρίσκεται, καίτοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀξίων ὄντων θεωρίας, ὡς καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ παντὸς βιβλίου φησίν. πάντα δὲ ὑφ' ἡμῶν σαφῶς ἔκκεται σοι δεικνύμενα διὰ τῶν προλαβόντων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων. Εἰς τὸ α'. Ἔστι δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις. ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, ἐπειδὴ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΖ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΑΔ ἴση· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ παράλληλος· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ λεκτέον· ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· παράλληλος γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ.

316 παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ἴσον ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ κοινού αφαιρουμένου τοῦ ΓΔΕ λοιπὸν τὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ. περὶ δὲ τῶν πτώσεων λεκτέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔχει δύο· αἱ γὰρ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰς ἀφὰς μόνον συμβάλλουσιν αἱ τὰς διαμέτροις καὶ ἐκβαλλομέναις αὐταῖς συμπίπτουσιν, ἢ ὡς ἐν τῷ ῥητῷ κεῖται, ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, καθ' ἃ ἐστὶ τὸ Ε, ὥσπερ ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς. Εἰς τὸ β'. Τὰς πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος εὐρήσεις διὰ τοῦ μβ' καὶ μγ' θεωρήματος τοῦ α' βιβλίου καὶ τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων σχολίων. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι, ἐὰν τὸ Η σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β ληφθῇ ὥστε τὰς παραλλήλους εἶναι ὡς τὰς ΜΗΖ, ΑΗΚ, ἐκβάλλειν δεῖ τὴν ΑΚ μέχρι τῆς τομῆς ὡς κατὰ τὸ Ν καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΔ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ΝΕ· ἔσται γὰρ διὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ α' βιβλίῳ κατὰ τὸ μθ' καὶ ν' θεώρημα καὶ τὸ τούτων σχόλιον τὸ ΚΝΕ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ ἴσον.

318 ἀλλὰ τὸ ΚΞΝ ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΚΜΗ, διότι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΜΗ τῇ ΝΕ· ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἴσον, διότι ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΓ, παράλληλος δὲ αὐτῇ ἡ ΗΝ, καὶ διάμετρος ἡ ΜΞ, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΝ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΝΕ τῷ τε ΚΓ καὶ τῷ ΚΜΗ, κοινού αφαιρουμένου τοῦ ΑΗ λοιπὸν τὸ ΑΙΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΗ. Εἰς τὸ γ'. Τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις, ἃς εὐρήσομεν ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ. δεῖ μέντοι ἐπισκῆψαι, ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ μεταξύ ἐστὶ τῶν δύο διαμέτρων ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· εἰ γὰρ τὸ μὲν ἕτερον ἐκτὸς λάβωμεν, τὸ δὲ ἕτερον μεταξὺ τῶν διαμέτρων, οὐ συνίσταται τὰ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενα τετράπλευρα, ἀλλ' οὐδὲ ἐφ' ἐκάτερα τῶν διαμέτρων. Εἰς τὸ δ'. Ἐν τῇ προτάσει τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἐφεξῆς δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι τῶν ἀντικειμένων λέγει ἀδιορίστως, καὶ τινὰ μὲν τῶν ἀντιγράφων τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς ἔχει, τινὰ δὲ οὐκέτι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἀλλ' ἐφ' ἐκάτερας αὐτῶν μίαν συμπιπτούσας ἀλλήλαις, ὡς εἴρηται ἐν τῷ β' βιβλίῳ, ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ οὕτως δὲ κἀκείνως συμβαίνει τὰ τῆς προτάσεως, ὡς ἔξεστι τοῖς βουλομένοις καταγράφουσιν ἐπισκέπτεσθαι, πλην ὅτι, εἰ μὲν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἢ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἢ

πλαγία διάμετρος ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων, εἰ δὲ ἑκατέρας μία ἐστὶν ἐφαπτομένη, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ ὀρθία διάμετρος ἐστίν.

320 Εἰς τὸ ε'. Ἐπειδὴ ἀσάφες ἐστὶ τὸ ε' θεωρήμα, λεκτέον ἐπὶ μὲν τῆς καταγραφῆς τῆς ἐχούσης τὴν μίαν ὀρθίαν διάμετρον· ἐπεὶ δέδεικται τὸ ΗΘΜ τοῦ ΓΛΘ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΗΘΜ τῷ ΓΘΛ καὶ τῷ ΓΔΖ· ὥστε καὶ τῷ ΚΔΘ μετὰ τοῦ ΖΛΚ. τὸ ἄρα ΗΜΘ τοῦ ΚΔΘ διαφέρει τῷ ΚΛΖ. κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΘΔΚ λοιπὸν τὸ ΚΛΖ ἴσον τῷ ΚΔΜΗ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐχούσης τὴν πλαγίαν διάμετρον· ἐπειδὴ προδέδεικται τὸ ΓΛΘ τοῦ ΜΘΗ μεῖζον τῷ ΓΔΖ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘΛ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΓΔΖ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΔΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΗΜ μετὰ τοῦ ΚΛΖ. ἔτι κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΜΘΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΛ τῷ ΔΜΗΚ ἴσον. πτώσεις δὲ ἔχει πολλάς, αἷς δεῖ ἐφιστάνειν ἀπὸ τῶν δεδειγμένων ἐν τῷ μδ' καὶ με' θεωρήματι τοῦ α' βιβλίου. ἐν δὲ τῷ λέγειν ἀφηρήσθω ἢ προσκείσθω τετράπλευρον ἢ τρίγωνον τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις κατὰ τὴν οἰκειότητα τῶν πτώσεων χρῆ ποιεῖσθαι. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἐφεξῆς πολύπτωτά ἐστι διὰ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα καὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα μὴ ὄχλον παρέχωμεν τοῖς ὑπομνήμασι πολλὰς ποιοῦντες καταγραφάς, καθ' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων μίαν ποιοῦμεν ἔχουσιν τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἵνα σώζηται τὸ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενον τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, καὶ τὰς παραλλήλους πάσας ποιοῦμεν συμπίπτειν καὶ στοιχεῖα τίθεμεν καθ' ἑκάστην σύμπτωσιν, ἵνα φυλάττων τις τὰ ἀκόλουθα δύνηται πάσας τὰς πτώσεις ἀποδεικνύειν.

322 Εἰς τὸ ζ'. Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἐφεξῆς πάντων, ὡς εἴρηται ἐν τοῖς τοῦ ε' θεωρήματος σχολίοις, πολλάι εἰσιν, ἐπὶ πασῶν μέντοι τὰ αὐτὰ συμβαίνει. ὑπὲρ δὲ πλείονος σαφηνείας ὑπογεγράφθω μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· φανερόν δὴ, ὅτι παράλληλός ἐστὶ τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΜΛ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ θεωρήματι κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφὴν τὸ ΠΝΓ τρίγωνον τῷ ΛΠ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΜΠ· τὸ ἄρα ΜΚΝ τρίγωνον τῷ ΜΛΡΓ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΡΕ, ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΕΖ διὰ τὰ ἐν τῷ μδ' τοῦ α' βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΚΝ καὶ τῷ ΑΕΖ.

324 κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΚΜΝ λοιπὸν τὸ ΑΕΖ τῷ ΚΛΕΝ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΛΖΙ ἐστὶν ἴσον. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΝΗΟ. Εἰς τὸ ιγ'. Ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ εἰσιν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ἴσον τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ ἐκκείσθω χωρὶς ἡ καταγραφὴ μόνων τῶν τριγώνων, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΘ εἰς τὸ Ξ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΖΘ πρὸς ΘΞ. ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ καὶ ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΞ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗΘ τρίγωνον ἴσον τῷ ΗΘΞ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Θ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΘΒ τρίγωνον τῷ ΗΘΞ· ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ. ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι ἴσα τὰ τρίγωνα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚ, ΘΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΖ, ΒΘ ὀρθογωνίῳ.

326 καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσιν αἱ ὑπὸ ΗΘΝ, ΘΒΖ, ἐὰν ἀναγράψωμεν παραλληλόγραμμα ῥομβοειδῆ ὑπὸ τῶν αὐτῶν περιεχόμενα πλευρῶν τοῖς ὀρθογωνίοις ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Θ, Β, ἴσα ἔσται καὶ αὐτὰ διὰ τὴν τῶν πλευρῶν ἀντιπεπόνθησιν. ἔσται δὴ τὸ περιεχόμενον ῥομβοειδὲς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΘ ἐν τῇ Β γωνίᾳ διπλάσιον τοῦ ΘΒΖ τριγώνου· διάμετρος γὰρ αὐτοῦ ἔσται ἡ ΖΘ· τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ἴσης τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΘΝΛ ἀφαιρουμένης ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΝ γωνίᾳ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ΑΗΘ τριγώνου· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΗΘ καὶ ὑπὸ τὴν αὐτὴν παράλληλον τὴν ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΗΘ ἀγομένην. ὥστε ἴσον τὸ ΑΗΘ τῷ ΖΒΘ. Εἰς τὸ ις'. Ἐν τισὶ τῶν ἀντιγράφων τοῦτο ὡς θεωρήμα ὡς ις' παρέκειτο, ἔστι δὲ κατὰ ἀλήθειαν πτώσις τοῦ ις'.

μόνον γάρ, ὅτι αἱ ΑΓΒ ἐφαπτόμεναι παράλληλοι γίνονται ταῖς διαμέτροις, τὰ δὲ ἄλλα ἐστὶ τὰ αὐτά. ἐν σχολίοις οὖν ἔδει τοῦτο κεῖσθαι, ὥσπερ ἐγράψαμεν καὶ εἰς τὸ μα' τοῦ α' βιβλίου. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου αἱ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ οὕτως ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.

328 ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΗΑ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΛΘΑ ἴσον τῷ ἀπὸ ΘΑ, τὸ δὲ ὑπὸ ΛΗΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΙΑΗ· ἴση γὰρ ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΙ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΙΑ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΙΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. Εἰς τὸ ιζ'. Καὶ τοῦτο ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ἔκειτο θεώρημα, ὅπερ ἡμεῖς ὡς πτωσιν ἀφελόντες ἐνταῦθα ἐγράψαμεν. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ διὰ τῶν ἀφῶν ἀγόμεναι διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις ταῖς ΒΓ, ΓΑ, καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖΘ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Δ, Θ τεταγμένως κατηγμέναι αἱ ΔΠ, ΘΜ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ, τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΠΛ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΟΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα πρὸς λοιπὸν ἐστίν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

330 ἀλλ' ἐὰν μὲν ἀπὸ τοῦ ἀπὸ ΕΟ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, καταλείπεται τὸ ὑπὸ ΚΖΕ· ἴση γὰρ ἡ ΚΟ τῇ ΟΕ· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ΑΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, λείπεται τὸ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΖΔ· ἴση γὰρ ἡ ΑΠ τῇ ΜΛ καὶ ἡ ΠΝ τῇ ΝΜ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖΘ. ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐκτὸς ῆ τῆς τομῆς, τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἀνάπαλιν ποιητέον. Εἰς τὸ ιη'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις ἠυρέθη ἐτέρα ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος· Ἐὰν ἐκατέρας τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συμπίπτωσι, καὶ οὕτως ἔσται τὰ εἰρημένα. ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α διάμετρος ἡ ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παρὰ τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Β ἐφάπτεται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, τεταγμένως δὲ ἤκται ἡ ΒΛ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ.

332 ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΑΓ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ἡ ΑΓ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ. Εἰς τὸ ιθ'. Ἐν τισιν ἀντιγράφοις ἠυρέθη ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος τοιαύτη· ἤχθω δὴ ἡ μὲν ΜΛ παρὰ τὴν ΖΑ τέμνουσα τὴν ΔΓ τομὴν, ἡ δὲ ΗΛ παρὰ τὴν ΖΔ τέμνουσα τὴν ΑΒ. δεικτέον, ὅτι ὁμοίως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Δ ἀφῶν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ διὰ τῶν Γ, Β ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΒΠ, ΓΠ· ἐφάπτονται δὴ αἱ ΒΠ, ΓΠ τῶν τομῶν κατὰ τὰ Β, Γ. καὶ ἐπεὶ κέντρον ἐστὶ τὸ Ε, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΓ· διὰ δὲ τοῦτο, καὶ ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΤΖ τῇ ΓΣΠ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΔΣ τῇ ΤΒ.

334 ὥστε καὶ ἡ ΒΣ τῇ ΤΔ, καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠΣ τρίγωνον τῷ ΔΤΖ τριγώνῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΠ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΑΖ ἴση. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΓ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ. Ἄλλο εἰς τὸ αὐτό. Ἦχθω πάλιν ἐκατέρα τῶν ΗΘΚ, ΙΘΛ παράλληλος τέμνουσα τὴν ΔΓ τομὴν. δεικτέον, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΙΘΛ. ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Α ἀφῆς διάμετρος ἡ ΑΓ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἤχθω ἡ ΓΜ· ἐφάπεται δὴ ἡ ΓΜ τῆς ΓΔ τομῆς κατὰ τὸ Γ· καὶ ἔσται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ, τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ

ἀπὸ ΜΓ, τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. Εἰς τὸ κγ'.

336 (1t) Τὸ θεώρημα τοῦτο πολλὰς ἔχει πτώσεις, ὥσπερ καὶ τὰ ἄλλα. ἐπεὶ δὲ ἔν τιςιν ἀντιγράφοις ἀντὶ θεωρημάτων πτώσεις εὐρίσκονται καταγεγραμμένοι καὶ ἄλλως τινὲς ἀποδείξεις, ἐδοκιμάσαμεν αὐτὰς περιελεῖν· ἵνα δὲ οἱ ἐντυγχάνοντες ἀπὸ τῆς διαφόρου παραθέσεως πειρῶνται τῆς ἡμετέρας ἐπινοίας, ἐξεθέμεθα ταύτας ἐν τοῖς σχολίοις. Πιπτέτωσαν δὴ αἱ παρὰ τὰς ἐφαπτομένης αἱ ΗΚΟ, ΘΚΤ διὰ τοῦ Κ κέντρου. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΚΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚΟ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὰς ἐφαπτομένης αἱ ΘΝ, ΗΜ· γίνεται δὴ ἴσον τὸ μὲν ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΚΞ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΝΚ τῷ ΚΠΕ. ἴσον δὲ τὸ ΑΚΞ τῷ ΕΚΠ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΚΜ τῷ ΚΘΝ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΛΕ πρὸς τὸ ΛΕΞ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ΚΘΝ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΛΕΞ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ τῷ ΚΗΜ, εἴη ἄν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΛΠΑ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς ΗΚΜ. ἔστι δὲ καί, ὥς τὸ ΛΠΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ΗΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΚΤ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.

338 τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἡ μὲν ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ παρὰ τὴν ΕΛ ἀγομένη, διὰ τοῦ Κ κέντρου ἐμπίπτῃ, ἡ δὲ ΗΟ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ο, Π ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι αἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΟΡ τοῦ ΜΝΚ τριγώνου μεῖζον τῷ ΑΚΤ, τῷ δὲ ΑΚΤ ἴσον τὸ ΚΣΠ, ἴσον τὸ ΜΟΡ τοῖς ΜΝΚ, ΚΣΠ τριγώνοις· ὥστε λοιπὸν τὸ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ τετραπλεύρῳ ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ τρίγωνον, οὕτως τὸ τε ἀπὸ ΠΚ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΚΞΝ, ἔσται, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ, οὕτως λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΡ τετράπλευρον. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ΕΛΤ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΑΦΛ, τὸ δὲ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΞ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΦ, τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καί, ὥς τὸ ΑΛΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· καὶ δι' ἴσου ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

340 Ἄλλως. ἔστι δὲ καὶ οὕτως δεῖξαι· ἐπεὶ, ἐὰν τῆς ΕΖ τομῆς ἀχθῇ ἐπιψαύουσα, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ΑΖ διάμετρος τῇ ΕΖ τομῇ, γίνεται παράλληλος ἡ ἀχθεῖσα τῇ ΑΤ, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῷ Ε ἀπὸ τῆς ΕΦ τῷ ὄν ἔχει ἡ ΑΛ πρὸς ΛΕ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τοῖς εἰς τὸ ιθ'. Εἰς τὸ κθ'. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχει τῷ δις ὑπὸ ΝΞΛ ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛΝ, καὶ ἀφηρήσθωσαν ἀπ' αὐτῆς ἴσαι αἱ ΛΞ, ΝΟ τὸ σχῆμα. φανερόν δὴ ἐκ τῆς ὁμοιότητος καὶ τοῦ ἴσην εἶναι τὴν ΛΞ τῇ ΟΝ, ὅτι τὰ ΛΔ, ΖΝ, ΑΤ, ΦΒ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΛΗΝ τὰ ΑΜ, ΜΝ ἐστίν, τὰ δὲ ἀπὸ ΞΗΟ ἐστὶ τὰ ΤΜ, ΜΖ, τὰ ἄρα ἀπὸ ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχουσι τοῖς ἄρ, Α'Β' γνώμοσιν.

342 καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΖ τῷ ΦΩ, τὸ δὲ ΣΚ τῷ ΦΡ, οἱ ἄρ, Α'Β' γνώμονες ἴσοι εἰσὶ τῷ τε ΖΒ καὶ τῷ ΑΦ. τὸ δὲ ΑΦ τῷ ΖΛ ἴσον, τὰ δὲ ΖΛ, ΖΒ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ ΛΞΝ, τουτέστιν ὑπὸ ΛΟΝ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΗΝ, τουτέστι τὰ ΑΜ, ΜΝ, τῶν ἀπὸ ΞΗΟ, τουτέστι τῶν ΤΜ, ΜΖ, ὑπερέχει τῷ δις ὑπὸ ΝΞΛ ἥτοι τοῖς ΛΖ, ΖΒ. Εἰς τὸ λα'. Δυνατόν ἐστὶ τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ποιοῦντας τὰς δύο εὐθείας μιᾶς τομῆς ἐφάπτεσθαι· ἀλλ' ἐπειδὴ πάντῃ ταυτόν ἦν τῷ ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς προδεδειγμένῳ, αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπελέχθη. Εἰς τὸ λγ'. Ἔστι καὶ ἄλλως τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι· ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΓΛ, ΛΖ, ἐφάψονται τῶν τομῶν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μ' τοῦ β' βιβλίου. ἐπεὶ οὖν Ἄλλως τὸ λδ'. Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔΕ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΒΕ καὶ παράλληλοι αἱ ΓΑΗ, ΖΒΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ.

344 ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Ἄλλως τὸ λε'. Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ μὲν ΓΒΕ

ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΓΑΗΘ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Η σημεία, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἦχθω ἡ ΚΒΖ. δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΑ. ἐπεξεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Λ, Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΓΘ ἦχθω ἡ ΕΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΕΝ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΒΝ· ἡ ἄρα ΝΜ ὑπεροχὴ ἐστὶ τῶν ΒΜ, ΑΒ. ἴση δὲ ἡ ΒΜ τῇ ΛΑ· ἡ ΝΜ ἄρα ὑπεροχὴ ἐστὶ τῶν ΛΑ, ΑΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΘΜ παρὰ τὴν ΑΘ ἐστὶν ἡ ΕΝ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΝΜ, ἡ ΑΘ πρὸς ΝΕ. ἴση δὲ ἡ ΝΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΑΓ, ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΑΒ, ΒΜ, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ, ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΘΑ πρὸς ΑΓ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ· ἴση γὰρ ἡ ΓΑ τῇ ΘΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛΑ, ΑΒ καὶ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχὴν.

346 καὶ ἐπεὶ ζητῶ, εἴ ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΓΑ, ἡ ΗΖ πρὸς ΖΑ, δεικτέον, εἴ ἐστὶν, ὡς ὅλη ἡ ΗΓ πρὸς ὅλην τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ἀφαιρεθεῖσα ἡ ΖΗ πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν ΑΖ καὶ λοιπὴ ἡ ΓΖ πρὸς λοιπὴν τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχὴν. δεικτέον ἄρα, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΓΖ πρὸς τὴν τῶν ΓΑ, ΖΑ ὑπεροχὴν. Ἄλλως τὸ λς'. Ἐστῶσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Λ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΒΚ, ΓΔ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΑΔ καὶ διηγμένη ἡ ΛΚΔΗΖ καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΖ. δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ. ἐπεξεύχθω ἡ ΑΗ καὶ ἐκβεβλήσθω φανερόν οὖν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΑ τῇ ΕΗ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΑΕ. ἦχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΘΓ ἡ ΔΜ· ἴση ἄρα ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΜ. ἡ ἄρα ΜΗ ὑπεροχὴ ἐστὶ τῶν ΘΑ, ΑΗ, τουτέστι τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΔΜ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΗΘ τῇ ΑΕ, ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΗΜ, τουτέστι τὴν τῶν ΑΗΕ ὑπεροχὴν.

348 ἀλλ' ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν τῶν ΑΗΕ ὑπεροχὴν, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχὴν· προδεδεικται γάρ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχὴν. καὶ ὡς ἔν πρὸς ἔν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ὅλη ἡ ΑΖ πρὸς ΔΗ καὶ τὴν τῶν ΔΗΖ ὑπεροχὴν, τουτέστι τὴν ΗΖ. Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἐστῶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΚ ἡ ΑΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ, ΑΜ, ἔστιν, ὡς ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΕ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ, ἡ διπλασία τῆς ΜΗ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ· ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ διπλασία τῆς ΜΗ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ. καὶ ἐστὶ διπλασία τῆς ΜΗ ἡ ΑΗ· ἴση γὰρ ἡ ΑΚ τῇ ΔΗ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ· τῆς δὲ ΚΜ διπλασία ἡ ΔΚ· ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΚΔ πρὸς ΔΗ. συνθέντι, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ, ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ. Ἄλλως τὸ μδ'.

350 (1τ) Ἀποδεδειγμένων τῶν ΓΕ, ΖΗ παραλλήλων ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΒ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΓΕ, ἴσον τὸ ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΓΖΗ τοῦ ΑΗΖ διπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΑ, τὸ δὲ ΕΗΖ τοῦ ΒΗΖ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΖ τῷ ΒΗΖ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ. ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἡ ΑΒ ἡ μὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Δ κέντρου, ἦχθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΓΕ ἡ ΔΚΑ καὶ διὰ τῶν Κ, Λ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΚΜΝ, ΛΞΟ. οὕτως γὰρ δῆλον γενήσεται, ὅτι, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΞΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΔΝ, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΞΔΟ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ὑπὸ ΜΔΝ τῷ ὑπὸ ΓΔΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΔΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΔΖ. Εἰς τὸ νδ'. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ ἐπεὶ γάρ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΜ ἡ ΓΔ πρὸς ΔΝ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΜ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΔ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ, ἡ ΝΓ πρὸς ΓΛ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΝΓ, ἡ ΚΑ πρὸς ΛΓ.

352 καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ. Ἄλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΑΜ πρὸς ΜΔ καὶ τοῦ τῆς ΓΝ πρὸς ΝΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς ΜΔ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΝ πρὸς ΝΔ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ

διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὄν ἔχει ἢ ΕΒ πρὸς ΒΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς ΕΒ πρὸς ΒΔ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΔΝ πρὸς ΝΒ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἀλλ' ὥς μὲν ἢ ΔΝ πρὸς ΝΒ, ἢ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὥς δὲ ἢ ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἢ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ἔξει ἄρα τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὄν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ. ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ. Εἰς τὸ δ'.

- 354 (1t) Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὃ φίλε ἐταῖρε Ἀνθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσιν ἥτοι ἐφαπτόμεναι ἢ τέμνουσαι, ἔστι δὲ χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως, καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται· τὸ γὰρ ἐνδέον αἱ παραγραφαὶ πληροῦσιν. δέδεικται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὐχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει. ἀναγινώσκοντι οὖν σοι τὰ δὲ βιβλία δυνατὸν ἔσται διὰ τῆς τῶν κωνικῶν πραγματείας ἀναλύειν καὶ συντιθέναι τὸ προτεθέν· διὸ καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου φησὶ τὰ δὲ βιβλία ἀρκεῖν πρὸς τὴν ἀγωγὴν τὴν στοιχειώδη, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι περιουσιαστικώτερα. ἀνάγνωνθι οὖν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ εἴ σοι καταθυμῶς γένηται καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον ὑπ' ἐμοῦ ἐκτεθῆναι, καὶ τοῦτο θεοῦ ἡγουμένου γενήσεται.
- 356 ἔρρωσο. Ἄλλως τὸ κδ'. Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαί, ὥς εἴρηται, καὶ διήχθω, ὥς ἔτυχεν, ἢ ΔΕΓ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕΓ παράλληλος ἦχθω ἢ ΑΘ. εἰ οὖν ἐντὸς τῶν τομῶν πίπτει, ἢ ἐν τῷ ῥητῷ ἀπόδειξις ἀρμόσει· εἰ δὲ ἐφάπεται κατὰ τὸ Α, ἀμφοτέρων ἐπιψάσει τῶν τομῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἢ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος τῆς ἐτέρας τῶν τομῶν διάμετρος ἔσται καὶ τῆς λοιπῆς. δίχα ἄρα τέμνει κατὰ τὸ Ζ τὴν τε ΓΔ καὶ τὴν ΕΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄλλως τὸ αὐτό. Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαί, ὥς εἴρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κοινοῦ τμήματος αὐτῶν σημείον τι τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ διάμετρος ἦχθω ἢ ΗΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἦχθω ἢ ΓΔΕ. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐστὶν ἢ ΖΘ καὶ δίχα τέμνει τὴν ΑΒ, τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἢ ΑΒ. καὶ ἐστὶ παράλληλος αὐτῇ ἢ ΓΔΕ· δίχα ἄρα τέμνεται κατὰ τὸ Θ ἐν μὲν τῇ ΕΑΒΓ γεγραμμένη ἢ ΕΓ, ἐν δὲ τῇ ΔΑΒΓ ἢ ΔΓ.
- 358 ἴση ἄρα ἢ ΕΘ τῇ ΘΔ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἄλλως τὸ μγ'. Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἢ ΓΑΒΔ ἐκατέραν τῶν ἀντικειμένων τεμνέτω κατὰ τὰ Γ, Α, Β, Δ, ἀντικείμενη δὲ αὐτῆς ἔστω ἢ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἢ ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΒ, ΓΑ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ· ἔσται ἄρα τὸ Θ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΓΑΒ τομῆς. ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῆς ΓΑΒΔ αἱ ΚΗΛ, ΜΗΝ· φανερόν δὴ, ὅτι αἱ ΝΗΛ τὴν ΕΖ τομὴν περιέχουσιν. καὶ ἢ ΓΑ τέμνει τὴν ΓΑΞ τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Α· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐφ' ἐκάτερα τῇ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΔΒΟ, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῆς ΒΟ τομῆς καὶ τῆς ΛΗ. ὁμοίως δὴ καὶ ἢ ΔΒΘ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΓΑΞ, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῆς ΑΞ καὶ τῆς ΗΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΘΠ, ΘΡ μὴ συμπίπτουσιν ταῖς Α, Β τομαῖς περιέχουσιν τὰς ΝΗΛ ἀσυμπτῶτους καὶ πολλῶ μᾶλλον τὴν ΕΖ τομὴν, ἢ ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. Ἄλλως τὸ να'. Λέγω, ὅτι ἢ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται. ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Γ ἐντὸς τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν ΑΒ τομὴν· φανερόν δὴ, ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐκβαλλόμεναι οὐ συμπεσοῦνται ταῖς ἀσυμπτῶτοις τῆς Ε τομῆς, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτὰς καὶ πολὺ πλέον τὴν Ε τομὴν.

καὶ ἐπεὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, ἡ ΑΓ ἄρα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΗ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΔ. ἢ ἄρα Ε τομὴ οὐδεμιᾶ τῶν ΑΔ, ΒΗ τομῶν συμπεσεῖται.