

eul_wid: iaw-an

Εὐκλείδης ὁ Ἀλεξανδρεύς · Euclid of Alexandria

Elements, Books XI–XII (Supplement)

Στοιχεῖα (βιβλ. ια'–ιβ', ἀποσπάσματα)

Period: Ἑλληνιστική [Hellenistic](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Μαθηματικά [Mathematics](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

11 36 Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, B, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ A ἴση ἡ AE, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ED εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνία εὐθυγράμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ZΔ, ΔH, ΗΔ, ΔE, ZΔ, ΔΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ ΗΔ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΘΔ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔK στερεόν, καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ MΛ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνία εὐθυγράμμῳ τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔE, ED, ΔH, ΗΔ, ΔΘ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν MΛ, ΛN, NΛ, ΛΞ, ΞΛ, ΛM, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν NΛ, ΛM, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν NΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛM, καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἑκάτερα τῶν ΞΛ, ΛO, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΠ στερεόν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΔE, ἡ δὲ B ἑκατέρᾳ τῶν ΞΛ, ΛO, ἡ δὲ Γ τῇ ΔΘ, ὡς ἅρα ἡ ΔE πρὸς MΛ, οὕτως ἡ OΛ πρὸς τὴν ΔΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔE, OΛ, ΛM αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, ΘP παραλληλόγραμμον τῷ OΛMΞ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔE, OΛ, ΛM, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφεστᾶσιν αἱ ΗΔ, ΞΛ, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν ΘΔ, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν OΛ, ΛΞ, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν ΗΔ, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν ΞΛ, ΛM, καὶ ἀφηρημένα εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΗΔ, ΞΛ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H, Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΘΔ, ΔE, OΛ, ΛM ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK τῷ ΛΠ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν A, B, Γ, τὸ δὲ ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς B. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ᾧσιν ὁσαυδηποῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. ^[40]

11 37 καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὗται ἀνάλογον ἔσονται. ἔστωσαν ὁσαυδηποῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἡ AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ὡς ἡ AB πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ EZ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἑκάστης τῶν AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AK, ΓΛ, EM, HN. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ AK στερεὸν

πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο. ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ ΑΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ ΓΛ· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἢ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ πρὸς τὴν ΗΝ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ τε ΓΔ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν Ο, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἢ τε ΗΘ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν Ρ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ρ, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΗΝ στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣΤ τῷ ΗΝ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣΤ. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΛ στερεόν, οὕτως τὸ ΕΜ στερεὸν πρὸς τὸ ΣΥ στερεόν. τὸ ΕΜ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΗΝ, ΣΥ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΝ τῷ ΣΥ, καὶ ὁμολογός ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΣΤ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΣΤ, ἴση δὲ ἡ ΣΤ τῇ ΗΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ αὐτὴ δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου. ^[40]

11 38 κύβου γὰρ τοῦ ΑΒ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΑΕ, ΒΖ, ΗΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ ΓΔ, ΔΑ, ΑΕ, ΕΓ, ΒΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΒ κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΜ, ΠΞ, ΝΛ, ΟΡ, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΣΤ, διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ ΒΑ. λέγω, ὅτι ἡ ΣΤ δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν τοῦ κύβου διαμέτρων. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΣ, ΣΑ, ΒΤ, ΤΗ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΔΑ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΓΕ ἡμίσεια ἡ ΓΝ, τῆς δὲ ΔΑ ἡμίσεια ἡ ΛΑ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΝ τῇ ΛΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΣΝ τῇ ΣΛ ἴση. δύο δὲ αἱ ΓΝ, ΝΣ δυσὶ ταῖς ΛΑ, ΛΣ ἴσαι εἰσὶ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΝΣ γωνία τῇ ὑπὸ ΣΛΑ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ ΓΣ βάσει τῇ ΣΑ ἴση, καὶ τὸ ΓΝΣ τρίγωνον τῷ ΑΛΣ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν ΝΣ, ΣΑ· αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΝ, ΝΣ, ΣΑ ταῖς ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν ΛΣ, ΣΑ, ΑΣ, ΣΝ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· πρὸς δὲ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΝΣ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Σ δύο εὐθεῖαι αἱ ΣΓ, ΣΑ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΣΝ, ΝΣΑ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΣ τῇ ΣΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΒΤ τῇ ΤΗ ἐπ' εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΒ, ΑΗ τῇ ΕΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι παράλληλοι εἰσὶν, αἱ ΓΒ, ΑΗ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεξευγμένα εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΒΗ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΣΑ, τῆς δὲ ΒΗ ἡμίσεια ἡ ΒΤ. αἱ ΣΑ, ΒΤ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεξευγμένα εἰσὶν αἱ ΣΤ, ΑΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΣΥ τῇ ΥΤ, ἡ δὲ ΑΥ τῇ ΥΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ᾗ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾗ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. ^[35]

11 39 Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚ ΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἔχτω τρίγωνον βάσιν τὸ ΚΛΝ, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓΔΕ, καὶ ἔστω τὸ ΒΓΔΕ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΒΔ

παραλληλόγραμμον τοῦ ΝΚΛ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ ΝΚΛ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΝΛ. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν ΒΔ, ΝΛ ἰσοῦψῃ ἐστὶ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΔ, ΗΛ. ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΔ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΛ ἡμισὺ τὸ ΗΘΚΛΜ πρίσμα. καὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἄρα πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ^[15]

12 1 ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ, καὶ ἐν τοῖς ΑΒ ΓΔ, ΗΘΚΛ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΖ, ΘΝ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΑΕ, ΘΗΜ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΗΘΜ τριγώνῳ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΜ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΜΘ τῇ ὑπὸ ΗΝΘ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΘΗΝ ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΗΘΝ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΗΘΝ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ΘΗ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΘΝ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚΛΜ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ^[25]

12 2 ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἦτοι πρὸς ἑλάσσον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἑλάσσον τὸ Φ, καὶ τῷ ΕΖΗΘ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ ΦΧ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ. τὸ ΕΖΗΘ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισὺ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισὺ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τῶν τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢτοι ἡμισὺ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὲ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Χ χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ. δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε ΕΖΘ κύκλου καὶ τοῦ Χ χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μείζον ἢ τὸ ἡμισὺ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἡμισὺ μέρος, καὶ τοῦτο αἰεὶ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἑλάσσον ἔσται τοῦ Χ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖ ΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓ ΠΔΡ. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ ΛΗΜΘΝ, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖ ΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Χ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἑλάσσον τὸ Φ· ὅπερ

ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ^[45]

12 2 (50) ὡς δὲ τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζον τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον. Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μερίζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. ^[60]

12 3 ἔστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἔστω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΕΗ, ΗΛ, ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΖΔ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΖ τῇ ΖΔ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΕΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΖΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΒΘ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΑ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΘΛ. καὶ ἡ μὲν ΑΕ ἄρα τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΘΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΖΔ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον τῷ ΖΘΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΘ τρίγωνον τῷ ΖΔΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. τὸ δὲ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΖΘΚ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΖ, ΖΗ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΘΔ, ΔΚ κεῖνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΔΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΕΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΘΔ, ΔΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἐκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΔΚ ἴση ἐστὶν, βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΖΗ τρίγωνον τῷ ΘΔΚ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διήρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΕΗΛΒ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΛΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ἢ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΘΒΛ, ΕΖΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ ΕΒΖΘ καὶ τοῦ ΕΒΛΗ καὶ ἔτι τοῦ ΖΘΛΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΓΛ, ΖΘΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΗΓ, ΛΓΘΚ, ΖΗΛΘ. διήρηται ἄρα ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος: — Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ. ^[5]

12 4 ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓ, ΜΝΞ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα, καὶ διηρήσθω ἑκατέρω αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ABΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΛΗ, ὁμοίον ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΓ τριγώνῳ. τὸ ABΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΛ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΦ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΜΝΞ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΝΞ, οὕτως τὸ ΗΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΣΦΞ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΤΝ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΥΤ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ ABΓΔ πυραμίδι πρίσματα διπλασιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΛΗΓ, ΖΘΚ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα διπλασιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ ΣΦΞ, ΡΥΤ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ABΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΑΕΗ βάσις πρὸς τὴν ΜΠΣ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΕΗΖ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΠΣΡ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ ΖΘΚ βάσις πρὸς τὴν ΤΡΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΖΘΚΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΡΤΥΟ πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ABΓΔ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

[40]

12 5 ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓ, ΜΝΞ αἱ ABΓΔ, ΜΝΞΟ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Ο σημεῖα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΜΝΞΟ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς ἢτοι πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρὸς ἑλαττόν τὸ Ω, καὶ τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ Ω, Χ χωρία, καὶ διηρήσθω ἡ ΜΝΞΟ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἱ ἔσσονται ἐλάσσονες τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΜΠΣΡ, ΤΥΟ. ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ Χ. λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διηρήσθω ἡ ABΓΔ πυραμὶς ὁμοίως τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ ABΓΔ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, ὡς ἄρα ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ABΓΔ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. μείζων δὲ ἡ ABΓΔ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισματῶν πάντων. μείζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΜΝΞΟ πυραμίδι πρισματῶν πάντων. ἀλλὰ καὶ ἑλαττόν· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΜΝΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ΜΝΞΟ πυραμίδος στερεόν. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΝΞ

βάσις πρὸς τὴν ABΓ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ABΓΔ πυραμίδα. ὥς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν ABΓΔ πυραμίδα, οὕτως ἡ MNΞO πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ABΓΔ πυραμίδος στερεόν. ὥς ἄρα ἡ MNΞ βάσις πρὸς τὴν ABΓ βάσιν, οὕτως ἡ MNΞO πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς ABΓΔ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν MNΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς MNΞO πυραμίδος στερεόν. ^[45]

12 5 (50) ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλαττον. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν MNΞ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν MNΞO πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

12 6 ἔστω πρίσμα τὸ ABΓΔΕΖ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν ΓΖΔ. λέγω, ὅτι τὸ ABΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΒΖ, ΖΕ. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΓΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Ζ σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ Β σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ ABΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν ABΓΔ, ΕΑΕΖ, κορυφή δὲ τὰ Β, Ζ σημεία. τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. ^[15]

12 7 καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓ, ΕΖΗ αἱ ABΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεία. λέγω, ὅτι τῶν ABΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ABΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ABΓΔ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΔΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΕΖΗΘ ἑξαπλάσιον τὸ ΖΘΡΘ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΘ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος. ὥς δὲ ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν. ὥς ἄρα ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΟΡΘΖ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΔΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεῶν καὶ τῶν ABΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ABΓ πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος τῶν ABΓΔ, ΕΖΗΘ πρὸς τὸ τῆς ABΓΔ πυραμίδος ὕψος. τῶν ABΓΔ, ΕΖΗΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀντιπεπονηθέντων δὴ πάλιν τῶν ABΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὥς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ABΓΔ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ABΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ ὕψος πρὸς τὸ τῆς ABΓΔ πυραμίδος ὕψος, ὥς δὲ ἡ ABΓ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗ βάσιν, οὕτως ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΕΖΗΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ABΓΔ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε ABΓΔ, ΕΖΗΘ πυραμίδων καὶ τῶν ΒΔΜΛ, ΖΘΡΘ στερεῶν. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ΖΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΖΘΡΘ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΜΛ στερεὸν τῷ ΖΘΡΘ στερεῷ. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΒΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ, ABΓΔ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΖΘΡΘ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ΕΖΗΘ πυραμὶς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ABΓΔ πυραμὶς τῇ ΕΖΗΘ πυραμίδι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ^[45]

12 8 ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓ, ΕΖΗ αἱ ABΓΔ, ΕΖΗΘ, κορυφὰς δὲ τὰ Δ, Θ σημεία, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ γωνία,

ή δὲ ὑπὸ τῶν AB, BD τῇ ὑπὸ τῶν EZ, ZΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν AB, BG τῇ ὑπὸ τῶν ΘZ, ZH, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ BG τῇ ZH. λέγω, ὅτι ἡ ABΓΔ πυραμὶς πρὸς τὴν EZHΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ BG πρὸς τὴν ZH. συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ BΔΜΛ, ΖΘΡΟ στερεά. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ BG πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν ZE, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν AB, BG, EZ, ZH αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ ZP παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΕΘ ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ NB τῷ ΖΠ. ἀλλὰ τὰ μὲν BN, ΑΔ, BM τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΛΔ, MN, ΑΛ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ZP, ΕΘ, ΠZ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘΟ, ΕΟ, ΡΠ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα τὸ BΔΜΛ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΖΘΡΟ στερεῷ ὁμοίον ἐστὶ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ BΔΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΖΘΡΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ BG πρὸς τὴν ZH. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν BΔΜΛ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ ABΓ πυραμὶς τοῦ ΖΘΡΟ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ EZHΘ πυραμὶς· καὶ ἡ ABΓΔ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν EZHΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ BG πρὸς τὴν ZH. Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσον. ^[25]

12 9 ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν AB ΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἢ τοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ ΡΣ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ABΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ABΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ E, Z, H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν ΔΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνασταμένων πρισμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος καὶ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τοῦ Ρ στερεοῦ. λεληφθῶ καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ABΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ABΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ Ρ στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ABΓΔ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ABΓΔ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ AB, BG, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὸ EZHΘ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἔλαττον αὐτοῦ στερεοῦ.

[45]

12 9 (50) λεληφθῶ καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τῶν AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ABΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις

μέν ἐστιν ἡ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ ΑΕΒ ΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν. Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ^[65]

12 10 ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ὁ ΑΒ ΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΔ πρὸς ΖΘ. εἰ γὰρ μὴ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔξει ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ ΕΖΗ ΘΜΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ περὶ ἢ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ ἢ πρὸς τὸ μεῖζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἑλασσόν τὸ Α, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΕΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν ΕΞ, ΕΖ, ΖΟ, ΟΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΕ τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΞΖ, ΖΟΗ, ΗΠΘ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΞΖΟΗΗΠΘΡΕ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Α στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΞΖΟΗΠ ΘΡΕ πολυγώνῳ ὁμοίον τε πολύγωνον τὸ ΑΕΒΤΓΥ ΔΦΑ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολυγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, τρίγωνον ἐφεστάτω τὸ ΛΣΒ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΞΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐφεστάτω τὸ ΝΖΞ τρίγωνον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΚ, ΜΞ. ἐπεὶ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἱ τε ἄξονες καὶ οἱ διάμετροι τῶν βάσεων, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ὁ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΜΖ. ὡς ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΚΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΖ· καὶ περὶ ὀρθᾶς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΒ, ΜΝ, ΜΖ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΛ τρίγωνον τῷ ΜΝΖ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΖΝ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΝΖ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ περὶ ὀρθᾶς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΣΚΛ, ΞΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΚΛ τρίγωνον τῷ ΞΜΝ τριγώνῳ. ^[45]

12 10 (50) ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΓ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΞ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν ΒΚΣ, ΖΜΞ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΣ τρίγωνον τῷ ΖΜΞ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΚ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΞΜ πρὸς ΞΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΣΛ, οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς τὴν ΞΝ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΣ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΣΒ πρὸς τὴν ΞΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΝΞ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ. ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΝΖ, οὕτως ἡ ΛΣ πρὸς τὴν ΝΞ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΣΒ τρίγωνον τῷ ΝΞΖ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον,

ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ ΜΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΒΚΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΖΞ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜΘ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΚΒΣ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΜΕΖ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΘΖ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΣΚ, ΜΚ, ΦΚΑ, ΚΔΥ, ΥΚΓ, ΚΓΤ, ΚΤΒ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἐκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΞΜΕ, ΕΜΡ, ΜΘΡ, ΜΘΠ, ΜΠΝ, ΗΜΘ, ΜΟΖ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΣΒΤΓΜΟΦΑ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΞΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΓΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΞΘΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἔστιν ἄρα, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΣΒΤΓ ΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ^[95]

12 10 (100) ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΑΣΒΓΠΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσαν τὸ ΕΞΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΑΣΒΠΥΦΔ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μείζων ἄρα καὶ τὸ Α στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ ΕΞΖ ΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. λέγω δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΔΒ. ὡς δὲ τὸ Α στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΚΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗ ΜΜΝ κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κῶνου στερεόν. ὁ ΕΖΗΘΜΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΚΛ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΛ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ ΕΖΗΘΜΝ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλαττόν τι. ὁ ΑΒΓΔ ΚΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΜΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὧν αἱ βάσεις. ^[125]

12 11 ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ ΖΔ, ΖΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ, ἔσται ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος ἥτοι πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κῶνου στερεόν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἑλαττόν τὸ Α στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κῶνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κῶνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, Ο, Π, Ρ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου

τῶν ΕΞ, ΕΖ, ΖΘ, ΘΗ, ΗΠ, ΠΘ, ΘΡ, ΡΣ τριγώνων πυραμίδος ἰσοϋψῆς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὲ γινομένης αἰεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχῆς, ἥς ὑπερέχει ὁ ΖΘΜΝ κύκλος τοῦ Α στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΕΖ, ΘΗΠ, ΘΡΕ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ Α στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΓΒΤΓΥΔΦ πυραμίδος ἰσοϋψῆς τῷ κώνῳ. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΣΒΠΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖ ΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΕΖΟ ΗΠΘΡ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὸ Α στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ^[45]

12 11 (50) ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον, οὕτως τὸ Α στερεόν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. μεῖζων δὲ ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΑΣΒΤΓΥΔΦ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Λ σημεῖον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Α στερεόν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ ΕΕΖΟΗΠΘΡ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Ν σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΚΛ κῶνος πρὸς ἔλαττον τι τοῦ ΕΖΘΝ κώνου στερεόν. λέγω δὲ οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Α. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Α στερεόν πρὸς τὸν ΑΒΓ ΔΛ κῶνον. ὡς δὲ τὸ Α στερεόν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττον τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒ ΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττον τι τοῦ κώνου τοῦ ΑΒΓΔΛ στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζον τι τοῦ ΕΖΗ ΘΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον. καὶ ἐστὶ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου, τοῦ δὲ ΕΖΗΘΝ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔΛ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κύλινδρον. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. ^[80]

12 12 κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΘ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων. ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεία, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὅσοιδήποτε ὁ ΖΞ, ΖΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠΡΣ, ΤΥΦΧ ἴσοι ὄντες τοῖς ΑΒΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν

ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΗΡ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΒΗ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΚ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ ΚΑ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΚΑ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ Η κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΑ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΑΚ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. ^[40]

12 13 ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΗΒ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξονα, οὕτως ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΑ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΑΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΑΝ κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ εἰσὶν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΒΕ κύλινδρος τῷ ΓΜ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΝ πρὸς τὸν ΚΑ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΑΜ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι ἐστὶν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ ΒΕ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΑ ἄξονα, οὕτως ὅ τε ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσὶν. ^[20]

12 14 ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΕΖ, ΗΘ. λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. τὸ γὰρ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἦτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΚΔΘ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ βάσις τῇ ΓΔ βάσει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μείζων τὸ ΗΘ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ, καὶ ἀπὸ βάσεως τῆς ΓΔ, ὕψους δὲ τοῦ ΗΚ νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ ΓΔΚ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν

ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΦ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΚ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. τῶν ΑΒΖ, ΓΔΘ ἄρα κῶνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονηθέντων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΒΞ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει ἦτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΘ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΗΘ ὕψος τῷ ΕΖ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὴ ἴσον τὸ ΕΖ ὕψος τῷ ΗΘ ὕψει, καὶ ἔστω μείζον τὸ ΗΘ τῷ ΕΖ, καὶ κείσθω τὸ ΕΖ ἴσον τῷ ΗΚ. ^[45]

12 14 (50) ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ ΑΒ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΕΖ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΚ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, ὡς δὲ τὸ ΗΘ ὕψος πρὸς τὸ ΗΚ ὕψος, οὕτως ὁ ΓΔΘΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΓΔΘ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ΑΒΖ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ ΓΔΘ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου. ^[60]

12 15 ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΕΖ. ἤχθωσαν τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ΖΘ. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΕΖ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΓΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΔ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλήψομεν τινα περιφέρειαν, ἥτις ἔσται ἐλάσσων τῆς ΗΓ. λελήφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΓΜ. ἐκατέρα ἄρα τῶν ΚΓ, ΓΜ πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓΔ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΚΜ, ἡ δὲ ΗΘ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου, ἡ ΚΜ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. πολλῶν ἄρα οὐδετέρα τῶν ΚΓ, ΓΜ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ ΚΓ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἐξῆς καὶ ἐπιζευγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖ, καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. ^[25]

12 16 ἐννοεῖσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσαι τὸ Α. δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. ποιήσει δὴ τομὰς μεγίστους κύκλους. ποιεῖτω τοὺς ΑΒ ΓΔ, ΕΖΗ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ΒΓΔ κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ, ὁ δὲ ΕΖΗ ἐν τῇ ἐλάσσονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ ΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΕ, ΓΔ. καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων ΒΓΔ, ΕΖΗ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗ, καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΑ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΝ καὶ

συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ δι' ἐκατέρας τῶν ΓΔ, ΜΞ καὶ τῆς ΑΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσει δὴ τομας κύκλους. ποιεῖτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ ΓΝΔ, ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΓΔ, ΓΝΔ, ΜΝΞ κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ἐκατέρῳ τῷ ΓΝ, ΜΝ τῇ ΜΓ ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΓΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΝ, ΝΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΟ, ΤΠ, ΕΡ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἦχθω ἡ ΟΦ, ἀπὸ δὲ τοῦ Υ ἐπὶ τὴν ΜΞ ἡ ΥΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΝΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΝΑ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστι πρὸς τὸ ΒΓ ἐπίπεδον. ἐν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΝΑ ἐπιπέδων ἐστὶν ἡ ΓΝΔ κύκλος. ὁ ΓΝΔ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΒΓΔ κύκλον. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΝΔ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΒΓΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν τῷ ΓΝΔ ἐπιπέδῳ ἡ ΟΦ, ἡ ΟΦ ἄρα καὶ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΧ τῷ ΒΓΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΥΧ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΥΜ τῇ ΟΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΜ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΟΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΥΜ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΜΧ. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΦ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ καὶ ΔΓΦ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΜΧ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΞΜ. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΦ τῇ ΜΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΓΑ ὅλη τῇ ΑΜ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΜΓ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓΘ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΥ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΟ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΓΦΟ γωνία· τῷ δ' ἀπὸ τῆς ΜΥ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ· ὀρθή γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΧΟ γωνία· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΦ, ΦΟ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΧ, ΧΥ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΧ. ^[55]

12 16 (50) λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΟ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΧΥ ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΟ τῇ ΥΧ. ἔστι δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ ΦΧ, ΟΥ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα ΦΧ τῇ ΓΜ ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἡ ΓΜ ἄρα τῇ ΟΥ ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐφ' ἐκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεία τὰ Ν, Μ, Ο, Γ, καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΜΥ, ΓΟ. αἱ ἄρα ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ, ΟΥ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ ΥΜΓΟ τετράπλευρον. τὸ ἄρα ΥΜΓΟ τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΡΣ τετραπλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΣΡΝ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΥ τῇ ΓΟ, καὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΜΓ τῇ ΥΟ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ Μ, Γ, Υ, Ο σημεία. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΜΓΥΟ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ. τὸ Ψ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ Μ, Γ, Ο, Υ σημεία κύκλου. ἐπεζεύχθω ἡ ΨΓ. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΜΓΟΥ, καὶ τρεῖς αἱ ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΓ τῆς ΥΟ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΦ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἦχθω ἀπὸ τοῦ ΜΕ ἐπὶ τὴν ΓΦ κάθετος ἡ ΜΩ. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΓΩ τῆς ΩΔ, ὥς δὲ ἡ ΓΩ πρὸς τὴν ΩΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΩΜ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δις ἀπὸ τῶν ΜΩ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν ΓΩ, ΩΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΓ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δις ἀπὸ τῶν ΜΩ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΜΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ μείζον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΜ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΛ. ὀρθή γάρ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ψ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ. ὀρθή γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΩΑ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν ΓΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΩ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΨ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΩ. μείζων ἄρα ἡ ΨΑ τῆς ΑΩ· ἡ δὲ ΑΩ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῶν ἄρα ἡ ΨΑ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ ΑΨ κάθετος ἐπὶ τὸ ΜΓΟΥ ἐπίπεδόν ἐστιν. τὸ ἄρα ΜΓΟΥ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἐκάστη τῶν λοιπῶν τεταρτημορίων τὰ

αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἔξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ^[95]

12 16 (100) Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγράψωμεν, ἔσται ἐκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ καὶ τὸ ΝΟΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἐκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὰ ΜΓΟΥ, ΥΟΠΤ, ΤΠΡΣ τετράπλευρα καὶ τὸ ΝΣΡ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ἐκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὥς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυέδρον πρὸς ὅλον τὸ πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας: ~ Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν διαμέτρων. ^[115]

12 17 ἔστωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἔξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα ἥτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔΕΖ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολυέδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῷ ΔΕΖ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολυέδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολυέδρον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολυέδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἐχέτω τῆς ΔΕΖ σφαίρας πρὸς τὴν Λ ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. ὥς δὲ ἡ Λ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας. καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

[45]