Eulogikon

Ancient Greek Texts — Free & Open source

eul_wid: iaw-ak

Εὐκλείδης ὁ Ἀλεξανδρεύς · Euclid of Alexandria

Elements, Alternative Demonstrations (Books V–VI)

Στοιχεῖα· Ἄλλαι ἀποδείξεις (βιβλ. ε′–ς′)

Period: *Ἑλληνιστική* Hellenistic
Dialect: *Κοινὴ τεχνική* Technical Koine
Domain: *Μαθηματικά* Mathematics
Format: *Πραγματεία* Treatise

229 ε′, ιθ′ Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν, ἐπειδήπερ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἔσται καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οὐκέτι δὲ καὶ ἀντιστρέφει· ἐὰν ᾖ ὡς πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐ πάντως ἔσται καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολίων ἢ ἐπιτρίτων λόγων ἢ τῶν τοιούτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ς′, κ′ ΑΛΛΩΣ Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα. Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ. λέγω, ὅτι ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ.

230 ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ. πάλιν ἐπεὶ ὅμοιόν [ἐστι] τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΓΕΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ς′, κζ′ ΑΛΛΩΣ Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΛΒ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΕΒ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῷ ΛΒ.

231 λέγω, ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ τοῦ ΑΕ. Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒ τῷ ΛΒ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΖ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ΛΖ τοῦ ΚΕ. ἴσον δὲ τὸ ΛΖ τῷ ΔΛ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ. κοινὸν [προσκείσθω] τὸ ΚΔ. ὅλον ἄρα τὸ ΑΛ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ς′, λ′ ΑΛΛΩΣ Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ. δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

232

Eulogikon public reading copy · View original HTML at eulogikon.org

ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ϛʹ, λαʹ ΑΛΛΩΣ Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις [τε] καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

233 ϛʹ, λγʹ Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ. καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστιν ἴση, ἴσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστιν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι.

234 ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΒΗΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΒΓ, ΗΓΚ ἴσος ἐστίν. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΛΚ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τῷ ΕΘΝ τομεῖ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΕΘΖ τομέων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς· καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΗΛ τομεὺς τοῦ ΕΘΝ τομέως, καὶ εἰ ἴση, ἴσος, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει.

235 ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα. [Πόρισμα] Καὶ δῆλον, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν. Vulgo ζʹ, κʹ Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. καὶ ἐὰν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. λέγω, ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Δ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ Β. Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ

Eulogikon public reading copy · View original HTML at eulogikon.org

ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ἐκ [τῶν] Β, Δ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ.

236 ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Vulgo ζʹ, κβʹ Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος οἱ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Γ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ζʹ, λαʹ ΑΛΛΩΣ Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α.

237 λέγω, ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β. λέγω, ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μή, σύνθετός ἐστιν. μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ἀλλ' ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ ἐλάσσων ὢν τοῦ Β· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετός ἐστι. πρῶτος ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. θʹ, κβʹ ΑΛΛΩΣ Ἢ καὶ οὕτως· ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΒ περιττός ἐστιν, ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτοῦ μονὰς ἡ ΖΒ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΖ ἄρτιός ἐστιν.

239 πάλιν ἐπεὶ ὁ ΒΓ περιττός ἐστιν, καί ἐστι μονὰς ἡ ΖΒ, ἄρτιος ἄρα ὁ ΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΖ ἄρτιος. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Eulogikon public reading copy · View original HTML at eulogikon.org