

eul_wid: iaw-am

Εὐκλείδης ὁ Ἀλεξανδρεὺς · Euclid of Alexandria

Elements, Alternative Demonstrations (Book XI)

Στοιχεῖα· Ἄλλαι ἀποδείξεις (βιβλ. ια')

Period: Ἑλληνιστική [Hellenistic](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Μαθηματικά [Mathematics](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

- 1 (n) Ad libr. XI prop. 22 Ἄλλως Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαί ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ AB, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαί ἴσαι εἰσίν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαί, καὶ μείζων ἢ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ΑΓ μετὰ ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι. λέγω, ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονες εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἢ ΒΛ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυοὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαί τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονες εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυοὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζων, βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΑΓ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονες εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονες εἰσι· πολλῶν ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονες εἰσιν. τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ad libr. ^[35]
- 2 (n) XI prop. 23 Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾷς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΞΛ. λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση. καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῶν γὰρ τὸ ἀδύνατον μείζων. ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως, ὧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΑΜΝ τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ

AB τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ AB, BG δύο ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AG βάσει τῇ ΜΛ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστὶν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δύο ταῖς ABΓ, ΗΘΚ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ABΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ. ἐξῆς δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιτέδω πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΕΡ καὶ ἴσην αὐτῇ ἀποθώμεθα, ὥ μείζων δύναται τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΕΟ, τῇ δὲ BG ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ BG, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΕΟ τῇ ΞΠ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΕΟ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΕΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. ^[45]

2 (50) μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΕΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστὶ μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AB, BG δύο ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΟΠ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ καὶ τὴν ΕΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΕΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB, BG δύο ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δύο ταῖς ΣΟ, ΟΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσει τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΞΣ, ΞΤ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΣΤ μείζων, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία τῆς ὑπὸ ΞΕΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΞΕΤ ταῖς ὑπὸ ABΓ, ΗΘΚ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ABΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον. Vulgo XI prop. ^[75]

3 (n) 38 Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾗ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιτέδω τῷ AB πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ AB ἐπιτέδω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ AB ἐπιτέδω κάθετος ἔστω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιτέδω πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιτέδω πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν, ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ οὕσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιτέδω, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ τῷ AB ἐπιτέδω πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθὴ ἐστὶν. τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ. ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ad libr. ^[20]

4 (n) XII prop. 4 Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ABΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΒΚΛΞ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΠΕΡΦ, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ,

πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. συνθέντι ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰς ΜΝΟΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΝΟ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΜΝΟΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμαμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἀπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ad libr. ^[30]

5 (n) XII prop. 17 Δεικτέον δὴ καὶ ἐτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΑ', καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΑ'. τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα περιφέρειαν, ἣ ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτετινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΑ'. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΑ'. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία. μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΚΒ μείζων ἐστὶν ἡ ΗΑ'· πολλῶν ἄρα ἡ ΗΑ' μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΑ' τῇ ΑΒ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΑ' τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΑ' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ', τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΑ' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΑ'· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΨΑ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. Ad libr. ^[20]

6 (n) XIII prop. 6 Ἐὰν ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστὶ. ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον. σύμμετρον τμημὰ ἐστὶ τὸ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐκάτερα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστὶ. κείσθω τῆς ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΔΓ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΔΑ μήκει. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἐκάτερα· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. τὸ δὲ α ἀποτομὴν παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΒ. ἐκάτερα ὁ ἄρα τὸν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομή ἐστὶν. ἐὰν ἄρα ῥητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστὶν. Ad libr. ^[20]

7 (n) XIII prop. 5 Ἄλλως Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφοτέρος ἡ ὅλη καὶ τὸ μείζον τμημὰ πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμημὰ. Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμημὰ τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. Κείσθω γὰρ τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μείζον τμημὰ ἐστὶ τὸ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ

πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΔΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· ἀνάπαλιν ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ· συνθέντι ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. ἴση δὲ ἔστιν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΔΑ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἔστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ad libr. ^[20]

8 (n) XIII prop. 1—5 Τί ἔστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἔστι σύνθεσις. Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Σύνθεσις δὲ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Τοῦ α θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμημὰ ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δις ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· διπλῇ γάρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστὶν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἔστι δὲ διπλῇ γάρ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ. Σύνθεσις Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΒΑ τὸ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τοῦ β θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῇ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἔστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἔστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον· διπλῇ γάρ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ^[45]

8 (50) τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἔστι δὲ. Σύνθεσις Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΑ. διελόντι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΑΔ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα

καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τοῦ γ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμημὰ ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ· διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἔστι δὲ διπλῇ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ. Ἡ σύνθεσις Ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ. συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τοῦ δ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμημὰ τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ. ^[95]

8 (100) Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· διελόντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Ἡ σύνθεσις Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐστὶ μείζον τμημὰ ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· συνθέντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ. ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τοῦ ε θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμημὰ ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΑΒ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δὲ ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. Ἡ σύνθεσις Ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ad libr. ^[140]

9 (n) XIII prop. 17 Ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ ΑΓ. προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ. ῤητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ, αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῤηταὶ εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. ῤητὴ δὲ ἡ ΑΒ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῤητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. ἐκάτερον ἄρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀποτομὴ ἐστὶν ὁ προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἢ ΑΔ, τῆς δὲ ΓΒ ἢ ΓΔ. Ad libr. ^[5]

10 (n) XIII prop. 18 Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ. Ἐπεὶ γὰρ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῇ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΒ τριγώνῳ. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς

BZ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἔν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζον ἐστιν. μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ. μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. πολλῶ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΒΝ μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστιν, δείξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒΝ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΒ ἐστὶν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἔν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ δύο τῶν ἀπὸ ΒΝ μείζον ἐστὶν. ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἕξ τῶν ἀπὸ ΒΝ μείζονά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ^[20]