

eul_wid: iaw-ag

Εὐκλείδης ὁ Ἀλεξανδρεύς · Euclid of Alexandria

On Divisions of Figures

Ἀποσπάσματα

Period: Ἑλληνιστική [Hellenistic](#)
Dialect: Κοινή τεχνική [Technical Koine](#)
Domain: Μαθηματικά [Mathematics](#)
Format: Πραγματεία [Treatise](#)

- 227 (1t) Περὶ διαιρέσεων. Proclus Comm. in Eucl. p. 68, 23 sqq. (ed. Friedlein): Πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου [Euclidis] μαθηματικὰ συγγράμματα θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά· τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ Ὀπτικά καὶ τὰ Κατοπτρικά, τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις, ἔτι δὲ τὸ Περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Idem ibid. p. 144, 18 sqq.: δεύτερον δὲ ἀπὸ τῆς ὁλότητος τελειοῦται [sc. ὁ τοῦ σχήματος λόγος] τῆς εἰς τὰ ἀνόμοια μέρη διακρινομένης, ὅθεν δὴ καὶ αὐτὸς ἐκάστω τῶν εἰδῶν ἐπιφέρει τὸ ὅλον, καὶ τῶν σχημάτων ἕκαστον εἰς διάφορα αὐτῶν εἶδη τέμνεται. καὶ γὰρ ὁ κύκλος εἰς ἀνόμοια τῷ λόγῳ καὶ ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων διαιρετόν ἐστιν, ὃ καὶ αὐτὸς ὁ Στοιχειωτῆς ἐν ταῖς Διαιρέσεσι πραγματεύεται τὸ μὲν εἰς ὅμοια τὰ δοθέντα σχήματα διαιρῶν, τὸ δὲ εἰς ἀνόμοια. Ψευδάρια.
- 236 (1t) Proclus Comm. in Eucl. p. 70, 1 sqq. (ed. Friedlein): Ἐπειδὴ δὲ πολλὰ φαντάζεται μὲν ὡς τῆς ἀληθείας ἀντεχόμενα καὶ ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φέρεται δὲ εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν πλάνην καὶ τοὺς ἐπιπολαιότερους ἐξαπατᾷ, μεθόδους παραδέδωκεν [sc. Euclides] καὶ τῆς τούτων διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμνάζειν μὲν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύτης πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ἐντίθησι, Ψευδαρίων ἐπέγραψεν τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διαριθμησάμενος καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι καὶ τῷ ψεύδει τὸ ἀληθὲς παραθεῖς καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπάτης συναρμόσας. τοῦτο μὲν οὖν τὸ βιβλίον καθαρτικόν ἐστι καὶ γυμναστικόν. Cfr. Pseudo—Alexander siue Michael Ephesius in Aristot. Soph. Elenchos p. 76, 20 (ed. Wallies): Οὐ μόνον δὲ τοὺς μὴ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ὠρμημένους τῆς ἐπιστήμης, ὅφ' ἦν ἐστι τὸ πρόβλημα, δοκοῦντας δὲ εἶναι, ψευδεῖς ἐλέγχους φησίν, ἀλλὰ καὶ τοὺς ἐκ τῶν οἰκείων μὲν τῆς ἐπιστήμης ἀρχῶν, κατὰ τι δὲ παραλογιζομένους, οἳ αἰεὶ τὰ τοῦ Εὐκλείδου ψευδογραφήματα. Scholia in Platonis Theaet. 191 b (p. 248 ed. Hermann): ἐπειδὴν ἡμᾶς ἐρωτᾷ περὶ τῶν ἔξω τῆς αἰσθήσεως, εἰ δυνατόν συστήναι ψευδοδοξίαν, οἷον ἐπὶ τῶν παρὰ τοῖς γεωμέτραις καλουμένων ψευδαρίων. οὐ γὰρ διὰ μῖξιν αἰσθήσεως ψευδογραφοῦσιν. Πορίσματα.
- 237 (1t) Proclus Comm. in Eucl. p. 212, 12 sqq.: Τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδῃ γεγραμμένα πορίσματα, λέγεται δὲ ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν ὥσπερ τι κέρδος ὃν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. Idem ibid. p. 301, 21 sqq.: Ἐν τι τῶν

γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πόρισμα. τοῦτο δὲ σημαίνει διττόν· καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν οἷον ἔρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὐρέσεως δὲ χρήζει καὶ οὔτε γενέσεως μόνης οὔτε θεωρίας ἀπλῆς. ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δεῖ, καὶ ὄντων δὴ τινων πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις, τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι ἢ ἀφελεῖν ἢ προσθέσθαι, ταῦτα πάντα ποιήσιν τινος ἀπαιτεῖ· τοῦ δὲ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν ἢ δύο δοθέντων συμμετρων μεγεθῶν τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν ἢ ὅσα τοιάδε μεταξύ πῶς ἐστὶ προβλημάτων καὶ θεωρημάτων. οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητούμενων, ἀλλ' εὐρέσεις, οὔτε θεωρία ψιλή· δεῖ γὰρ ὑπ' ὅψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὁμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον. τοιαῦτα ἄρα ἐστὶν καὶ, ὅσα Εὐκλείδης πορίσματα γέγραφε γ βιβλία Πορισμάτων συντάξας. ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων πορισμάτων παρείσθω λέγειν. Pappus Συναγ.

238 (3) VII 3 p. 636, 18 sqq. (ed. Hultsch): Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶν τοιαύτη· Εὐκλείδου Δεδομένων βιβλίον α , Ἀπολλωνίου Λόγου ἀποτομῆς β , Χωρίου ἀποτομῆς β , Διωρισμένης τομῆς δύο, Ἐπαφῶν δύο, Εὐκλείδου Πορισμάτων τρία κτλ. Idem ibid. VII 13 p. 648, 18 sqq.: Μετὰ δὲ τὰς Ἐπαφὰς ἐν τρισὶ βιβλίοις Πορίσματά ἐστὶν Εὐκλείδου, πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων, καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πληθὸς οὐδὲν προστεθείκασι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσι πρώτου, χωρὶς εἰ μὴ τινες τῶν πρὸ ἡμῶν ἀπειρόκαλοι δευτέρας γραφὰς ὀλίγοις αὐτῶν παρατεθείκασιν ἐκάστου μὲν πληθὸς ὠρισμένον ἔχοντος ἀποδείξεων, ὡς ἐδείξαμεν, τοῦ δ' Εὐκλείδου μίαν ἐκάστου θέντος τὴν μάλιστα πῶς ἐμφαίνουσιν. ταῦτα δὲ λεπτήν καὶ φυσικὴν ἔχει θεωρίαν καὶ ἀναγκαίαν καὶ καθολικωτέραν καὶ τοῖς δυναμένοις ὁρᾶν καὶ πορίζειν ἐπιτερπῆ. ἅπαντα δὲ αὐτῶν τὰ εἶδη οὔτε θεωρημάτων ἐστὶν οὔτε προβλημάτων, ἀλλὰ μέσον πῶς τούτων ἐχούσης ιδέας, ὥστε τὰς προτάσεις αὐτῶν δύνασθαι σχηματίζεσθαι ἢ ὡς θεωρημάτων ἢ ὡς προβλημάτων, παρ' ὃ καὶ συμβέβηκε τῶν πολλῶν γεωμετρῶν τοὺς μὲν ὑπολαμβάνειν αὐτὰ εἶναι τῷ γένει θεωρήματα τοὺς δὲ προβλήματα ἀποβλέποντας εἰς τὸ σχῆμα μόνον τῆς προτάσεως.

239 τὴν δὲ διαφορὰν τῶν τριῶν τούτων ὅτι βέλτιον ᾗδεσαν οἱ ἀρχαῖοι, δῆλον ἐκ τῶν ὅρων. ἔφασαν γὰρ θεωρήματα μὲν εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς ἀπόδειξιν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πρόβλημα δὲ τὸ προβαλλόμενον εἰς κατασκευὴν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου, πόρισμα δὲ τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου. μετεγράφη δὲ οὗτος ὁ τοῦ πορίσματος ὅρος ὑπὸ τῶν νεωτέρων μὴ δυναμένων ἅπαντα πορίζειν, ἀλλὰ συγχρωμένων τοῖς στοιχείοις τούτοις καὶ δεικνύντων αὐτὸ μόνον τοῦθ', ὅτι ἔστι τὸ ζητούμενον, μὴ πορίζοντων δὲ τοῦτο καὶ ἐλεγχόμενων ὑπὸ τοῦ ὅρου καὶ τῶν διδασκομένων. ἔγραψαν δὲ ἀπὸ συμβεβηκότος οὕτως· πόρισμά ἐστὶν τὸ λείπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος. τούτου δὲ τοῦ γένους. τῶν πορισμάτων εἶδος ἐστὶν οἱ τόποι καὶ πλεονάζουσιν ἐν τῷ ἀναλυομένῳ· κεχωρισμένον δὲ τῶν πορισμάτων ἡθροισται καὶ ἐπιγράφεται καὶ παραδίδοται διὰ τὸ πολύχυτον εἶναι μᾶλλον τῶν ἄλλων εἰδῶν [τῶν γοῦν τόπων ἐστὶν ἃ μὲν ἐπιπέδων ἃ δὲ στερεῶν ἃ δὲ γραμμικῶν καὶ ἔτι τῶν πρὸς μεσότητι]. συμβέβηκε δὲ καὶ τοῦτο τοῖς πορίσμασιν τὰς προτάσεις ἔχειν ἐπιτετμημένας διὰ τὴν σκολιότητα πολλῶν συνήθως συνυπακουόμενων· ὥστε πολλοὺς τῶν γεωμετρῶν ἐπὶ μέρους ἐκδέχεσθαι, τὰ δὲ ἀναγκαιότερα ἀγνοεῖν τῶν σημαινομένων. περιλαβεῖν δὲ πολλὰ μὲν προτάσει ἥκιστα δυνατόν ἐν τούτοις διὰ τὸ καὶ αὐτὸν Εὐκλείδην οὐ πολλὰ ἐξ ἐκάστου εἵδους τεθεικέναι, ἀλλὰ δείγματος ἕνεκα ἐκ τῆς πολυπληθείας ἐν ἡ ὀλίγα.

240 πρὸς ἀρχὴν δὲ ὅμως τοῦ πρώτου βιβλίου τέθεικεν ὁμοειδῆ τινα ἐκείνου τοῦ δαψιλεστέρου εἵδους τῶν τόπων ὡς ἰ τὸ πληθὸς. διὸ καὶ περιλαβεῖν ταύτας μὲν προτάσει ἐνδεχόμενον

εὐρόντες οὕτως ἐγράψαμεν· ἐὰν ὑπτίου ἢ παρυπτίου τρία τὰ ἐπὶ μιᾷ σημείᾳ ἢ παραλλήλου τῆς ἐτέρας τὰ δύο δεδομένα ἦ, τὰ δὲ λοιπὰ πλὴν ἐνὸς ἄπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, καὶ τοῦθ' ἄψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. τοῦτ' ἐπὶ τεσσάρων μὲν εὐθειῶν εἴρηται μόνων, ὧν οὐ πλείονες ἢ δύο διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἰσίν, ἀγνοεῖται δὲ ἐπὶ παντὸς τοῦ προτεινομένου πλήθους ἀληθὲς ὑπάρχον οὕτως λεγόμενον ... τὸν δὲ Στοιχειωτὴν οὐκ εἰκὸς ἀγνοῆσαι τοῦτο, τὴν δ' ἀρχὴν μόνην τάξαι. καὶ ἐπὶ πάντων δὲ τῶν πορισμάτων φαίνεται ἀρχὰς καὶ σπέρματα μόνᾳ πλήθει πολλῶν καὶ μεγάλων καταβεβλημένος, ὧν τὰ γένη οὐ κατὰ τὰς τῶν ὑποθέσεων διαφορὰς διαστέλλειν δεῖ, ἀλλὰ κατὰ τὰς τῶν συμβεβηκότων καὶ ζητουμένων. αἱ μὲν γὰρ ὑποθέσεις ἅπασαι διαφέρουσιν ἀλλήλων εἰδικώταται οὔσαι, τῶν δὲ συμβαινόντων καὶ ζητουμένων ἕκαστον ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὃν πολλαῖς ὑποθέσεσι διαφόροις συμβέβηκε. ποιητέον οὖν ἐν μὲν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ ταῦτα τὰ γένη τῶν ἐν ταῖς προτάσεσι ζητουμένων ἐν ἀρχῇ μὲν τοῦ βιβλίου διάγραμμα τοῦτο· ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείαν κλασθῶσιν, ἀποτέμνη δὲ μία ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς τῷ ἐπ' αὐτῆς δεδομένῳ σημείῳ, ἀποτεμεῖ καὶ ἡ ἐτέρα ἀπὸ ἐτέρας λόγον ἔχουσιν δοθέντα· ἐν δὲ τοῖς ἐξῆς I.

241 ὅτι τόδε τὸ σημεῖον ἄπτεται θέσει δεδομένης εὐθείας. II. ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τήνδε δοθείς. III. ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς ἀποτομήν. IV. ὅτι ἡδε θέσει δεδομένη ἐστίν. V. ὅτι ἡδε ἐπὶ δοθὲν νεύει. VI. ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. VII. ὅτι λόγος τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε κατηγμένην. VIII. ὅτι λόγος τοῦδε τοῦ χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆσδε. IX. ὅτι τοῦδε τοῦ χωρίου ὃ μὲν τι δοθὲν ἐστίν, ὃ δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. X. ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἢ τόδε μετὰ τινος χωρίου δοθὲν ἐστίν, ἐκεῖνο δὲ λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. XI. ὅτι ἡ, μεθ' ἧς πρὸς ἡν ἡδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. XII. ὅτι τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆσδε ἴσον ἐστίν τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. XIII. ὅτι λόγος τῆσδε καὶ τῆσδε πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. XIV. ὅτι ἡδε ἀποτεμένει ἀπὸ θέσει δεδομένων δοθὲν περιεχούσας. Ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ ὑποθέσεις μὲν ἕτεραι, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πλείονα τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, περισσὰ δὲ ταῦτα XV.

242 ὅτι τόδε τὸ χωρίον ἢ τόδε μετὰ δοθέντος λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. XVI. ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς ἀποτομήν. XVII. ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρων τῶνδε καὶ συναμφοτέρων τῶνδε πρὸς ἀποτομήν. XVIII. ὅτι τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ συναμφοτέρου τῆσδε τε καὶ τῆς, πρὸς ἡν ἡδε λόγον ἔχει δοθέντα, καὶ τὸ ὑπὸ τῆσδε καὶ τῆς, πρὸς ἡν ἡδε λόγον ἔχει δοθέντα, λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. XIX. ὅτι λόγος συναμφοτέρου πρὸς τινὰ ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. XX. ὅτι δοθὲν τὸ ὑπὸ τῶνδε. Ἐν δὲ τῷ τρίτῳ βιβλίῳ αἱ μὲν πλείονες ὑποθέσεις ἐπὶ ἡμικυκλίων εἰσίν, ὀλίγαι δὲ ἐπὶ κύκλου καὶ τμημάτων, τῶν δὲ ζητουμένων τὰ μὲν πολλὰ παραπλήσια τοῖς ἔμπροσθεν, περισσὰ δὲ ταῦτα· XXI. ὅτι λόγος τοῦ ὑπὸ τῶνδε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶνδε. XXII. ὅτι λόγος τοῦ ἀπὸ τῆσδε πρὸς ἀποτομήν. XXIII. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶνδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπὸ τοῦδε ἕως δοθέντος. XXIV. ὅτι τὸ ἀπὸ τῆσδε τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἀπολαμβανομένης ὑπὸ καθέτου ἕως δοθέντος. XXV. ὅτι συναμφοτέρος ἡδε καὶ πρὸς ἡν ἡδε λόγον ἔχει δοθέντα λόγον ἔχει πρὸς ἀποτομήν. XXVI. ὅτι ἔστιν τι δοθὲν σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τούτῳ δοθὲν περιέξουσιν τῷ εἶδει τρίγωνον. XXVII. ὅτι ἔστιν τι δοθὲν σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τόνδε ἴσας ἀπολαμβάνουσι περιφέρειας. XXVIII.

243 ὅτι ἡδε ἦτοι παρὰ θέσει ἐστίν ἢ μετὰ τινος εὐθείας ἐπὶ δοθὲν νευούσης δοθεῖσαν περιέχει γωνίαν. ἔχει δὲ τὰ τρία βιβλία τῶν Πορισμάτων λήμματα λη, αὐτὰ δὲ θεωρημάτων ἐστὶν ροα. Pappus Συναγ. VII 193 p. 866, 1 sqq. Lemmata ad Porismata. Πορισμάτων α' β' γ'. Τοῦ πρώτου εἰς τὸ πρῶτον πόρισμα. α'. Ἐστω καταγραφή ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἔστω, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΚ· ὅτι παράλληλός ἐστίν ἡ ΘΚ τῇ ΑΓ. ἤχθω διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΖΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ,

ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστιν, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΖ, τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΛ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΗ τῇ ΒΓ.

244 ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἐν παραλλήλῳ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΑΓ. Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ἀνάπαλιν ἐστὶν, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ. συνθέντι καὶ ἐναλλάξ καὶ ἀναστρέψαντί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΖ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ τοῦ τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ, ὁ δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἔκ τε τοῦ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ καὶ τοῦ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· ὁ ἄρα συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ, ὁ αὐτός ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ. καὶ κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ λόγος· λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ΕΚ πρὸς τὴν ΚΖ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΑΓ. Εἰς τὸ δεύτερον πόρισμα. β'. Καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΑΖ τῇ ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ, Κ, Ζ. ἤχθω διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΗΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ.

245 ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΗΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΗΛ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΕΘ τῇ ΗΛ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ, Λ, Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. γ'. Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΑ, ΔΑ διήχθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΕ, ΘΔ· ὅτι ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΖΓΑ παράλληλος ἡ ΚΛ, καὶ αἱ ΔΑ, ΑΒ συμπιπτεύωσαν αὐτῇ κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία, διὰ δὲ τοῦ Λ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΛΜ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΕΘ ἐπὶ τὸ Μ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ, ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΜ· καὶ γὰρ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΗ ἐν παραλλήλῳ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΜ.

246 τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΘΜ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΘΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΘΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ, τουτέστιν ἡ ΘΜ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ. κατὰ τὰ αὐτὰ καί, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ· ἀνάπαλιν ἄρα γίνεται, ὡς ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΛΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΑ, ΒΓ. Διὰ δὲ τοῦ συνημμένου οὕτως· ἐπεὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΘΕ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΕ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΕΖ συνῆπται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ.

247 ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΛ πρὸς τὴν ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΘΚ ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ. διὰ ταῦτα καί, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΘΛ. καὶ ἀνάπαλιν ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ. ἦν δὲ καί, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς τὴν ΘΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ. δ'. Καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘΚΛ, ἔστω δέ, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΖ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ, Η, Ζ σημείων. ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΖ, ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΔΕ,

τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΖ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΔΕ συνῆπται λόγος, ἐὰν διὰ τοῦ Κ τῇ ΑΖ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΚΜ, ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΚΝ καὶ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΜ καὶ ἔτι τοῦ τῆς ΚΜ πρὸς ΔΕ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΖ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΑ πρὸς ΑΔ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ. κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΒΑ πρὸς ΑΔ ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΜ· λοιπὸν ἄρα ὁ τῆς ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΚΝ, τουτέστιν τοῦ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ τοῦ τῆς ΚΜ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΗΕ. εὐθεῖα ἄρα ἡ διὰ τῶν Θ, Η, Ζ. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΘΓ παράλληλον ἀγάγῃ τὴν ΕΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΗ ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Ξ, ὁ μὲν τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶν τῷ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΕΞ, ὁ δὲ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΘ πρὸς τὴν ΘΚ καὶ τοῦ τῆς ΘΚ πρὸς τὴν ΕΞ μεταβαλλόμενος εἰς τὸν τῆς ΘΓ πρὸς ΕΞ λόγον, καὶ ὁ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΓΘ πρὸς τὴν ΕΞ παραλλήλου οὔσης τῆς ΓΘ τῇ ΕΞ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Θ, Ξ, Ζ· τοῦτο γὰρ φανερόν· ὥστε καὶ ἡ διὰ τῶν Θ, Η, Ζ εὐθεῖα ἐστὶν.

248 ε'. Ἐὰν ᾗ καταγραφὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, γίνεται, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἔστω οὖν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Θ. ἤχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΜ, καὶ λοιπὴ ἡ ΗΛ πρὸς λοιπὴν τὴν ΛΜ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ.

249 ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΛΜ, τουτέστιν ἡ ΔΘ πρὸς ΘΛ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΗΛ τῇ ΑΔ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Θ σημείων· τοῦτο γὰρ φανερόν. ζ'. Πάλιν, ἐὰν ᾗ καταγραφὴ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΖ τῇ ΒΓ, γίνεται ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ἔστω οὖν ἴση· ὅτι παράλληλος. ἔστιν δέ· ἐὰν γὰρ τῇ ΕΒ προσθῶ τῇ ΗΒ ἴσην τὴν ΒΘ καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΑΘ, ΘΓ, γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΘΓΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ἐκάτερος γὰρ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτὸς ἐστὶν τῷ τῆς ΘΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγῳ· ὥστε παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ. ζ'. Ἐστω καταγραφὴ, καὶ τῶν ΔΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΒΑ· ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΖ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΘ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΚΓ.

250 ἔστιν οὖν πάλιν, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΕ· ἐκάτερος γὰρ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ αὐτὸς ἐστὶν τῷ τῆς ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὥστε παράλληλός ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΔ. η'. Ἐστω βωμίσκος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗ, καὶ ἔστω παράλληλος ἡ μὲν ΔΕ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΕΗ τῇ ΒΖ· ὅτι καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΓΗ παράλληλός ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΔΓ, ΖΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ΔΒΕ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΑΕ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΓΔΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΕΗ, ἴσον ἐστὶν τὸ ΒΖΕ τρίγωνον τῷ ΒΖΗ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΑΒΖ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΖΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΓΗ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔΗ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΓΖΗ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΓΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΔΖ. θ'. Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ διήχθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΕ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ κεκλάσθω ἡ ΖΘΗ, ἔστω δέ, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΒΓ.

251 ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν, ὡς ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΓΕ ἐστὶν, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΜ πρὸς ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΜ πρὸς ΝΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ. ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἡ

ΝΗ πρὸς τὴν ΘΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΔΘ, οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΛΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΘ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΗΛ πρὸς τὴν ΛΘ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΗΖ· ὥστε καὶ τῇ ΓΒ. ι'. Εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΑΕ, ΔΑΗ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου δύο διήχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΔΘ, ΘΕ, ἔστω δέ, ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ, ΒΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΖΗ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Γ, Α, Ζ. ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΚΛ καὶ συμπίπτει τὰς ΑΒ, ΑΔ κατὰ τὰ Κ, Λ σημεία, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΘ ἐπὶ τὸ Μ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΝ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΘ ἐπὶ τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰς παραλλήλους γίνεται, ὡς ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΝ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΘ, ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΘΝ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ ΔΓ, ΒΘ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ, ΒΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΘΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ, ΒΘ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΘΒ.

252 ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΘΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΓ, ΒΘ, ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΘΝ πρὸς ΘΒ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστιν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΜ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΜ, ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΖΗ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΗ, ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΜ, ΖΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΘΕ, ΖΗ τῷ ὑπὸ ΘΜ, ΖΕ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΘΜ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ, συνθέντι καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΚΛ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΑ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὰ δὲ πτωτικὰ αὐτοῦ ὁμοίως τοῖς προγεγραμμένοις, ὧν ἐστὶν ἀναστροφίον.

253 ια'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ συμπίπτει κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ. ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΖΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΘ, ΔΗ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΖΗ. ἄλλο δέ τι τυχὸν τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΔ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗ, ΕΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΘ, ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗ, ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΘ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ. ἔστιν οὖν, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖ, ΗΔ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΕ. τὰ δ' αὐτά, κὰν ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἀχθῇ ἡ ΑΔ παράλληλος, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τὸ Γ διαχθῇ ἡ εὐθεῖα.

254 ιβ'. Ἀποδεδειγμένων οὖν τούτων ἔσται δεῖξαι, ὅτι, ἐὰν παράλληλοι ᾖσιν αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωσιν εὐθεῖαι τινες αἱ ΑΔ, ΑΖ, ΒΓ, ΒΖ, καὶ ἐπιζευχῶσιν αἱ ΕΔ, ΕΓ, [ὅτι] γίνεται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν Η, Μ, Κ. ἐπεὶ γὰρ τρίγωνον τὸ ΔΑΖ, καὶ τῇ ΔΖ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ διῆκται ἡ ΕΓ συμπίπτουσα τῇ ΔΖ κατὰ τὸ Γ, διὰ τὸ προγεγραμμένον γίνεται, ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ. πάλιν, ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστὶν τὸ ΓΒΖ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦκται ἡ ΒΕ, καὶ διῆκται ἡ ΔΕ συμπίπτουσα τῇ ΓΖΔ κατὰ τὸ Δ, γίνεται, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΛΕ· ἀνάπαλιν ἄρα γίνεται, ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΛΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΑΚ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΛΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ.

255 ἐπεὶ οὖν εἰς δύο εὐθείας τὰς ΓΜΛ, ΘΜΔ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΓ, ΕΔ, καὶ ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΑΚ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η, Μ, Κ· τοῦτο γὰρ προδεδείκται. ιγ'. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Ν· ὅτι πάλιν εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η, Μ, Κ. ἐπεὶ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΝ, ΑΖ, ΑΔ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Γ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΕ ΓΔ, γίνεται, ὡς τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΝ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΝΔ, ΓΖ. πάλιν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ

αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΝ, ΒΓ, ΒΖ δύο εἰσὶν διηγμέναι αἱ ΔΕ, ΔΝ, ἔστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΓΖ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΕΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Η, Μ, Κ. ιδ'.

256 Ἐστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΕ, ΓΒ, καὶ σημείον ἐπὶ τῆς ΒΗ τὸ Ζ, ὥστε εἶναι, ὡς τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒ, ΗΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒ, ΓΗ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Ζ, Δ. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΕ ἐπὶ τὸ Θ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΒ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖ, ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ τε ΔΘ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘ, ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΗ, ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΖΗ τῷ ὑπὸ ΔΘ, ΒΖ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΓΚ, πρὸς τὴν ΗΖ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΒ πρὸς ὅλην τὴν ΒΗ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΖΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΖΗ. ἀλλ' ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΗ ἐν παραλλήλῳ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΗ καὶ ἡ ΔΘ πρὸς ΖΗ. καὶ εἰσὶν παράλληλοι αἱ ΔΘ, ΖΗ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Ζ, Δ σημείων. ιε'. Τούτου προτεθεωρημένου ἔστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΗΚ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Μ, Δ. Ἐπεξεύχθω ἡ ΔΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΒΓΖ ἐκτὸς ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ παράλληλος ἦκται ἡ ΒΕ, καὶ διῆκται ἡ ΔΕ, γίνεται, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΚΔ.

257 ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚ, ΛΕ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ, ἐπεὶ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΓΛ, ΔΘ, ΗΚ δύο εἰσὶν διηγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε αἱ ΕΓ, ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς ΖΓ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΘΕ. διὰ τὸ προγεγραμμένον ἄρα ἡ διὰ τῶν Α, Μ, Δ ἐστὶν εὐθεῖα. ις'. Εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΑΓ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ δύο διήχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτῶν εἰλήφθω σημεία τὰ Η, Θ, ἔστω δέ, ὡς τὸ ὑπὸ ΕΗ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΗΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΓΘ· ὅτι εὐθεῖα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Θ. ἤχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς τὸ ὑπὸ ΕΗ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΓΘ, ἀλλὰ ὁ τοῦ ὑπὸ ΕΗ, ΖΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΗΖ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΗΕ πρὸς ΕΔ, τουτέστιν ἡ ΚΗ πρὸς ΒΔ, καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ, τουτέστιν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΗΛ, ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΒΘ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΓΘ συνῆπται λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΒΔ καὶ ἐξ οὗ ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, καὶ ὁ ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ ἄρα πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΘ.

258 ὁ δὲ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΔ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ· ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ ἔτι τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΘ πρὸς ΒΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΓΘ. κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΘΒ πρὸς ΒΔ λόγος· λοιπὸς ἄρα ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΒΘ καὶ τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς ΗΛ ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΘ, τουτέστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΗΛ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς τὴν ΘΓ. καὶ πάλιν κοινὸς ἐκκεκρούσθω ὁ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΗΛ λόγος· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΚΗ πρὸς τὴν ΒΘ λόγος ὁ αὐτός ἐστὶν τῷ τῆς ΗΛ πρὸς τὴν ΘΓ. καὶ ἐναλλάξ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΓ. καὶ εἰσὶν αἱ ΚΛ, ΒΓ παράλληλοι· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Θ σημείων. ιζ'. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω παράλληλος ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, ἀλλὰ συμπίπτέτω κατὰ τὸ Ν. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Δ εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΒΝ, ΒΓ, ΒΖ δύο εὐθεῖαι διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΔΕ, ΔΝ, ἔστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΔΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΚΔ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΚΔ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓ, ΘΗ· πάλιν γὰρ εἰς τρεῖς τὰς ΓΛ, ΔΘ, ΗΚ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ

σημείου τοῦ Ε δύο ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΕΓ, ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓ, ΘΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΖΔ.

259 διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Α, Θ, Δ· καὶ ἡ διὰ τῶν Α, Μ, Δ ἄρα εὐθεῖά ἐστιν. ιη'. Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΔ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΖΗ, ἔστω δέ, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΒΔ, γίνεται εὐθεῖα ἡ διὰ τῶν Θ, Κ, Γ. ἐπεὶ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΓΒ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, κοινὸς ἄρα προσκείσθω ὁ τῆς ΓΕ πρὸς ΕΒ λόγος ὁ αὐτὸς ὦν τῷ τοῦ ὑπὸ ΕΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ· δι' ἴσου ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ λόγος, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ὁ αὐτὸς ἐστιν τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΗ πρὸς ΗΓ καὶ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΕΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΕΓ πρὸς ΕΒ· ὥστε ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒΓ συνήπται ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΕΓ πρὸς ΕΒ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ὑπὸ ΕΓ, ΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΒ, ΓΗ.

260 ὡς δὲ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἐστιν διὰ τὸ προγεγραμμένον λῆμμα τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΘΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, ΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΗ, ΕΒ, οὕτως ἐστιν τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΘΕ. εὐθεῖα ἄρα ἐστιν ἡ διὰ τῶν Θ, Κ, Γ· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς πτωτικοῖς τῶν ἀναστροφίων. ιθ'. Εἰς τρεῖς εὐθείας τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ Ε δύο διήχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΒ, ἔστω δέ, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΘΗ· ὅτι γίνεται καί, ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. ἦχθω διὰ τοῦ Η τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἐστιν ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΗΛ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΚ, οὕτως ἐστιν ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΗΛ.

261 ἐναλλάξ ἐστιν, ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ. ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΛ, οὕτως ἐστιν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. ἐναλλάξ ἐστιν, ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ. τὰ δὲ πτωτικὰ ὁμοίως. κ'. Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας· ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον. ἦχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ Η τῇ Θ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ, ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ· καὶ ἐναλλάξ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· ἐκατέρα γὰρ τῶν ΒΗ, ΕΘ κάθετός ἐστιν ἐκατέρου τῶν εἰρημένων τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον.

262 κα'. Ἐστωσαν δὴ αἱ Α, Δ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅτι πάλιν γίνεται, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ Α, Δ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΗ γωνία τῇ Δ. ἔστιν οὖν, ὡς τὸ ὑπὸ ΗΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΗΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ μὲν ΗΑ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΗΑΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. κβ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ἔστω δὲ τὸ δις ὑπὸ ΑΒ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ τετραγώνοις. ἐπεὶ γὰρ τὸ δις ὑπὸ ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΒ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ δις ὑπὸ ΒΔΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ τετραγώνοις. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ ΑΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΒ τετραγώνῳ.

263

κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ τετραγώνοις. κγ'. Ἐστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΒΔ τετραγώνῳ· ὅτι γίνεται γ, τὸ μὲν ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΒΑ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΒΔ, ἀνάλογον καὶ ὅλη πρὸς ὅλην καὶ ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι· ἔστιν ἄρα, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΓΔ, ΔΑ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔ, ΔΓ καὶ τῆς ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΔ πρὸς ὅλην τὴν ΔΓ ἐστίν, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, συνθέντι ἐστίν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΑΔΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΔ πρὸς ὅλην τὴν ΔΓ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ἐστίν, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΓΔΑ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΔΓ καὶ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ. κδ'. Εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, καὶ ἔστω τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον ἴσον τῷ δις ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ· ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΓΒ τετραγώνοις. ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶν τῷ δις ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ, τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΓΒ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ τῆς ΓΔ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

- 264 κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΑΓ· τὸ ἄρα δις ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΓΒ τετραγώνοις. κε'. Ἐστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ὅτι γίνεται γ, τὸ μὲν ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΔ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΑ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, λοιπὴ πρὸς λοιπὴν καὶ διελόντι· ἔστιν οὖν, ὡς ἡ τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΔΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ λοιπὴ ἡ ΑΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΓ ἐστίν, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, διελόντι ἐστίν, ὡς ἡ τῶν ΑΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ἀνάπαλιν καὶ διελόντι ἐστίν, ὡς ἡ τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς τῶν ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῆς καὶ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνῳ. κς'.
- 265 Ἐστω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΓΔΕ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, διελόντι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑ, ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΒΓ τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ διελόντι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΒΔ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κζ'. Ἐστω δὲ πάλιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τετράγωνον· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κείσθω γὰρ ὁμοίως τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ, τουτέστιν τοῦ ὑπὸ ΕΔΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. καὶ γίνεται κατὰ διαίρεσιν, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΕΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑ, ΒΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΓ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΒΒ τῷ ὑπὸ ΕΔΓ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, τουτέστιν πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ὅλην τὴν ΒΔ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. κη'.

- 266 Κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΔΒ· ὅτι γίνεται, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, τὸ ἄρα

ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΑ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΑ ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΒΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐὰν δὲ ἢ τοῦτο, γίνεται, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΕ. καθ'. Τμήματος δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ κλάσαι εὐθεῖαν τὴν ΑΓΒ ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ δοθείς· ὥστε καὶ ὁ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἐστὶν δύο δοθέντα τὰ Α, Β· δοθὲν ἄρα ἐστὶν τὸ Δ· ὥστε καὶ τὸ Γ δοθέν.

267 Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω τὸ μὲν τμήμα τὸ ΑΒΓ, ὁ δὲ λόγος ὁ τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΔΓ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ποιοῦσι τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γάρ ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ διὰ τὸ ἐφάπτεσθαι τὴν ΓΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε καί, ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ΑΓΒ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. λ'. Κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τυχόντος ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΔΕ, διήχθω ἡ ΔΖ, ἐπεξεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθω, καί, καθ' ὃ συμπίπτει τῇ διαμέτρῳ, ἔστω τὸ Η· ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΑΕ, ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ διάμετρον κάθετος ἡ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ.

268 ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΘΖΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση ἐστὶν τῇ ἐκτὸς τετραπλεύρου τῇ ὑπὸ ΒΖΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΖΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶν τῇ ὑπὸ ΒΖΗ. καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ ΑΖΒ γωνία· διὰ δὴ τὸ λῆμμα γίνεται, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΒΘ. λα'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι γραμμαὶ ἦχθωσαν αἱ ΒΔ, ΑΕ, καὶ ἦχθω τυχοῦσα ἡ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΖΗ συμπίπτέτω τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Η· ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΒΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ. ὅτι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΔ. περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΒΔΗ γωνία. ἀλλὰ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΕ ἴση ἐστὶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ΑΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΔΗ πάλιν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῇ ὑπὸ ΒΖΗ· ὅτι ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΗ γωνία. ἔστιν δέ· ὀρθή γάρ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΒ, ΕΖΗ γωνιῶν. λβ'.

269 Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ τῇ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω ἡ ΔΕ ποιοῦσα ἴσον τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ὅτι, ἐὰν δίχα τμηθῇ μία τῶν ἴσων πλευρῶν ἡ πρὸς τῷ ἴσῳ τριγώνῳ τῇ ΒΖ, γίνεται, ὡς συναμφοτέρως ἡ ΖΒΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον. ἦχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΒΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Κ· ὅτι ἄρα ἐστίν, ὡς συναμφοτέρως ἡ ΖΚ, ΚΘ πρὸς τὴν ΖΘ, τουτέστιν τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΚ, ΚΘ καὶ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΖ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ τετράγωνον. τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΖΚΘ καὶ τῆς ΖΘ, τουτέστιν ἡ τῶν ἀπὸ ΖΚ, ΚΘ ὑπεροχή, ἴση ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΑΖ· ἡ ἄρα τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΑ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΚΘ. ἀλλὰ ἡ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΑ ὑπεροχή ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΓΚΑ· ὅτι ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΚΑ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΚ· ὅτι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΘ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔστιν δέ· παράλληλος γάρ ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΔΓ, ἐπειδὴ τὸ ΔΒΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, κοινοῦ δ' ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΒΕ λοιπὸν τὸ ΔΑΕ λοιπῷ τῷ ΑΓΕ ἐστὶν ἴσον καὶ ἐστὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως.

270 λγ'. Κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ καὶ ἔστω ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν ΔΕ κάθετος, καὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΖΗ τετράγωνον· ὅτι, οἷον ἐὰν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Ε, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευχθεῖσα ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Θ, γίνεται καὶ τὸ ὑπὸ ΘΕΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΗ τετραγώνῳ. ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΒΛ· ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία. ἔστιν δὲ καὶ ἡ Ζ ὀρθή· τὸ

ἄρα ὑπὸ ΑΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΕΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΘΕΚ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΖΗ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΘΕΚ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ τετραγώνοις, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΕΗ τετραγώνῳ. λδ'. Ἔστω, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνεται τρία, τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ τετραγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, συνθέντι καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ, ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ.

271 κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΑΔΓ. πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΕΓ τετραγώνῳ. ἀμφοτέρω ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΒΔ. Ἀλλὰ ἔστω νῦν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΓΑ κατὰ τὸ Ε· ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ. ἐπεὶ γάρ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ τετράγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δις τὰ ἡγούμενα καὶ διελόντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ. λε'. Τούτων ὄντων ἔστω κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ, ἔστω δὲ ἐπὶ τυχοῦσαν τὴν ΔΕ κάθετος, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ· ὅτι πάλιν, οἷον ἐὰν ἐπὶ τῆς ΕΔ σημεῖον ληφθῇ ὡς τὸ Ε, καὶ ἐπιζυχοθεῖσα ἡ ΕΗ ἐκβληθῇ ἐπὶ τὸ Θ, γίνεται, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΘ κάθετος ἦχθω ἡ ΑΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΘ. ἐπεὶ δὲ ὀρθή ἐστὶν ἑκατέρα τῶν Μ, Ζ γωνιῶν, ἐν κύκλῳ ἐστὶν τὰ Ε, Ζ, Λ, Μ σημεῖα· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗΜ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΗΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ διὰ τὸ εἶναι, ὡς τὴν ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως τὴν ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ, καὶ τετμησθαι τὴν ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Λ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΜ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ, τουτέστιν· ἐν κύκλῳ γάρ· τῷ ὑπὸ τῶν ΘΗΚ.

272 καὶ τέτμηται δίχα ἡ ΘΚ κατὰ τὸ Μ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον γίνεται, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΚ. λς'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΗ· ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΗΒ. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΖ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΕΖ τετράγωνα, τῷ δὲ ἀπὸ ΔΖ τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶν τὰ ἀπὸ τῶν ΔΗ, ΗΖ τετράγωνα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΕ, ΕΖ ἄρα τετράγωνα ἴσα ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΗΔ τετραγώνοις. ὦν τὸ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΗ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΖΗ τετραγώνῳ ἐστὶν ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ. ἔστιν δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλη τῇ ΖΒ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΕ λοιπῇ τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. λζ'. Ἡμικύκλιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἀπὸ τυχόντος τοῦ Γ διήχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΔΕ· ὅτι τὸ ἀπὸ ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓ, ΓΒ καὶ τῆς ΑΕ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ ΔΓ, τουτέστιν τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΓ, καὶ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ καὶ τῆς ΑΕ.

273 ὅτι ἄρα κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ ΓΑΕ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΓΕ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ἀπὸ ΔΕ, τουτέστιν τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, καὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΓΒ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ, ὅτι λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΑΕΓ ἴσον ἐστὶν τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΒΓ. ἔστιν δέ. Εἰς τὸ πόρισμα τοῦ α' βιβλίου. λη'. Θέσει ὄντος παραλληλογράμμου τοῦ ΑΔ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Ε διαγαγεῖν τὴν ΕΖ καὶ ποιεῖν ἴσον τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ. γερονέτω. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶν τὸ ΖΓΗ τρίγωνον τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τὸ ΖΓΗ ἄρα τρίγωνον διπλάσιόν ἐστὶν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου. ὡς δὲ τὸ τρίγωνον πρὸς

τὸ τρίγωνον, διὰ τὸ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν Γ οὕτως ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΖΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓΔ.
δοθέν δὲ τὸ ὑπὸ ΑΓΔ· δοθέν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΗ. καὶ δοθέντος τοῦ Ε εἰς θέσει τὰς ΑΓ, ΓΔ διῆκται
εἰς χωρίου ἀποτομῆν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

274 συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω τὸ μὲν τῇ θέσει παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, τὸ δὲ δοθέν τὸ Ε.
διήχθω ἀπὸ τοῦ Ε εἰς θέσει τὰς ΖΓΗ εὐθεῖα ἡ ΕΖ ἀποτείνουσα χωρίον τὸ ΖΓΗ ἴσον δοθέντι
χωρίῳ τῷ διπλασίονι τοῦ ΑΓΔ. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῇ ἀναλύσει δείξομεν ἴσον τὸ ΖΓΗ τρίγωνον
τῷ ΑΔ παραλληλογράμμῳ ἡ ΕΖ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. φανερόν οὖν, ὅτι μόνη, ἐπεὶ κάκείνη
μόνη. Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ. Pappus Συναγ. VII 3 p. 636, 23: Εὐκλείδου Τόπων πρὸς ἐπιφανείᾳ
δύο. Pappus Συναγ. VII 312 p. 1004, 16 sqq.: Εἰς τοὺς πρὸς ἐπιφανείᾳ. α'. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ
παρὰ θέσει ἡ ΓΔ, καὶ ἡ λόγος τοῦ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, τὸ Γ ἄπτεται κωνικῆς γραμμῆς. ἔαν
οὖν ἡ μὲν ΑΒ στερηθῇ τῆς θέσεως, καὶ τὰ Α, Β στερηθῇ τοῦ δοθέντα εἶναι, γέννηται δὲ πρὸς θέσει
εὐθείαις ταῖς ΑΕ, ΕΒ, τὸ Γ μετεωρισθὲν γίνεται πρὸς θέσει ἐπιφανείᾳ.

275 τοῦτο δὲ ἐδείχθη. β'. Ἐὰν ἡ θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ δοθέν τὸ Γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διαχθῇ ἡ
ΔΓ, καὶ παρὰ θέσει ἀχθῇ ἡ ΔΕ, λόγος δὲ ἡ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ, τὸ Δ ἄπτεται θέσει κωνικῆς τομῆς·
δείκνυται δέ, ὅτι γραμμῆς. δειχθήσεται δὲ οὕτως προγραφέντος τόπου τοῦδε· Δύο δοθέντων
τῶν Α, Β καὶ ὀρθῆς τῆς ΓΔ λόγος ἔστω τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ. λέγω, ὅτι τὸ Γ ἄπτεται
κῶνου τομῆς, ἔαν τε ἡ ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον ἢ μείζων πρὸς ἐλάσσονα ἢ ἐλάσσων πρὸς
μείζονα. ἔστω γὰρ πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΑΔ τοῖς ἀπὸ ΓΔ,
ΔΒ, κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΔΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΑΕ τῷ ἀπὸ ΔΓ. τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ τῷ Ζ·
δοθέν ἄρα τὸ Ζ. καὶ ἔσται διπλῇ ἡ ΑΕ τῆς ΖΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΒΑΕ τὸ δίς ἐστὶν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. καὶ
ἐστὶν ἡ διπλῇ τῆς ΑΒ δοθεῖσα· τὸ ἄρα ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ΖΔ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τὸ Γ
ἄρα ἄπτεται θέσει παραβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Ζ. συντεθήσεται δὲ ὁ τόπος οὕτως· ἔστω τὰ
δοθέντα Α, Β, ὁ δὲ λόγος ἔστω ἴσος πρὸς ἴσον, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα τῷ Ζ, τῆς δὲ ΑΒ διπλῇ
ἔστω ἡ Ρ, καὶ θέσει οὔσης εὐθείας τῆς ΖΒ πεπερασμένης κατὰ τὸ Ζ, τῆς δὲ Ρ δεδομένης τῷ
μεγέθει, γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ΖΒ παραβολὴ ἡ ΗΖ, ὥστε, οἷον ἔαν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ληφθῇ
ὡς τὸ Γ, κάθετος δὲ ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ Ρ, ΖΔ τῷ ἀπὸ ΔΓ, καὶ ἦχθω ὀρθὴ ἡ ΒΗ.

276 λέγω, ὅτι τὸ ΓΗ μέρος τῆς παραβολῆς ἐστὶν. ἦχθω γὰρ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΔΕ.
ἐπεὶ οὖν διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῆς ΒΔ, διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΖΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ
ΒΑΕ ἴσον ἐστὶν τῷ δίς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστιν τῷ ἀπὸ ΔΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ ἴσον
ὄν τῷ ἀπὸ ΔΒ· ὅλον ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἐστὶν τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ. ἡ ΖΓΗ ἄρα γραμμὴ ποιεῖ τὸν
τόπον. Ἔστω δὲ πάλιν τὰ δύο δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β καὶ εὐθεῖα τε ἡ ΔΓ καὶ ὀρθή, λόγος δὲ
ἔστω τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἐπὶ
δὲ τῆς δευτέρας μείζων πρὸς ἐλάσσονα.

277 λέγω, ὅτι τὸ Γ ἄπτεται κῶνου τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς
δευτέρας ὑπερβολῆς. ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ
γεγονέτω ὁ τοῦ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ· ἐπὶ μὲν οὖν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΔ
τῆς ΔΕ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζων ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΕ. κείσθω οὖν τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΔΖ. ἐπεὶ λόγος
ἐστὶν τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐστὶν αὐτῷ ὁ αὐτὸς ὁ τοῦ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, καὶ
λοιπὸς ἄρα τοῦ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ἐστὶν δοθείς.

278 ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶν τῆς ΕΔ πρὸς ΔΒ καὶ τῆς ΖΔ πρὸς ΔΒ καὶ τῆς ΖΒ πρὸς ΒΔ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ
γεγονέτω ὁ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΗ· καὶ ὅλης ἄρα τῆς ΑΖ πρὸς ΔΗ λόγος ἐστὶν δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ λόγος
ἐστὶν τῆς ΕΔ πρὸς ΔΒ δοθείς, καὶ τῆς ΕΒ ἄρα πρὸς ΒΔ λόγος ἐστὶν δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ
γεγονέτω ὁ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΘ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς ΒΘ ἐστὶν δοθείς· δοθέν ἄρα τὸ Θ. καὶ
λοιπὸς τῆς ΑΕ πρὸς ΘΔ λόγος ἐστὶν δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ ΖΑΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΗ λόγος ἐστὶ

δοθείς, τοῦ δὲ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ λόγος ἐστὶν δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ ΗΔΘ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ἐστὶν δοθείς. καὶ ἐστὶν δύο δοθέντα τὰ Θ, Η· ἐπὶ μὲν ἄρα τῆς πρώτης πτώσεως τὸ Γ ἄπτεται ἐλλείψεως, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς. συντεθήσεται δὲ ὁ τόπος οὕτως· ἔστω τὰ μὲν δύο δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, ὁ δὲ δοθείς λόγος ὁ τῆς ΡΤ πρὸς ΤΣ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζων πρὸς ἐλάσσονα, καὶ τῇ ΡΤ ἴση κείσθω ἡ ΤΥ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΥΣ πρὸς τὴν ΣΤ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, πεποιήσθω δὲ καί, ὡς ἡ ΡΤ πρὸς τὴν ΤΣ, οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ, καὶ γεγράφθω περὶ ἄξονα τὸν ΘΗ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἑλλειψις, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς, ὥστε, οἷον ἔαν ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Γ, καὶ κάθετος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, λόγον εἶναι τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν συνημμένον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ὁ δοθείς λόγος, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, καὶ ἦχθω ὀρθὴ ἡ ΒΚ.

279 λέγω, ὅτι ἡ ΘΚ ποιεῖ τὸ ἐπίταγμα. ἦχθω γὰρ κάθετος ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΒ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΒ· ὥστε ἔσται ὁ μὲν τῆς ΔΗ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστιν τῷ τῆς ΤΣ πρὸς ΣΥ, ὁ δὲ τῆς ΘΔ πρὸς ΑΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΤΣ πρὸς ΣΡ· τὸ αὐτὸ γὰρ ἐν τῇ ἀναλύσει ἀπεδείχθη· ὥστε τοῦ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ λόγος συνηπται ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ.

280 ἀλλ' ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ, καὶ ἔτι ὁ δοθείς λόγος ὁ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ συνηπται ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ, καὶ ἐστὶν ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΕ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ συνημμένῳ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΤΣ πρὸς ΣΥ καὶ ἡ ΤΣ πρὸς ΣΡ, λοιπὸς ἄρα τοῦ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τοῦ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, τουτέστι τῷ τοῦ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. καὶ πάντα πρὸς πάντα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ, οὕτως ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΡΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΣ, τουτέστιν ὁ δοθείς λόγος· ὥστε τὸ ΘΚ μέρος τῆς τομῆς ποιεῖ τὸν τόπον. Τούτων οὕτως ἐχόντων ἐλευσόμεθα ἐπὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. ἔστω θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ δοθὲν τὸ Γ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ διήχθω ἡ ΔΓ καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, λόγος δὲ ἔστω τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ. λέγω, ὅτι τὸ Δ ἄπτεται κώνου τομῆς, καὶ ἔαν μὲν ὁ λόγος ἦ ἴσος πρὸς ἴσον, παραβολῆς, ἔαν δὲ ἐλάσσων πρὸς μείζονα, ἐλλείψεως, ἔαν δὲ μείζων πρὸς ἐλάσσονα, ὑπερβολῆς. ἔστω πρότερον ὁ λόγος ἴσος πρὸς ἴσον, τουτέστιν ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ. δείξαι, ὅτι τὸ Δ ἄπτεται παραβολῆς. ἦχθω κάθετος ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶ τῇ δὲ ΑΒ παράλληλος ἡ ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΓ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῇ ΖΗ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ.

281 καὶ ἔστιν θέσει ἡ ΖΓ, καὶ δύο δοθέντα τὰ Ζ, Γ· τὸ Δ ἄρα ἄπτεται παραβολῆς· τοῦτο γὰρ προδέδεικται. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ τῇ θέσει ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Γ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ θέσει οὔσης τῆς ΓΖ καὶ δύο δοθέντων τῶν Ζ, Γ εὐρήσθω παραβολὴ ἡ ΔΘ, ὥστε, οἷον ἔαν ληφθῇ σημεῖον ὡς τὸ Δ, ἀχθῇ δὲ κάθετος ἡ ΔΗ, ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΗ τοῖς ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΘ γραμμὴ τὸν τόπον ποιεῖ, τουτέστιν ὅτι, οἷα τις ἔαν διαχθῇ ὡς ἡ ΓΔ καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ. ἦχθω κάθετος ἡ ΔΗ· διὰ ἄρα τῆς παραβολῆς ἴσον ἐστὶν τὸ ἀπὸ ΖΗ τοῖς ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ. καὶ ἐστὶν τῇ μὲν ΖΗ ἴση ἡ ΕΔ, τοῖς δὲ ἀπὸ ΔΗ, ΗΓ ἴσον τὸ ἀπὸ ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΓ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΔΕ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ· ἡ ἄρα ΔΘ γραμμὴ ποιεῖ τὸν τόπον. Κωνικά.

282 (1t) Pappus Συναγ. VII 30 p. 672, 18 sqq.: Τὰ Εὐκλείδου βιβλία δ Κωνικῶν Ἀπολλώνιος ἀναπλώσας καὶ προσθεὶς ἕτερα δ παρέδωκεν ἡ Κωνικῶν τεύχη. Scholiasta Pappi III p. 1187 ad hunc locum: ὅτι καὶ ὁ Εὐκλείδης κωνικῶν δ βιβλία γέγραφε. Apollonius Pergaeus Conic. I p. 4, 10 sqq.: Τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων

καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατόν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. Pappus VII 33 p. 676, 19 sqq.: Ἀπολλώνιος μὲν ταῦτα· ὃν δέ φησιν ἐν τῷ τρίτῳ τόπον ἐπὶ γ καὶ δ γραμμὰς μὴ τελειωθῆναι ὑπὸ Εὐκλείδου, οὐδ' ἂν αὐτὸς ἠδυνήθη οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς ἄλλ' οὐδὲ μικρόν τι προσθεῖναι τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γραφεῖσιν διὰ γε μόνων τῶν προδεδειγμένων ἤδη κωνικῶν ἄχρι τῶν κατ' Εὐκλείδην, ὡς καὶ αὐτὸς μαρτυρεῖ λέγων ἀδύνατον εἶναι τελειωθῆναι, χωρὶς ὧν αὐτὸς προγράφειν ἠναγκάσθη. ὁ δὲ Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀρισταῖον ἄξιον ὄντα, ἐφ' οἷς ἤδη παραδεδώκει κωνικοῖς, καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν .., ὅσον δυνατόν ἦν τοῦ τόπου διὰ τῶν ἐκείνου κωνικῶν, ἔγραψεν οὐκ εἰπὼν τέλος ἔχειν τὸ δεικνύμενον.

- 283 Archimedes *Quadrat. parabol. prop.* 1—3 (II p. 266 sqq.): Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, ἐφ' ἧς ἃ ABΓ, ἃ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἃ δὲ ΑΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τὰς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἐσσεῖται ἃ ΑΔ τᾷ ΔΓ. κἂν ἴσα ἡ ἃ ΑΔ τᾷ ΔΓ, παραλλήλοι ἐσσοῦνται ἃ τε ΑΓ καὶ ἃ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομᾶς. Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἃ ABΓ, ἡ δὲ ἃ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἃ δὲ ΑΔΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τὰς τοῦ κώνου τομᾶς, ἃ δὲ ΕΓ τὰς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ Γ, ἐσσοῦνται αἱ ΒΔ, ΒΕ ἴσαι. Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἃ ABΓ, ἃ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ ΑΔ, ΕΖ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τὰς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὡς ἃ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, δυνάμει ἃ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. Archimedes *Περὶ κωνοειδ. καὶ σφαιροειδ. prop.* 3 (I p. 270, 15 sqq.): Εἰ κα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύωντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγμέναι, ἔχοντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἐπιψαυουσᾶν· ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τὰς ἐτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τὰς ἐπιψαυούσας τὰς παραλλήλου αὐτᾶ.
- 284 ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. Archimedes *Περὶ κωνοειδ. prop.* 3 (I p. 272, 23 sqq.): Ὅν δὴ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΑΚ, τοῦτον ἐχέτω ἃ Ν ποτὶ τὰν Μ. αἱ δὴ ἀπὸ τὰς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΔΖ ἀγόμεναι παρὰ τὰν ΑΕ δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ Ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐταὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τὰς ΔΖ ποτὶ τὸ Δ πέρας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς.