

eul_wid: rqm-ab

Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς · Diophantus of Alexandria II

On Polygonal Numbers

Περὶ Πολυγωνικῶν Ἀριθμῶν

Period: *Ῥωμαϊκή* [Roman](#)
Dialect: *Κοινή τεχνική* [Technical Koine](#)
Domain: *Ἱστορία* [History](#)
Format: *Πεζός* [Prose](#)

1.450. (1t) ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ. Ἐκαστος τῶν ἀπὸ τῆς τριάδος ἀριθμῶν αὐξομένων μονάδι, πολύγωνός ἐστι πρῶτον ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσον ἐστὶν τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων· πλευρά τε αὐτοῦ ἐστὶν ὁ ἐξῆς τῆς μονάδος ἀριθμός, ὁ β. ἔσται δὲ ὁ μὲν γ τρίγωνος, ὁ δὲ δ τετράγωνος, ὁ δὲ ε πεντάγωνος, καὶ τοῦτο ἐξῆς. Τῶν δὴ τετραγώνων προδήλων ὄντων ὅτι καθεστήκασι τετράγωνοι διὰ τὸ γεγονέναι αὐτοὺς ἐξ ἀριθμοῦ τινος ἐφ’ ἑαυτὸν πολλαπλασιασθέντος, ἐδοκιμάσθη ἕκαστον τῶν πολυγώνων, πολυπλασιαζόμενον ἐπὶ τινὰ ἀριθμὸν κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, καὶ προσλαβόντα τετράγωνόν τινα πάλιν κατὰ τὴν ἀναλογίαν τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν αὐτῶν, φαίνεσθαι τετράγωνον· ὃ δὴ παραστήσομεν ὑποδείξαντες πῶς ἀπὸ δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολύγωνος εὐρίσκεται, καὶ πῶς δοθέντι πολυγώνῳ ἢ πλευρᾷ λαμβάνεται· προδείξομεν δὲ τὰ εἰς αὐτὰ λαμβανόμενα. α.

1.452. (1n) Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχωσιν, ὁ ὀκτάκις ὑπὸ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ μέσου, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος, οὔ ἢ πλευρὰ ἴση <ἐστὶ> τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ μεγίστου καὶ δύο τῶν μέσων. Τρεῖς γὰρ ἀριθμοί, ὁ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερεχέτωσαν· δεικτέον ὅτι ὁ η κῖς ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ, <προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΔΒ □ ον , ποιεῖ □ ον , οὔ ἢ π λ. ἴς. τῷ τε ΑΒ καὶ β τοῖς ΒΓ. Διαιρεῖται γὰρ ὁ η κῖς ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ εἰς τε τὸν η κῖς ἀπὸ ΒΓ □ ον καὶ εἰς τὸν η κῖς ὑπὸ ΑΓ. ΒΓ.> καὶ πάλιν διαιρεῖται ἕκαστος τῶν εἰρημένων δίχα, εἰς τε τὸν δ κῖς ὑπὸ ΑΒ. ΓΒ, καὶ εἰς τὸν δ κῖς ἀπὸ ΒΓ □ ον καὶ εἰς μὴν τὸν δ κῖς ὑπὸ ΑΓ. ΓΒ [τουτέστιν ὁ τετράκις ὑπὸ ΒΓ. ΓΔ· ἴσος γὰρ ὁ ΑΓ τῷ ΓΔ· μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, γίνεται τετράγωνος ὁ ἀπὸ ΑΒ]. ὁ δὲ δεύτερος τῶν δ κῖς , ὑπὸ ΑΓ. ΓΒ, μιγεῖς ἐνὶ τετραγώνῳ ἀπὸ τοῦ ΔΒ, ποιεῖ τὸν τετράγωνον ἀπὸ τοῦ ΒΑ. καὶ ζητεῖται πῶς ὁ ἀπὸ τοῦ ΑΒ □ ος , καὶ ὁ δ κῖς ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ, καὶ ὁ δ κῖς ἀπὸ τοῦ ΒΓ συντεθέντες ποιοῦσι □ ον . ἔαν δὲ θῶμεν τῷ ΒΓ ἴσον τὸν ΑΕ, μεταβησόμεθα τὸν δ κῖς ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ εἰς τὸν δ κῖς ὑπὸ ΒΑ. ΑΕ, ὅς μιγεῖς τῷ δ κῖς ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, ποιήσῃ ἴσον τῷ δ κῖς ὑπὸ ΒΕ.

1.454 ΕΑ, ὅς μιγεῖς τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΒ □ φ , γίνεται ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ. ΕΑ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. οἱ δὲ ΒΕ. ΕΑ ἴς. τῷ τε ΑΒ καὶ β τοῖς ΑΕ, τουτέστι β τοῖς ΒΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. β. Ἐὰν ὤσιν ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, <ἢ ὑπεροχῇ> τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ἀριθμῶν. Ἔστωσαν γὰρ ὅποσοιοῦν ἀριθμοί, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· δεικτέον ὅτι ἡ

τῶν AB, BE ὑπεροχὴ τῆς τῶν AB, BG ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα <τοῦ πλήθους> τῶν AB, BG, BA, BE. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκεινται οἱ AB, BG, BA, BE ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ ἄρα AG, GA, AE ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις. ὁ ἄρα EA τοῦ AG πολλαπλάσιος κατὰ τὸ πλῆθος τῶν AG, GA, AE· τὸ δὲ πλῆθος τῶν AG, GA, AE τοῦ πλήθους τῶν AB, BG, BA, BE μονάδι ἐλασσόν ἐστιν· ὥστε τὸ EA τοῦ AG πολλαπλάσιόν ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν AB, BG, BA, BE· καὶ ἔστιν ὁ μὲν AE ὑπεροχὴ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου, ὁ δὲ AG ἐστὶν αὐτῶν μία ὑπεροχὴ. γ.

1.456. (1n) Ἐὰν ὥσιν ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος συντεθέντες καὶ πολλαπλασιασθέντες ἐπὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν ποιοῦσιν ἀριθμὸν διπλάσιον τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἐκτεθέντων. Ἔστωσαν γὰρ ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν, οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ· δεικτέον ὅτι συναμφοτέρος ὁ A, Z, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z, ποιεῖ τινὰ ἀριθμόν, ὅς ἐστι διπλασίων τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z. Τὸ γὰρ πλῆθος τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z ἥτοι ἄρτιόν ἐστιν ἢ περισσόν. Ἔστω πρότερον ἄρτιον, καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ HΘ ἀριθμῷ· ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ HΘ. τετμήσθω δίχα τῷ K, καὶ διηρήσθω ὁ HK εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὰ Λ, Μ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ Z τοῦ Δ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ τοῦ A, συναμφοτέρος ἄρα ὁ Z. A συναμφοτέρῳ τῷ Γ. Δ ἴσος ἐστίν. ἀλλὰ συναμφοτέρος ὁ Z. A ἴς. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ ΗΛ· ὥστε καὶ ὁ Γ. Δ ἴς. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ ΛΜ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφοτέρος ὁ E. B ἴς. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ MK· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z ἴς. τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ HK· τοῦ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z.

1.458 A καὶ τοῦ HK διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ HΘ· ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ Z. A καὶ τοῦ HΘ, τουτέστι τοῦ πλήθους τῶν A, B, Γ, Δ, E, Z. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ὁ τῶν A, B, Γ, Δ, E περισσός, καὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ZH τοσαῦται μονάδες ὅσοι εἰσὶν οἱ A, B, Γ, Δ, E. περισσὸς ἄρα ἐστὶν καὶ ὁ ZH· κείσθω ἐν αὐτῷ μονὰς ὁ ZΘ, καὶ τετμήσθω ὁ ΘH δίχα τῷ K, καὶ τετμήσθω ὁ ΘK εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας κατὰ τὸ Λ. Καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει ὁ E τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ ὁ Γ τοῦ A, συναμφοτέρος ἄρα ὁ E. A διπλασίων ἐστὶν τοῦ Γ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ Γ καὶ τοῦ ΛK· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφοτέρος ὁ B. Δ διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ Γ καὶ ΛΘ· ὥστε οἱ A, E, B, Δ διπλασίονές εἰσιν τοῦ ὑπὸ Γ καὶ τοῦ ΘK· ἀλλὰ τοῦ ΘK διπλασίων ἐστὶν ὁ ΘH· ὥστε καὶ οἱ A, E, B, Δ ἴσοι εἰσὶν τῷ ὑπὸ τοῦ Γ καὶ τοῦ ΘH· ἔστιν δὲ καὶ ὁ Γ ἴσος τῷ ὑπὸ τοῦ Γ καὶ τοῦ ΘZ· ὥστε ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E ἴς. τῷ ὑπὸ <τοῦ> Γ καὶ τοῦ ZH· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν Γ. ZH διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ A. E καὶ τοῦ ZH· ὥστε καὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν A, B, Γ, Δ, E διπλασίων ἐστὶν ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ A.

1.460 E καὶ τοῦ ZH, τουτέστιν τοῦ πλήθους τῶν ἐκτεθέντων. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. δ. Ἐὰν ὥσιν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ὁ σύμπαρ πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ὀκταπλασίονα τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τετράγωνον, γίνεται τετράγωνος οὔ ἢ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα πολλαπλάσιος ἔσται τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν κατὰ τινὰ ἀριθμόν, ὅς προσλαβὼν μονάδα διπλασίων ἐστὶ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων πάντων σὺν τῇ μονάδι. Ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, οἱ AB, ΓΔ, EZ· λέγω ὅτι γίνεται τὸ προκείμενον. Ὅσοι γὰρ εἰσὶν οἱ ἐκτεθέντες σὺν τῇ μονάδι, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ HΘ· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπεροχὴ ἢ ὑπερέχει ὁ EZ μονάδος, τῆς ὑπεροχῆς ἢ ὑπερέχει ὁ AB <μονάδος>, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν μονάδι ἐλάσσονα τοῦ HΘ, ἐὰν ἄρα θῶμεν ἕκαστον μονάδος τὸν AK, ΕΛ, ΗΜ, ἔξομεν τὸν ΛZ τοῦ KB πολλαπλάσιον κατὰ τὸν ΜΘ· ὥστε ὁ ΛZ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ KB. ΜΘ· καὶ ἐὰν θῶμεν δυάδος τὸν KN, ζητήσομεν εἰ ὁ σύμπαρ πολυπλασιασθεὶς ἐπὶ ἡ τοὺς KB, (ὅς ἐστὶν ὑπεροχὴ αὐτῶν), καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ NB, (ὄντος δυάδι ἐλάσσονος τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν), γίνεται τετράγωνος, οὔ ἢ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα

ποιεῖ τινα ἀριθμόν, ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ συναμφοτέρον τὸν ΗΘ.

1.462 ΘΜ. Καὶ ἐπεὶ ὁ σύμπας ἡμισὺς ἐστὶν τοῦ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ΖΕ, ΕΛ καὶ τοῦ ΘΗ,
〈διαίρεται δὲ ὁ ὑπὸ συναμφοτέρου τῶν ΖΕ. ΕΛ καὶ τοῦ ΘΗ〉 εἷς τε τὸν ὑπὸ ΛΖ. ΗΘ, καὶ εἷς τὸν δις ὑπὸ ΕΛ. ΗΘ, τουτέστι β τοὺς ΗΘ, πάλιν ἄρα ὁ σύμπας 〈ἡμισύς〉 ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΛΖ. ΗΘ καὶ β τῶν ΗΘ. ἀλλὰ ὁ ΛΖ ἴσος ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΚΒ. ΜΘ καὶ ὁ ὑπὸ ΛΖ. ΗΘ ἄρα ἴς. τῷ ὑπὸ ΚΒ. ΜΘ. ΗΘ στερεῶ, καὶ ὁ σύμπας ἄρα ἐστὶν ἡμισὺς τοῦ τε ὑπὸ ΚΒ. ΜΘ. ΘΗ στερεοῦ καὶ β τῶν ΗΘ. Ἐὰν ἄρα τέμωμεν τὸν ΜΘ δίχα κατὰ τὸ Ξ, ἔξομεν τὸν ἐκ πάντων συγκείμενον ἴσον τῷ ἐκ τῶν ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ στερεῶ καὶ ἐνὶ τῷ ΗΘ ζητήσομεν ἄρα εἰ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ στερεὸς μετὰ τοῦ ΘΗ, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ον , γίνεται □ ος . Ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἕνα τὸν ΚΒ, ποιεῖ τὸν ὑπὸ ΗΘ. ΘΞ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον . ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΚΒ. ΗΘ. ΘΞ στερεὸς πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ, ποιεῖ τὸν ὑπὸ ΗΘ.

1.464 ΘΞ ἐπὶ ἡ τοὺς ἀπὸ ΚΒ □ ος , τουτέστι τὸν ἡ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΘΞ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , τουτέστι τὸν δ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον . 〈Εἰ〉 προσλαβὼν τὸν ΗΘ ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ, καὶ ἔτι τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ον , γίνεται □ ος ; ὁ δὲ ΗΘ πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ ποιεῖ τὸν ἡ κίς ὑπὸ τῶν ΗΘ. ΒΚ· οὐκοῦν πάλιν εἰ ὁ δ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , μετὰ τοῦ ἡ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΚΒ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ος , γίνεται □ ος ; Διαίρεται δὲ ὁ ἡ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΚΒ εἷς τε τὸν δ κίς ὑπὸ ΗΜ. ΚΒ καὶ εἷς τὸν δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ 〈καὶ τοῦ ΚΒ· εἰ ἄρα ὁ δ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΘΜ〉 ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , μετὰ τοῦ δ κίς ὑπὸ ΗΜ. ΚΒ, καὶ ὁ δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, καὶ ὁ ἀπὸ ΝΒ, ποιεῖ □ ον ; Ἀλλὰ ὁ δ κίς ὑπὸ ΗΜ. ΚΒ ἴς. τῷ δις ὑπὸ ΝΚ. ΚΒ, καὶ μιγεῖς τῷ ἀπὸ ΝΒ, ποιεῖ τοὺς ἀπὸ ΚΒ, ΚΝ □ ος . εἰ ἄρα καὶ ὁ δ κίς ὑπὸ ΘΗ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , καὶ ὁ δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, μετὰ τῶν ἀπὸ ΒΚ, ΚΝ □ ων , γίνεται □ ος ; Πάλιν δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΚ □ ος μεταβαίνει εἰς τὸν ἀπὸ τοῦ ΗΜ □ ον ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , καὶ μιγεῖς οὗτος τῷ δ κίς ὑπὸ ΗΘ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , 〈ποιεῖ τὸν ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον 〉 . εἰ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον , καὶ ὁ δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΚΝ, γίνεται □ ος ; Ἐὰν δὴ θῶμεν τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ.

1.466 〈ΘΜ〉 καὶ τοῦ ΚΒ ἴσον τὸν ΝΞ ἀριθμόν, ἔσται καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ □ ος ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ον ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΝΞ □ ω . ὅπερ ἐξῆς δειχθήσεται . εἰ ἄρα οἱ ἀπὸ τῶν ΞΝ, ΝΚ □ οι , μετὰ τοῦ δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, γίνεται □ ος ; Ἀλλὰ ὁ δ κίς ὑπὸ 〈συναμφοτέρου τοῦ〉 ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ, ἴς. δ κίς τῷ ΝΞ, ἐπεὶ περ καὶ ὁ ἅπαξ τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἴσος ἐτέθη ὁ ΝΞ· δ δὲ οἱ ΝΞ ἴς. τῷ δις ὑπὸ ΝΞ, ΝΚ· (δυὰς γὰρ ἐτέθη ὁ ΝΚ)· εἰ ἄρα καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΝΞ, ΝΚ □ οι , μετὰ τοῦ δις ὑπὸ ΝΞ, ΝΚ, ποιοῦσι □ ον ; Ποιοῦσι δὲ τὸν ἀπὸ τοῦ ΞΚ, οὔ ἢ πλευρὰ ἢ ΞΚ, λιποῦσα δυάδα τῆς ΝΚ, ποιεῖ τινα ἀριθμόν τὸν ΝΞ, ὃς τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, τοῦ ΚΒ, πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν συναμφοτέρον τοῦ ΗΘ. ΘΜ, ὃς προσλαβὼν μονάδα, τὸν ΗΜ, 〈διπλάσιός〉 ἐστὶ τοῦ ἐκτεθέντος παντὸς συστήματος. Τὸ ὑπερτεθὲν δεῖξαι. Ἐστω συναμφοτέρω τῷ ΗΘ. ΘΜ ἴσος ὁ Α, τῷ δὲ ΚΒ ἴσος ὁ Β, τῷ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἴσος ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ ὁ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ (τουτέστιν ὁ ἀπὸ τοῦ Α), ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΒ (τουτέστιν ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ Β), ἴς. τῷ ἀπὸ τοῦ Γ. Κεῖσθω τοῖς Α, Β ἴσοι ἐπ' εὐθείας οἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τὰ ΔΘ, ΕΛ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΘΖ παραλληλόγραμμον.

1.468 Ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς ΖΘ παραλληλόγραμμον· ὥς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, οὕτως τὸ ΘΖ παραλληλόγραμμον πρὸς ΕΛ· τὸ ἄρα ΘΖ παραλληλόγραμμον μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΔΘ.

ΚΖ □ ων · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΘ. ΖΚ □ ων ἴς. τῷ ἀπὸ τοῦ ΘΖ παραλληλογράμμου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΘ ἴσον τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ, τὸ δὲ ΖΚ □ ων ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ ΚΒ, τὸ δὲ ΘΖ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΝΞ. καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ □ ων ἐπὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΚΒ □ ων ἴς. τῷ ἀπὸ τοῦ ΝΞ τετραγώνῳ. Τῶν προκειμένων ὄντων, λέγομεν ὅτι, ἐὰν ὥσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἐν οἴαοῦν ὑπεροχῇ, ὁ σύμπας πολὺγωνός ἐστι· καὶ γὰρ ἔχει γωνίας τοσαύτας, ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν, πλευρά τε αὐτοῦ ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Ἐπεὶ γὰρ ἐδείξαμεν τὸν σύμπαντα τῶν ἐκκειμένων πάντων, γενόμενον ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ, καὶ προσλαβόντα τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ων , ποιοῦντα τὸν ἀπὸ τοῦ ΖΚ □ ων , ἀλλὰ καὶ ἐὰν ἄλλην μονάδα θῶμεν τὴν ΑΟ, ἔξομεν τὴν ΚΟ δυάδα, καὶ ἔστιν δὲ ὁμοίως καὶ ὁ ΚΝ δυάς· ἔσσονται ἄρα οἱ ΟΒ, ΒΚ, ΒΝ τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες· ὁ ἄρα ἡ κίς ὑπὸ τοῦ μεγίστου τοῦ ΟΒ καὶ τοῦ μέσου τοῦ ΒΚ, προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ἐλαχίστου τοῦ ΒΝ □ ων , ποιεῖ □ ων πλευρὰν ἔχοντα τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ μεγίστου τοῦ ΟΒ καὶ β τῶν μέσων τῶν ΒΚ· καὶ ὁ ΟΒ ἄρα πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ ἡ τοὺς ΚΒ, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ων , ἴς.

1.470 τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ τε ΟΒ καὶ β τῶν ΚΒ, καὶ ἡ πλευρὰ λιποῦσα δυάδα, τὸν ΟΚ, καταλείψει γ τοὺς ΚΒ, οἱ εἰσὶν τοῦ ΚΒ πολλαπλάσιοι κατὰ τριάδα· ἡ δὲ τριάς, προσλαβοῦσα μονάδα, β πλ. ἐστὶ τῆς δυάδος. Ἐπεὶ οὖν ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων σὺν τῇ μονάδι τὸ αὐτὸ πρόβλημα ποιεῖ τῷ ΟΒ, ὁ δὲ ΟΒ ὢν τυχὼν καὶ πολὺγωνός ἐστιν α ὅς ἀπὸ τῆς μονάδος (ἐπεὶ περ μονάς ἐστὶν ὁ ΑΟ, ὁ δὲ β ὅς ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ ΑΒ), καὶ ἔχει πλευρὰν δυάδα· ὥστε καὶ ὁ σύμπας τῶν ἐκκειμένων πολὺγωνός ἐστιν ἰσογώνιος τῷ ΟΒ, ἔχων γωνίας τοσαύτας ὅσος ἐστὶν ὁ δυάδι μείζων, τῇ ΟΚ, τῆς ὑπεροχῆς αὐτῶν τοῦ ΚΒ· καὶ πλευρὰν ἔχει τὸν ΗΘ, ὅς ἐστι τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι. Καὶ ἀπεδείχθη τὸ παρὰ Ὑψικλεῖ ἐν ὄρῳ λεγόμενον, ὅτι, ἐὰν ὥσιν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ ὅποσοιοῦν, μονάδος μενούσης τῆς ὑπεροχῆς, ὁ σύμπας ἐστὶν <τρίγωνος, δυάδος δέ> , τετράγωνος, τριάδος δέ, πεντάγωνος· λέγεται δὲ τὸ πλῆθος τῶν γωνιῶν κατὰ τὸν δυάδι μείζονα τῆς ὑπεροχῆς, πλευραὶ δὲ αὐτῶν τὸ πλῆθος τῶν ἐκτεθέντων σὺν τῇ μονάδι.

1.472 ‘Ὅθεν, ἐπεὶ οἱ τρίγωνοι μονάδος οὔσης τῆς ὑπεροχῆς γίνονται, καὶ πλευραὶ αὐτῶν εἰσὶν οἱ μέγιστοι τῶν ἐκτιθεμένων, καὶ ὁ ὑπὸ τοῦ μεγίστου τῶν ἐκτιθεμένων καὶ τοῦ μονάδι μείζονος αὐτοῦ, διπλασίῳ ἐστὶ τοῦ σημαينوμένου τριγώνου· καὶ ἐπεὶ ὁ ΟΒ ὢν τοσαῦται γωνία ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἡ πλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος (τουτέστιν τοῦ τῆς ὑπεροχῆς ἐπὶ τὸν ἡ κίς ἔσται τὸν ΚΒ), <καὶ> προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος (τουτέστι τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ), ποιεῖ □ ων · οὗτος ἔσται ὅρος τῶν πολυγώνων ὅτι Πᾶς πολὺγωνος πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν ἡ πλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ προσλαβὼν τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, ποιεῖ τετράγωνον. Συναποδειχθέντος οὖν καὶ τοῦ Ὑψικλέους ὅρου καὶ τούτου τῶν πολυγώνων, ἐξῆς ἐστὶ δεικνύναι πῶς δοθείσης πλευρᾶς ὁ ἐπιταχθεὶς πολὺγωνος εὐρίσκεται. Ἐχοντες γὰρ πλευρὰν δοθεῖσαν τινὸς πολυγώνου τὸν ΗΘ, ἔχοντες δὲ καὶ τὸ πλῆθος αὐτοῦ τῶν γωνιῶν, ἔχομεν καὶ τὴν ΚΒ δοθέντων. ὥστε καὶ τὸν ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ ΗΘ. ΘΜ καὶ τοῦ ΚΒ ἔξομεν δοθέντα, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ΝΞ· ὥστε ἔξομεν καὶ τὸν ΚΞ δοθέντα, ἐπεὶ περ δυάς ἐστὶν ὁ ΝΚ· ὥστε καὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΚΞ ἔξομεν δοθέντα, καὶ ἀπὸ τούτου ἀφελόντες τὸν ἀπὸ τοῦ ΝΒ □ ων ὄντα δοθέντα, ἔξομεν καὶ τὸν λοιπὸν δοθέντα, ὅς ἐστιν τοῦ ζητούμενου πολυγώνου πολλαπλασίῳ κατὰ τὸν ὀκταπλάσιον τοῦ ΚΒ· ὥστε εὐρετός ἐστιν ὁ ζητούμενος πολὺγωνος.

1.474 Ὅμοίως δὲ καὶ πολυγώνου δοθέντος εὐρήσομεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ τὸν ΗΘ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Διδασκαλικώτερον δὲ ὑποδείξομεν καὶ τοῖς βουλομένοις εὐχερῶς ἀκούειν τὰ ζητούμενα διὰ μεθόδων. Λαβόντες γὰρ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, αἰ διπλασιάσαντες, ἀφελοῦμεν μονάδα, καὶ τὸν λοιπὸν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ

γενομένῳ προσθήσομεν αἰ διὰ δα, καὶ λαβόντες τὸν ἀπὸ τοῦ γενομένου $\square$ ον , ἀφελούμεν ἀπ' αὐτοῦ τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τὸν λοιπὸν μερίσαντες εἰς τὸν η πλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, εὐρήσομεν τὸν ζητούμενον πολυγώνον. Πάλιν δὲ αὐτοῦ τοῦ πολυγώνου δοθέντος, εὐρήσομεν οὕτως τὴν πλευράν· πολλαπλασιάσαντες γὰρ αὐτὸν ἐπὶ τὸν η πλ. τοῦ δυάδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες τὸν ἀπὸ τοῦ τετράδι ἐλάσσονος τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν $\square$ ον , εὐρήσομεν $\square$ ον , ἐάνπερ ἢ ὁ ἐπιταχθεὶς πολυγώνος· τούτου δὲ τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς ἀφελόντες αἰ διὰ δα, τὸν λοιπὸν μερίσομεν ἐπὶ τὸν δυάδι ἐλάσσονα τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν, καὶ τῷ γενομένῳ προσθέντες μονάδα, καὶ τοῦ γενομένου λαβόντες τὸ ἥμισυ, ἔξομεν τὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου πλευράν.

1.476 [Δοθέντος ἀριθμοῦ εὐρεῖν ποσαύτῳ δύναται εἶναι πολυγώνος. Ἐστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ AB, πλήθος δὲ αὐτοῦ γωνιῶν ὁ BG, καὶ κείσθω ἐν τῷ BG δυὰς μὲν ὁ ΓΔ, τετράς δὲ ὁ ΓΕ· καὶ ἐπεὶ ὁ AB ὢν πολυγώνος ἔχει γωνίας τοσαύτας ὅσος ἐστὶν ὁ BG, ὁ ἄρα η κίς ὑπὸ AB. BA μετὰ τοῦ ἀπὸ BE ποιεῖ $\square$ ον . Ἐστω αὐτοῦ πλευρὰ ὁ ZH· ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ ZH $\square$ ος ἴς. τῷ τε η κίς ὑπὸ AB. BA καὶ τῷ ἀπὸ BE $\square$ ω . κείσθω ἐν τῷ AB M ὁ ὁ AΘ, καὶ διήρηται ὁ η κίς ὑπὸ AB. BA εἰς τε τὸν δ κίς ὑπὸ AΘ. BA καὶ εἰς τὸν δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ AB. BΘ <καὶ τοῦ BA. κείσθω ἴσος συναμφοτέρῳ τῷ AB. BΘ> δ κίς ὁ ΔK, καὶ μεταβησόμεθα τὸν μὲν δ κίς ὑπὸ συναμφοτέρου τοῦ AB. BΘ καὶ τοῦ BA εἰς τὸν ὑπὸ KΔB, τὸν δὲ δ κίς ὑπὸ AΘ. BA εἰς τὸν δις ὑπὸ BA. ΔE (δυὰς γάρ ἐστὶν ὁ EΔ)· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ZH ἄρα $\square$ ος ἴς. τῷ τε ὑπὸ KΔB καὶ τῷ δις ὑπὸ BA, ΔE καὶ τῷ ἀπὸ BE $\square$ ω . Ἀλλὰ τῷ δις ὑπὸ BΔE καὶ τῷ ἀπὸ BE $\square$ ω ἴς. οἱ ἀπὸ τῶν BA, ΔE $\square$ οἱ· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ZH ἄρα $\square$ ος ἴς. τῷ τε ὑπὸ KΔB καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, ΔE $\square$ οἱς . τῷ δὲ ὑπὸ KΔB καὶ τῷ <ἀπὸ> BA ἴς.

1.478 τὸ ὑπὸ KBA· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ZH ἄρα ἴς. τῷ τε ὑπὸ KBA καὶ τῷ ἀπὸ ΔE $\square$ ω . Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔK, ἴσος ὢν δ κίς συναμφοτέρῳ τῷ AB. BΘ, μείζων ἐστὶ δ κίς τοῦ AΘ, τουτέστι τετράδος, ὢν ὁ ΔΓ ἐστὶ δυὰς, λοιπὸς ἄρα ὁ ΓK μείζων δυάδος τοῦ ΓΔ· ἢ ἄρα διχοτομία τοῦ ΔK πεσεῖται μεταξὺ τοῦ ΓK· ἔστω τὸ Λ. καὶ μεταβησόμεθα τὸν ὑπὸ KB. BA εἰς τὴν τῶν ἀπὸ BA, ΛΔ ὑπεροχήν, ἐπεὶπερ ἡ ΔK τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Λ, πρόσκειται δὲ ἡ ΔB· καὶ ἔστιν τὸ ὑπὸ KBA μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΛ ἴς. τῷ ἀπὸ AB, καὶ τὸ ἀπὸ AB ἄρα τοῦ ἀπὸ ΛΔ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ KBA· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ZH ἄρα $\square$ ος ἴς. τῇ τε ἀπὸ τῶν BA, ΛΔ ὑπεροχῇ καὶ τῷ ἀπὸ ΔE $\square$ ω . Κοινὸς προσκείσθω ὁ ἀπὸ ΔΛ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ZH, ΔΛ ἄρα ἴσοι $\square$ οἱ εἰσιν τοῖς ἀπὸ τῶν BA, ΔE $\square$ οἱς· ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ ὡς εἷς καὶ δυσὶν ἀριθμοῖς ἴσοι ὦσιν, καὶ ἐναλλάξ αἱ ὑπεροχαὶ αὐτῶν ἴσαι· ἢ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔE ὑπεροχὴ ἴς. τῇ τῶν <ἀπὸ τῶν> AB, ZH ὑπεροχῇ· καὶ ἐπεὶ ὁ EΔ τῷ ΔΓ ἴς., πρόσκειται δὲ ὁ ΓΛ, τὸ ἄρα EΛΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴς. τῷ ἀπὸ ΔΛ· ἢ ἄρα ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔΓ ὑπεροχὴ, τουτέστιν ἡ <τῶν> ἀπὸ τῶν ΛΔ, ΔE, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑπὸ EΛΓ, ἴς. τῇ <τῶν> ἀπὸ τῶν AB, ZH ὑπεροχῇ. Κείσθω τῷ BA ἴσος ὁ ZM· (μείζων γάρ ἐστὶν ὁ BA τοῦ ZH, ἐπεὶπερ ἐδείχθη τὰ ἀπὸ ZH, ΔΛ $\square$ α ἴσα τοῖς ἀπὸ BA, EΔ $\square$ οἱς , λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΔΛ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ ΔE, ἐπεὶπερ καὶ τοῦ ἀπὸ ΔΓ μείζον ἐστὶ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ BA τοῦ ἀπὸ ZH μείζον ἐστὶ· κείσθω οὖν τῷ BA <ἴσος> ὁ ZM.

1.480) ἔσται δὴ καὶ ἡ τῶν ἀπὸ ZM, ZH ὑπεροχὴ ἴση τῷ ὑπὸ EΛ. ΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔK δ πλ. ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ AB. BΘ, ὁ δὲ ΔK δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ὁ ΔΛ ἄρα β πλ. ἐστὶ συναμφοτέρου τοῦ AB. BΘ· ὢν ὁ ΔΓ β πλ. ἐστὶ τοῦ AΘ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΛΓ β πλ. ἐστὶ β τῶν BΘ δ πλ. ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΛ τοῦ ΘB, ὥστε δ ον μέρος ἐστὶν ὁ ΘB τοῦ ΛΓ· ἀλλὰ καὶ ἡ AΘ μονὰς δ ον ἐστὶν τῆς EΓ τετράδος ὅλος ἄρα ὁ AB δ ον ἐστὶ μέρος τοῦ EΛ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΘB τοῦ ΛΓ μέρος δ ον· τὸ ἄρα ὑπὸ AB. BΘ ἴς ὅν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ EΛ. ΛΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ EΛ. ΛΓ ἴς. τῷ ἴς κίς ὑπὸ AB. BΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ EΛ. ΛΓ ἴσον τῇ τῶν ἀπὸ MZ. ZH ὑπεροχῇ· καὶ τὸ ἴς κίς ἄρα ὑπὸ AB. BΘ ἴς. τῇ τῶν ἀπὸ MZ. ZH ὑπεροχῇ, τουτέστι τῷ τε ἀπὸ MH καὶ τῷ δις ὑπὸ ZH. HM· ὥστε ὁ ἴς κίς ὑπὸ AB. BΘ

Ἰς. τῷ τε ἀπὸ ΗΜ καὶ τῷ δις ὑπὸ ΖΗ. ΗΜ· ὥστε ἄρτιός ἐστιν ὁ ΗΜ· τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν]