

eul_wid: ixo-ac

Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος · Archimedes of Syracuse

Quadrature of the Parabola

Παραβολῆς Τετραγωνισμός

Period: Ἑλληνιστική Hellenistic
Dialect: Δωρική Doric
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

- 2.164. (1t) Τετραγωνισμός παραβολῆς Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πράττειν. Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐδὲν ἐπιλείπων ἑμῖν ἐν φιλίᾳ, τὴν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐλυπήθημεν ὥς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γεναμένου καὶ ἐν τοῖς μαθημάτεσσι θαυμαστοῦ τινος, ἐπροχειριζάμεθα δὲ ἀποστεῖλαι τοὶ γράψαντες, ὥς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες ἡμεῖς, γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον, νῦν δὲ ὑφ' ἁμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὐρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν. Τῶν μὲν οὖν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχειρήσαντινες γράφειν ὥς δυνατόν ἐδὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὐρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον, καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, διόπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐχ εὐρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθην. Τὸ δὲ ὑπ' εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμήμα περιεχόμενον οὐδένα τῶν προτέρων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ἁμῶν εὕρηται· δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτρίτον ἐστὶ τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι λαμβανομένου τοῦδε τοῦ λήμματος ἐς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ· τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ἧς ὑπερέχει τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατόν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμένας παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου.
- 2.165 Κέχρηται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι· τοὺς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν ποτ' ἀλλάλους τὰν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι χρώμενοι, καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τὰν διαμέτρων, ἔτι δὲ καὶ ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι καὶ ὕψος ἴσον· καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ καὶ ὕψος ἴσον, ὁμοῖον τῷ προειρημένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγραψον. Συμβαίνει δὲ τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τῶν ἄνευ τούτου τοῦ λήμματος ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι· ἀρκεῖ δὲ ἐς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτοις ἀναγμένων τῶν ὑφ' ἁμῶν ἐκδιδομένων. Ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις ἀποστέλλομες πρῶτον μὲν ὥς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη, μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὥς διὰ τῶν γεωμετρούμενων ἀποδείκνυται. Προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρεῖαν ἔχοντα ἐς τὰν ἀπόδειξιν. Ἑρρωσο. α'.

- 2.166 Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἐφ' ἧς ἡ ABΓ, ἡ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ ΑΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἴσα ἐσσεῖται ἡ ΑΔ τᾷ ΔΓ· καὶ ἴσα ἡ ἡ ΑΔ τᾷ ΔΓ, παράλληλοι ἐσσοῦνται ἡ τε ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. β'. Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομά ἡ ABΓ, ἡ δὲ ἡ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔΓ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἡ δὲ ΕΓ τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ Γ, ἐσσοῦνται αἱ ΒΔ, ΒΕ ἴσαι.
- 2.167 γ'. Εἴ κα ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομά ἡ ABΓ, ἡ δὲ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἡ αὐτὰ διάμετρος, καὶ ἀχθέωντί τινες αἱ ΑΔ, ΕΖ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται, ὥς ἡ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΖ, δυνάμει ἡ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. Ἀποδεδείκναι δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. δ'. Ἐστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ABΓ, ἡ δὲ ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω ἡ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. Εἰ δὴ κα ἀχθῇ τις ἄλλα ἡ ΖΘ παρὰ τὰν ΒΔ τέμνουσα τὰν διὰ τῶν Β, Γ εὐθείαν, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ, ὃν ἡ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ. Ἀχθὼ γὰρ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰν ΑΓ ἡ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΚ μάκει, οὕτως ἡ ΔΓ ποτὶ τὰν ΚΗ δυνάμει· ἀποδεδείκναι γὰρ τοῦτο. Ἐσσεῖται ἄρα ὥς ἡ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΙ μάκει, οὕτως ἡ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ δυνάμει· ἴσαι γὰρ αἱ ΔΖ, ΚΗ· ἀνάλογον ἄρα ἐντὶ αἱ ΒΓ, ΒΘ, ΒΙ γραμμαί. Ὡστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΘ, ὃν ἡ ΓΘ ποτὶ τὰν ΘΙ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΓΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, οὕτως ἡ ΘΖ ποτὶ τὰν ΘΗ. Τᾷ δὲ ΔΓ ἴσα ἐστὶν ἡ ΔΑ· δηλὸν οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΔΑ ποτὶ τὰν ΔΖ, ὃν ἡ ΖΘ ποτὶ τὰν ΘΗ. ε'. Ἐστω τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ ABΓ, καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὰν διάμετρον ἡ ΖΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ ἡ ΓΖ. Εἰ δὴ τις ἀχθείη ἐν τῷ ΖΑΓ τριγώνῳ παρὰ τὰν ΑΖ, τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ἀχθείσα τετμήσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς καὶ ἡ ΑΓ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας [ἀνάλογον], ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς ΑΓ τὸ ποτὶ τῷ Α τῷ τμᾶματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τῷ Α.
- 2.169 Ἀχθὼ γὰρ τις ἡ ΔΕ παρὰ τὰν ΑΖ, καὶ τεμνέτω πρῶτον ἡ ΔΕ τὰν ΑΓ δίχα. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὀρθογωνίου κώνου τομά ἡ ABΓ καὶ ἀγμένα ἡ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ δὲ ΑΔ, ΔΓ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ ΑΓ παράλληλος ἡ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. Πάλιν, ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν ἡ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΕ ἄκται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΔΓ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἡ ΕΒ τᾷ ΒΔ· ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ ποτὶ τὰν ΔΓ, ὃν ἡ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΕ. Εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνεται ἡ ἀχθείσα τὰν ΑΓ, δέδεικται· εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἡ ΚΛ παρὰ τὰν ΑΖ· δεικτέον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ, ὃν ἡ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ. Ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἡ ΒΕ τᾷ ΒΔ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἡ ΙΛ τᾷ ΚΙ· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἡ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΙ, ὃν ἡ ΑΓ ποτὶ τὰν ΔΑ.
- 2.170 Ἐχει δὲ καὶ ἡ ΚΙ ποτὶ τὰν ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΔΑ ποτὶ τὰν ΑΚ· δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον· ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ΚΘ ποτὶ τὰν ΘΛ, ὃν ἡ ΑΚ ποτὶ τὰν ΚΓ. Δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν. ζ'. Νοείσθω δὲ τὸ [ὅτε ἐστὶν τὸ ἐν τᾷ θεωρίᾳ] προκείμενον [ὁρώμενον] ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὸν ὀρίζοντα, καὶ τᾶς ΑΒ γραμμᾶς [ἔπειτα] τὰ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἄνω, τὸ δὲ ΒΔΓ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Β γωνίαν καὶ τὰν ΒΓ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ [δηλονότι ἴσης οὔσης τᾶς ΑΒ τῇ ΒΓ], κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ Ζ ἐκ τοῦ ἐτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α κρεμάμενον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι, ὥς νῦν κεῖται. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΔΓ τριγώνου μέρος τρίτον εἶμεν. Ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπέων ὁ ζυγός, εἴη καὶ ἡ ΑΓ γραμμὰ παρὰ τὸν ὀρίζοντα, αἱ δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ ΑΓ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπίπεδῳ ποτὶ τὸν ὀρίζοντα κάθετοι ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὀρίζοντα.
- 2.171 Τετμάσθω ἡ ΒΓ γραμμὰ κατὰ τὸ Ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν ΓΕ τᾶς ΕΒ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΒ ἡ ΚΕ καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὲ ΒΔΓ τριγώνου κέντρον βάρους ἐστὶ τὸ Θ

σαμείον· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς· Εἴ κα οὖν τοῦ ΒΔΓ τριγώνου ἂ μὲν κατὰ τὰ Β, Γ κρέμασις λυθῇ, κατὰ δὲ τὸ Ε κρεμασθῇ, μενεῖ τὸ τρίγωνον ὡς νῦν ἔχει· ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων, ἔξ οὗ σαμείου κα κατασταθῇ, μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμείον τοῦ κρεμαστοῦ καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρους τοῦ κρεμαμένου· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. Ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἔξει κατάστασιν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ Ζ χωρίον. Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεύονται τὸ μὲν Ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α, τὸ δὲ ΒΔΓ κατὰ τὸ Ε, δηλὸν ὡς ἀντιπέπονθε τοῖς μάκεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΒΔΓ τρίγωνον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον. Τριπλασία δὲ ἂ ΑΒ τὰς ΒΕ· καὶ τὸ ΒΔΓ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ Ζ χωρίου. Φανερόν δὲ [ᾧ] καί, εἴ κα τριπλάσιον ἦ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ Ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει. Ζ'. Ἐστω πάλιν ζυγὸς ἂ ΑΓ γραμμά, μέσον δὲ αὐτὰς ἔστω τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β [τὸ ΓΔΗ τρίγωνον], τὸ δὲ ΓΔΗ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΗ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, καὶ κρεμάσθω τὸ ΔΓΗ τρίγωνον ἐκ τῶν Β, Γ σαμείων, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάμενον κατὰ τὸ Α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ ΓΔΗ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται.

2.172 Ὅμοιως δὴ δειχθήσεται τὸ Ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ ΓΔΗ τριγώνου. Κρεμάσθω γάρ τι καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ Α τρίτον μέρος ἐὼν τοῦ ΒΓΗ τριγώνου· ἰσορροπήσει δὴ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΓΗ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ Λ, τὸ δὲ ΒΓΔ τῷ ΖΛ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ τὸ ΖΛ, φανερόν ὅτι καὶ τὸ ΓΔΗ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ. ἡ'. Ἐστω ζυγὸς ὁ ΑΒΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, καὶ κρεμάσθω κατὰ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΕ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τῷ Ε γωνίαν, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεύτω τῷ ΓΔΕ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ χωρίον.

2.173 Φαμί δὴ τὸ Ζ χωρίον τοῦ μὲν ΓΔΕ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ Κ μείζον. Λελάφθω γὰρ τοῦ ΔΕΓ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρους καὶ ἔστω τὸ Θ, καὶ ἂ ΘΗ ἄχθω παρὰ τὰν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ Ζ χωρίῳ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ΓΔΕ χωρίον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσόν ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ ΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ Ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΗ, ποτὶ δὲ τὸ Κ ὃν ἂ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, δηλὸν ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ ΓΔΕ τρίγωνον ποτὶ τὸ Κ ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Κ. Θ'. Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΓΔΚ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον βάσιν μὲν ἔχον τὰν ΔΚ, ὕψος δὲ τὰν ΕΓ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Ε, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεύτω τῷ ΔΓΚ τριγώνῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΓΔΚ τρίγωνον ποτὶ τὸ Λ.

2.174 Φαμί δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ ΔΓΚ ἔλασσον. Δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον. ι'. Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΒΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΚΔ πλευρὰν ἐπὶ τὸ Γ νεύουσιν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἐχέτω τὸ ΒΔΚΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η σαμεία, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεύτω τῷ ΒΔΚΗ τραπέζιῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμί τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ Λ. Τετμάσθω γὰρ ἂ ΑΓ κατὰ τὸ Ε οὕτως ὥστε, ὃν ἔχει λόγον ἂ διπλασία τὰς ΔΒ καὶ ἂ ΚΗ ποτὶ τὰν διπλασίαν τὰς ΚΗ καὶ τὰν ΒΔ, τοῦτον ἔχειν τὰν ΕΗ ποτὶ τὰν ΒΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὰν ΒΔ ἀχθεῖσα ἂ ΕΝ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ Θ· τοῦ δὲ ΒΔΗΚ τραπέζιου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρους τὸ Θ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς.

2.175 Ἦν οὖν τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ μὲν τὸ Ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η σαμείων λυθῇ, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ ἰσορροπεῖ τῷ Ζ χωρίῳ. Ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον κατὰ τὸ Ε κρεμάμενον τῷ Ζ χωρίῳ κατὰ τὸ Α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἂ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τὸ ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ χωρίον· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ

ΒΔΗΚ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ ἥπερ ποτὶ τὸ Λ, ἐπεὶ καὶ ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ποτὶ τὰν ΒΗ· ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ Ζ τοῦ Λ. ια'. Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, τὰς δὲ ΔΡ, ΚΤ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, καὶ ἅ ΔΡ ἐπὶ τὸ Β πιπτέτω, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, τὸ δὲ ΔΚΤΡ τραπέζιον κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Η καὶ τὸ Ζ κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ Ζ τῷ ΔΚΡΤ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται.

2.176 Ὅμοιως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ Ζ χωρίον τοῦ Λ. ιβ'. Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΔΕΚΗ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ε, Η σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ ΚΔ, ΕΗ γραμμὰς ποτὶ τὸ Γ νευούσας, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον τὸν λόγον ἔχέτω τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ, κρεμάσθω δὲ τὸ ΔΚΕΗ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. Φαμὶ δὴ τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον εἶμεν, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον. Ἐλαβὼν γὰρ τοῦ ΔΚΕΗ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρους, ἔστω δὲ τὸ Θ· λαφθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον· καὶ ἄγω τὰν ΘΙ παρὰ τὰν ΔΕ. Ἄν οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθῇ κατὰ τὸ Ι, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Η λυθῇ, μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν καὶ ἰσορροπήσει τῷ Ζ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον.

2.177 Ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ Ι τῷ Ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ Α, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Ζ, ὃν ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΙ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ ΔΚΕΗ ποτὶ μὲν τὸ Λ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ποτὶ τὸ Ζ, ποτὶ δὲ τὸ Μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ Ζ· ὥστε τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον ἐστὶ, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον. ιγ'. Ἐστω πάλιν τὸ μὲν ΑΓ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, τὸ δὲ ΚΔΤΡ τραπέζιον, ὥστε τὰς μὲν ΚΔ, ΤΡ πλευρὰς νευούσας εἶμεν ἐπὶ τὸ Γ, τὰς δὲ ΔΤ, ΚΡ καθέτους ἐπὶ τὰν ΒΓ, κρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Ε, Η, τὸ δὲ Ζ χωρίον κρεμάσθω κατὰ τὸ Α καὶ ἰσορροπεῖτω τῷ ΔΚΤΡ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχέτω τὸ ΔΚΤΡ τραπέζιον ποτὶ τὸ Λ χωρίον, ὃν δὲ λόγον ἔχει ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΗ, τοῦτον ἔχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ Μ. Ὅμοιως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ Ζ τοῦ μὲν Λ μείζον, τοῦ δὲ Μ ἔλασσον. ιδ'.

2.178 Ἐστω τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς. Ἐστω δὴ πρῶτον ἅ ΒΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Β σαμείου ἅ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἅ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομαῖς κατὰ τὸ Γ· ἐσσεῖται δὴ τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ὀρθογώνιον. Διηρήσθω δὴ ἅ ΒΓ ἐς ἴσα τμᾶματα ὅποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, καὶ ἀπὸ τᾶν τομαῖν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΥ, ΙΞ, ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ ΒΔΓ τῶν μὲν τραπεζίων τῶν ΚΕ, ΛΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΙΟΓ τριγώνου μείζον [ἐστὶν] ἢ τριπλάσιον. Διάχθω γὰρ εὐθεῖα ἅ ΑΒΓ, καὶ ἀπολελάφθω ἅ ΑΒ ἴσα τᾷ ΒΓ, καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ ΑΓ· μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ Β· καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Β, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΒΔΓ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Β, Γ, ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθω τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ ς χωρία κατὰ τὸ Α, καὶ ἰσορροπεῖτω τὸ μὲν Ρ χωρίον τῷ ΔΕ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπεζίῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ ς τῷ ΞΙΓ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ ΡΧΨΩΔ ς χωρίου.

2.179 Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν τμᾶμα τὸ ΒΓΘ, ὃ περιέχεται ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται ἅ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἅ ΓΔ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομαῖς κατὰ τὸ Γ, ἄκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἅ ΣΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἅ ΒΓ ποτὶ τὰν ΒΕ, ὃν ἅ ΣΕ ποτὶ τὰν ΕΦ· ὥστε καὶ ἅ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΔΕ

τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ. Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ τὸν αὐτὸν ἔχουσα λόγον, ὃν τὸ ΣΖ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΑΖ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΗ, ὃν τὸ ΤΗ ποτὶ τὸ ΜΗ, ποτὶ δὲ τὰν ΒΙ, ὃν τὸ ΥΙ ποτὶ τὸ ΝΙ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τραπέζιον τὸ ΔΕ τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Β, Ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ Γ νευούσας, ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ Ρ κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπέζιου ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν ὡς ἅ ΒΑ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΚΕ, μείζον ἄρα ἐστὶν τὸ ΚΕ χωρίον τοῦ Ρ χωρίου : δέδεικται γὰρ τοῦτο.

2.180 Πάλιν δὲ καὶ τὸ ΖΣ τραπέζιον τὰς μὲν ποτὶ τοῖς Ζ, Ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ ΣΤ νεύουσας ἐπὶ τὸ Γ, ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ Χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ τὸ Α οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπέζιου ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΕ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΖΦ, ὡς δὲ ἅ ΑΒ ποτὶ τὰν ΒΖ, οὕτως τὸ ΖΣ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΑΖ· εἴη οὖν καὶ τὸ Χ χωρίον τοῦ μὲν ΑΖ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΖΦ μείζον· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Ψ χωρίον τοῦ μὲν ΜΗ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΘΗ μείζον, καὶ τὸ Ω χωρίον τοῦ μὲν ΝΟΙΗ τραπέζιου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΠΙ μείζον, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Δ ς χωρίον τοῦ μὲν ΞΙΓ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ ΓΙΟ μείζον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΚΕ τραπέζιον μείζον ἐστὶ τοῦ Ρ χωρίου, τὸ δὲ ΑΖ τοῦ Χ, τὸ δὲ ΜΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΝΙ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΞΙΓ τρίγωνον τοῦ Δ ς, φανερόν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστὶ τοῦ ΡΧΨΩΔ ς χωρίου. Ἔστιν δὲ τὸ ΡΧΨΩΔ ς τρίτον μέρος τοῦ ΒΓΔ τριγώνου· δηλὸν ἄρα ὅτι τὸ ΒΓΔ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τῶν ΚΕ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ τραπέζιων καὶ τοῦ ΞΙΓ τριγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ μὲν ΖΦ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΘΗ τοῦ Ψ, τὸ δὲ ΙΠ τοῦ Ω, τὸ δὲ ΙΟΓ τρίγωνον τοῦ Δ ς, φανερόν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστὶ τοῦ Δ ς ΩΨΧ χωρίου· φανερόν οὖν ὅτι καὶ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τῶν ΦΖ, ΘΗ, ΙΠ τραπέζιων καὶ τοῦ ΙΓΟ τριγώνου, ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

2.181 ιε'. Ἐστω πάλιν τὸ ΒΘΓ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δὲ ΒΓ μὴ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ ἀναγκαῖον δὴ ἦτοι τὰν ἀπὸ τοῦ Β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ τμᾶματι ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ Γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν ΒΓ. Ἐστω ἃ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἃ ποτὶ τῷ Β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ Β ἃ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, καὶ διηρήσθω ἃ ΒΓ εἰς τμᾶματα ἴσα ὅποσαοῦν τὰ ΒΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΙ, ΙΓ, ἀπὸ δὲ τῶν Ε, Ζ, Η, Ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ΕΣ, ΖΤ, ΗΨ, ΙΞ, καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι αὐταὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεξεύχθωσαν ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Φαμὶ δὴ καὶ νῦν τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῶν μὲν τραπέζιων τῶν ΒΦ, ΑΖ, ΜΗ, ΝΙ καὶ τοῦ ΓΙΞ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον, τῶν δὲ ΖΦ, ΗΘ, ΙΠ καὶ τοῦ ΓΟΙ τριγώνου μείζον ἢ τριπλάσιον. Ἐκβεβλήσθω ἃ ΔΒ ἐπὶ θάτερα. Ἀγαγὼν οὖν κάθετον τὰν ΓΚ τᾷ ΓΚ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν ΑΚ. Νοείσθω δὴ πάλιν ζύγιον τὸ ΑΓ, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ Κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ Κ, κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ΓΚΔ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ Γ, Κ ἔχον ὡς νῦν κεῖται, καὶ ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν κατὰ τὸ Α τὰ Ρ, Χ, Ψ, Ω, Δ ς χωρία, καὶ τὸ μὲν Ρ τῷ ΔΕ τραπέζιῳ ἰσορροπεῖτω οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται, τὸ δὲ Χ τῷ ΖΣ τραπέζιῳ, τὸ δὲ Ψ τῷ ΤΗ, τὸ δὲ Ω τῷ ΥΙ, τὸ δὲ Δ ς τῷ ΓΙΞ τριγώνῳ· ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ· ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ΡΧΨΩΔ ς χωρίου.

2.182 Ὅμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ΒΦ τραπέζιον τοῦ Ρ χωρίου μείζον, καὶ τὸ μὲν ΘΕ τραπέζιον μείζον ἐὼν τοῦ Χ χωρίου, τὸ δὲ ΖΦ ἔλαττον, καὶ τὸ μὲν ΜΗ τραπέζιον μείζον ἐὼν τοῦ Ψ χωρίου, τὸ δὲ ΗΘ ἔλασσον, καὶ ἔτι τὸ μὲν ΝΙ τραπέζιον μείζον ἐὼν τοῦ Ω χωρίου, τὸ δὲ ΠΙ ἔλασσον, καὶ τὸ μὲν ΞΙΓ τρίγωνον μείζον τοῦ Δ ς χωρίου, τὸ δὲ ΓΙΟ ἔλασσον· δηλὸν οὖν ἐστὶν. ις'. Ἐστω πάλιν τμᾶμα τὸ ΒΘΓ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ Β ἃ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἔστω δὲ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου τρίτον μέρος τῷ Ζ χωρίον.

2.183

Φαμί δὴ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ Ζ χωρίῳ. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἴσον, ἦτοι μείζον ἔστιν ἢ ἔλασσον. Ἐστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον· ἃ δὴ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ ΒΓΔ τριγώνου. Δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἐστω δὴ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένης ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου· ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἃ ΒΕ μέρος τᾶς ΒΔ. Διηρήσθω οὖν ἃ ΒΔ ἐς τὰ μέρη, καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσεων σαμεῖα τὰ Η, Ι, Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Η, Ι, Κ σαμείων ἐπὶ τὸ Γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· τέμνοντι δὴ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσά ἐντι αὐτᾶς κατὰ τὸ Γ· καὶ διὰ τῶν σαμείων, καθ' ἃ τέμνοντι τὰν τομάν αἱ εὐθεῖαι, ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ ΜΦ, ΝΡ, ΞΘ, ΠΟ· ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν ΒΔ.

2.184 Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἧ ὑπερέχει τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφοτέρα τό τε Ζ χωρίον καὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἐλάσσονά ἐντι τοῦ τμήματος. Καὶ τῷ ΒΓΕ τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐντι, δι' ὧν ἃ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ ΜΕ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ, καὶ τὸ ΓΟΣ τρίγωνον· τὸ μὲν γὰρ ΜΕ τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ ΜΛ ἴσον τῷ ΦΛ καὶ τὸ ΛΞ ἴσον τῷ ΘΡ καὶ τὸ ΧΞ ἴσον τῷ ΟΘ καὶ τὸ ΓΧΠ τρίγωνον τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ· τὸ δὴ Ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν ΜΛ, ΞΡ, ΠΘ καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου. Καί ἐστι τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ Ζ χωρίου· τὸ δὲ ΒΔΓ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν ΜΛ, ΡΞ, ΘΠ τραπεζίων καὶ τοῦ ΠΟΓ τριγώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μείζον ἐὼν ἢ τριπλάσιον. Οὐκοῦν οὐ μείζον ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. Ἐστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν ἄρα ἃ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. Ἐστω οὖν τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μέρος τοῦ ΒΔΓ τριγώνου, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ἧ ὑπερέχει τὸ Ζ χωρίον τοῦ ΒΘΓ τμήματος, τὸ ΒΕΓ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα ἀμφοτέρα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Ζ.

2.185 Ἐστὶν δὲ καὶ τὸ Ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΨΞ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου· ἔστιν γὰρ τὸ ΒΔΓ τοῦ μὲν Ζ τριπλάσιον, τῶν δὲ εἰρημένων χωρίων ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου ἐδείχθη· ἔλασσον ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον καὶ τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ΕΜ, ΦΝ, ΞΨ, ΠΤ καὶ τοῦ ΓΠΣ τριγώνου. Ὡστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμήματος ἔλασσον εἶη καὶ τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῶν περιλειπομένων χωρίων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὼν τὸ ΒΕΓ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ΕΜ, ΦΛ, ΘΡ, ΘΟ καὶ τῷ ΓΟΣ τριγώνῳ, ἃ ἐντι μείζονα τῶν περιλειπομένων χωρίων. Οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ Ζ χωρίου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τῷ Ζ χωρίῳ. ἰζ'. Τούτου δεδειγμένον φανερόν ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτρίτον ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. Ἐστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΒΘΓ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Θ σαμεῖον κορυφὰ ἐστι τοῦ τμήματος, ἃ ἀπὸ τοῦ Θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν ΒΓ, καὶ ἃ ΒΓ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ. Ἀχθὼ δὲ ἃ ΕΘ παρὰ τὰν διάμετρον, ἄχθὼ δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὰν διάμετρον ἃ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἃ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Γ.

2.186 Ἐπεὶ οὖν ἃ μὲν ΚΘ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶν, ἃ δὲ ΓΔ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Γ, ἃ δὲ ΕΓ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσῃ τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ Θ, τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. Ἐπεὶ δὲ τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τοῦ μὲν ΒΘΓ τμήματος τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ ΒΘΓ τριγώνου τετραπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτρίτον ἐστι τὸ ΒΘΓ τμᾶμα τοῦ ΒΘΓ τριγώνου. Τῶν

τμαμάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς βάσιν μὲν καλέω τὰν εὐθεΐαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμήματος, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ' οὗ ἡ μεγίστη κάθετος ἄγεται. ιη'. Εἴ κα ἓν τμήματι, ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεΐα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἀ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν.

2.187 Ἐστω γὰρ τμήμα τὸ ΑΒΓ περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ ἄχθω ἡ ΔΒ παρὰ τὰν διάμετρον. Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἡ ΒΔ ἄκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΑΔ, ΔΓ, δῆλον ὡς παράλληλοί ἐντι ἅ τε ΑΓ καὶ ἡ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομαῖς. Φανερόν οὖν ὅτι τὰν ἀπὸ τᾶς τομαῖς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσσεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἀγομένη· κορυφὰ οὖν ἐστὶν τοῦ τμήματος τὸ Β σαμεῖον. ιθ'. Ἐν τμήματι περιεχομένῳ ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἡ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένης ἐπίτριτος ἐσσεῖται μάκει. Ἐστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἡ μὲν ΒΔ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΓ, ἡ δὲ ΕΖ ἀπὸ μέσας τᾶς ΑΔ, ἄχθω δὲ καὶ ἡ ΖΘ παρὰ ΑΓ.

2.188 Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἡ ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρον ἄκται, καὶ αἱ ΑΔ, ΖΘ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσάν ἐντι, δῆλον ὡς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει, ὃν ἡ ΑΔ ποτὶ τὰν ΖΘ δυνάμει· τετραπλασία ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΒΔ τᾶς ΒΘ μάκει. Φανερόν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστὶν ἡ ΒΔ τᾶς ΕΖ μάκει. κ'. Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μείζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον ἢ ἡμισυ τοῦ τμήματος. Ἐστω γὰρ τὸ ΑΒΓ τμήμα οἷον εἴρηται, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ καὶ ὕψος ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμήματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ Β σαμεῖον κορυφὰν εἶμεν τοῦ τμήματος· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσᾳ τᾶς τομαῖς. Ἀχθῶ ἡ ΔΕ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τῶν Α, Γ αἱ ΑΔ, ΓΕ παρὰ τὰν διάμετρον· πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμήματος.

2.189 Ἐπεὶ οὖν ἡμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΔΕΓ παραλληλογράμμου, φανερόν ὅτι μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ τμήματος. ΠΟΡΙΣΜΑ Δεδειγμένου δὲ τούτου δῆλον ὅτι ὡς ἐς τοῦτο τὸ τμήμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου· ἀφαιρουμένου γὰρ αἰεὶ μείζονος τοῦ ἡμίσεος διὰ τοῦτο φανερόν ὅτι ἐλασσοῦντες αἰεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα ποιήσομες ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κα'. Εἴ κα εἰς τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέντων δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα εἰς τὰ λειπόμενα τμήματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐκατέρου τῶν τριγώνων τῶν εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ εἰς τὸ ὅλον τμήμα ἐγγραφέν. Ἐστω τὸ ΑΒΓ τμήμα οἷον εἴρηται, καὶ τετμάσθω ἡ ΑΓ δίχα τῷ Δ, ἡ δὲ ΒΔ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον· τὸ Β ἄρα σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶν τοῦ τμήματος. Τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό.

2.190 Πάλιν τετμάσθω δίχα ἡ ΑΔ τῷ Ε, καὶ ἄχθω ἡ ΕΖ παρὰ τὰν διάμετρον, τετμάσθω δὲ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα Ζ σαμεῖον κορυφὰ ἐστὶ τοῦ τμήματος τοῦ ΑΖΒ. Τὸ δὲ ΑΖΒ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ [ΑΖΒ] τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό. Δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΖΒ τριγώνου. Ἐστὶν οὖν ἡ ΒΔ τᾶς μὲν ΕΖ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ ΕΘ διπλασία· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τᾶς ΘΖ. Ὡστε καὶ τὸ ΑΕΒ τρίγωνον διπλασίον ἐστὶ τοῦ ΖΒΑ· τὸ μὲν γὰρ ΑΕΘ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ΑΘΖ, τὸ δὲ ΘΒΕ τοῦ ΖΘΒ. Ὡστε τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΖΒ ἐστὶν ὀκταπλάσιον. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ εἰς τὸ ΒΗΓ τμήμα ἐγγραφέντος. κβ'. Εἴ κα ἢ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ

ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, καὶ χωρία τεθέωντι ἐξῆς ὅποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, ἥ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος. Ἐστω γὰρ τμήμα τὸ ΑΔΒΕΓ περιεχόμενον ὑπὸ τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, χωρία δὲ ἔστω ὅποσαοῦν ἐξῆς κείμενα τὰ Ζ, Η, Θ, Ι, τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ἀγούμενον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἔστω τὸ Ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον.

2.191 Λέγω ὅτι τὸ τμήμα τῶν Ζ, Η, Θ, Ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. Ἐστω τοῦ μὲν ὅλου τμήματος κορυφὰ τὸ Β, τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ Δ, Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστὶ τετραπλάσιον. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Ζ χωρίῳ, κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ Η χωρίῳ. Ὀμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ τὰ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ ἴσα ἐντὶ τῷ Θ καὶ τὰ ἐς τὰ ὕστερον γενόμενα τμήματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ Ι χωρίῳ· σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι εἰς τὸ τμήμα.

2.192 Φανερόν οὖν ὅτι ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμήματος. κγ'. Εἴ κα μεγέθεα τεθέωντι ἐξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, τὰ πάντα μεγέθεα καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. Ἐστω οὖν ὅποσαοῦν μεγέθεα ἐξῆς κείμενα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε τετραπλάσιονα ἕκαστον τοῦ ἐπομένου, μέγιστον δὲ ἔστω τὸ Α, ἔστω δὲ τὸ μὲν Ζ τρίτον τοῦ Β, τὸ δὲ Η τοῦ Γ, τὸ δὲ Θ τοῦ Δ, τὸ δὲ Ι τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ζ τοῦ Β τρίτον μέρος ἐστίν, τὸ δὲ Β τοῦ Α τέταρτον μέρος ἐστίν, ἀμφοτέρω τὰ Β, Ζ μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Η, Γ τοῦ Β καὶ τὰ Θ, Δ τοῦ Γ καὶ τὰ Ι, Ε τοῦ Δ· καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν Α, Β, Γ, Δ. Ἐντὶ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ Ζ, Η, Θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν Β, Γ, Δ· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ι τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ Α.

2.193 Δῆλον οὖν ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ τὸ Ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ Ε, τοῦ Α ἐστὶν ἐπίτριτα. κδ'. Πᾶν τμήμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. Ἐστω γὰρ τὸ ΑΔΒΕΓ τμήμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομαῖς, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον ἔστω τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον, τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ Κ χωρίον. Δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔΒΕΓ τμήματι. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμήμα τοῦ Κ χωρίου. Ἐνέγραψα δὴ τὰ ΑΔΒ, ΒΕΓ τρίγωνα, ὡς εἴρηται, ἐνέγραψα δὲ καὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσιν καὶ ὕψος τὸ αὐτό· ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾷς ὑπεροχᾷς, ἧς ὑπερέχει τὸ ΑΔΒΕΓ τμήμα τοῦ Κ χωρίου.

2.194 Ὡστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ Κ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἐξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ, πρῶτον μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν ΑΔΒ, ΒΕΓ τριγώνων, ἔπειτα δὲ αὐτὰ ταῦτα τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἐπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων καὶ ἀεὶ οὕτω, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου, τὸ δὲ Κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν μεῖζον τὸ ΑΔΒΕΓ τμήμα τοῦ Κ χωρίου. Ἐστω δέ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Κεῖσθω δὴ τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον τῷ Ζ, τοῦ δὲ Ζ τέταρτον τὸ Η, καὶ ὁμοίως τοῦ Η τὸ Θ, καὶ ἀεὶ ἐξῆς τιθέσθω, ἕως κα γένηται τὸ ἔσχατον ἔλασσον τᾷς ὑπεροχᾷς, ἧς ὑπερέχει τὸ Κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ Ι· ἐστὶν δὴ τὰ Ζ, Η, Θ, Ι χωρία καὶ τὸ τρίτον τοῦ Ι ἐπίτριτα τοῦ Ζ. Ἐστὶν δὲ καὶ τὸ Κ τοῦ Ζ ἐπίτριτον· ἴσον ἄρα τὸ Κ τοῖς Ζ, Η, Θ, Ι καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ Ι. Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ χωρίον τῶν μὲν Ζ, Η, Θ, Ι

χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ I, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ I, δηλον ὡς μείζονά ἐντι τὰ Z, H, Θ, I χωρία τοῦ τμήματος ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ὅτι, ἐὰν ᾗ ὅποσαοῦν χωρία ἐξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾗ τῷ εἰς τὸ τμήμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμήματος.

2.195 Οὐκ ἄρα τὸ AΔBEΓ τμήμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ K χωρίου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ K. Τὸ δὲ K χωρίον ἐπίτρίτον ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ABΓ· καὶ τὸ AΔBEΓ ἄρα τμήμα ἐπίτρίτον ἐστι τοῦ ABΓ τριγώνου.