

eul_wid: ixo-ae

Ἀρχιμήδης ὁ Συρακούσιος · Archimedes of Syracuse

On Conoids and Spheroids

Περὶ Κωνοειδῶν καὶ Σφαιροειδῶν

Period: Ἑλληνιστική Hellenistic
Dialect: Δωρική Doric
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

1.152. (1t) Ἀρχιμήδης Δοσιθέω εὖ πράττειν. Ἀποστέλλω τοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξεις, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι δύσκολον ἔχειν τι φανείσας μοι τὰς εὐρέσιος αὐτῶν ἀπόρησα· διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. Ὑστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. Ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδῆος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντι ποτεξευρημένα περὶ τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδῆος καὶ περὶ σφαιροειδῶν σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. Περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδῆος ὑπέκειτο τάδε· εἴ κα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τὰς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τὰς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ὀρθογώνιον κωνοειδῆς καλεῖσθαι, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον καλεῖσθαι, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἄπτεται ὁ ἄξων τὰς τοῦ κωνοειδῆος ἐπιφανείας· καὶ εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδῆος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδῆος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμᾶματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τὰς τοῦ κωνοειδῆος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδῆος, ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι ἀπὸ τὰς ἀχθείσας διὰ τὰς κορυφᾶς τοῦ τμᾶματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδῆος.

1.153 Προεβάλλετο δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδῆος τμᾶματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· καὶ διὰ τί, εἴ κα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδῆος δύο τμᾶματα ἀποτμαθῶντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμᾶματα διπλάσιον λόγον ἐξοῦντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἀξόνων. Περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδῆος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε· εἴ κα ἐν ἐπιπέδῳ ἔωντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ καὶ ἃ διάμετρος αὐτὰς καὶ αἱ ἔγγιστα τὰς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, μενούσας δὲ τὰς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τὰς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς δηλὸν ὡς κώνον ἰσοσκελεὰ περιλαψοῦνται, οἱ κορυφὰ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτοντι, ἄξων δὲ ἃ μεμενάκουσα διάμετρος τὸ δὲ ὑπὸ τὰς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθὲν

ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλεῖσθαι, ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἄπτεται ὁ ἄξων τὰς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος· τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τῶν ἔγγιστα τὰς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι, τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τὰς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τὰς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι καὶ εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τμήμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμήματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τὰς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἄπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος, ἄξονα δὲ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμήματι ἀπὸ τὰς διαχθείσας διὰ τὰς κορυφᾶς τοῦ τμήματος καὶ τὰς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς, καὶ τὰν μεταξὺ τῶν εἰρημενῶν κορυφῶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι.

1.154 Τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα ὁμοῖά ἐντι, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὁμοῖα καλεῖσθω, ὧν κα οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὁμοῖοι ἔωντι. Προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι· διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμήματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμήμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τὰς ποτεοῦσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τὰς ποτεοῦσας τῷ ἄξονι· καὶ διὰ τί, εἴ κα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος τμήμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμήμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τὰς ποτεοῦσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τᾷ διπλασίᾳ τὰς ποτεοῦσας τῷ ἄξονι.

1.155 Περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε· εἴ κα ὀξυγωνίου κώνου τομὰ μενούσας τὰς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμᾶκες σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· εἰ δέ κα τὰς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς καλεῖσθαι· ἐκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενάκουσαν διάμετρον, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἄπτεται ὁ ἄξων τὰς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος, κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ' ὀρθὰς ἀγομένην τῷ ἄξονι· καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύωντι μὴ τέμνοντα, παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ τέμνον τὸ σφαιροειδὲς, τῶν γενομένων τμαμάτων βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τὰς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰς δὲ τὰ σημεία, καθ' ἃ ἐπιψαύονται τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα, ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας· ὅτι δὲ τὰ τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ' ἑν μόνον ἄπτονται σαμεῖον τὰς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἂ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμες ὁμοῖα δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν κα οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι.

1.156 Τμήματα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὁμοῖα καλεῖσθω, εἴ κα ἀφ' ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἔωντι καὶ τὰς τε βάσεις ὁμοίας ἔχωντι, καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν ἦτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους

τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσεων. Προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδῶν τάδε θεωρῆσαι διὰ τί, εἴ καί τι τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἐκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, εἰ δέ κα ὀρθῶ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δέ, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μείζον ποτὶ τὸν κώνον τὸν τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾷς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμάμα ποτὶ τὸν κώνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾷς εὐθείας, ἃ ἐστὶν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος καὶ διὰ τί, εἴ κα τῶν σφαιροειδῶν τι ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἐκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· γίνεταί δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου· εἰ δέ κα μήτε διὰ τοῦ κέντρου μήτε ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδές, τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μείζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ αὐτᾷς τᾷς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, τὸ δὲ ἔλασσον τμάμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἂ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾷς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος· γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου.

1.157 Ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὐρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα, οἷον καὶ τόδε· ὅτι τὰ ὁμοῖα σφαιροειδέα καὶ τὰ ὁμοῖα τμάματα τῶν τε σφαιροειδῶν σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδῶν τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα τῶν ἁξόνων, καὶ διότι τῶν ἴσων σφαιροειδῶν σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασιν τοῖς ἁξόνεσσιν, καὶ εἴ κα τῶν σφαιροειδῶν σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθωντι τοῖς ἁξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα· πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε· ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος σχήματος ἢ κωνοειδέος τμάμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παρὰ δοθὲν ἐπίπεδον ἀγμένῳ, εἴμεν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμάμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. Προγράψαντες οὖν τὰ τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρειαῖν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν μετὰ ταῦτα γραφοῦμές τοι τὰ προκείμενα.

1.158 Εὐτύχει. <ΟΡΟΙ> Εἴ κα κώνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἂ τομὰ ἐσσεῖται ἥτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. Εἰ μὲν οὖν κύκλος ἂ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμάμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ κώνος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα ἂ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλεῖσθω, τοῦ δὲ ἀποτμάματος βάσις μὲν καλεῖσθω τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφὰ, ἄξων δὲ ἂ ἀπὸ τᾷς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. Καὶ εἴ κα κύλινδρος δυοῖς ἐπιπέδοις παραλλήλοις τμαθῇ συμπίπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσοῦνται ἥτοι κύκλοι ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις. Εἰ μὲν οὖν κα αἱ τομαὶ κύκλοι γίνωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται· εἰ δέ κα αἱ τομαὶ γίνωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ

τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξύ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλεῖσθω, τοῦ δὲ τόμου βάσις μὲν καλεῖσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τῶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, ἄξων δὲ ἡ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τῶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν· ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ἐπὶ τᾷ αὐτᾷ εὐθείᾳ τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου.

1.159 <ΛΗΜΜΑ> Εἴ κα ἔωντι μεγέθεα ὅποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, ἢ δὲ ἡ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστὶν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ διπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. Ἀ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά. α'. Εἴ κα μεγέθεα ὅποσαοῦν τῷ πλήθει ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχωντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγεται δὲ τὰ τε πρῶτα μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα ἢ πάντα ἢ τινα αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοιοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα, ἃ λέγονται. Ἐστω τινὰ μεγέθεα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, καὶ ἐχέτω τὸ μὲν Α ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Γ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Ι, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις, λεγέσθω δὲ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγέθεα ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ ἐν λόγοις ὁποιοιοῦν, τὰ δὲ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτ' ἄλλα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ Α ποτὶ τὸ Ν, τὸ Η ἐχέτω ποτὶ τὸ Τ, ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ Β ποτὶ τὸ Ξ, τὸ Θ ἐχέτω ποτὶ τὸ Υ, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις· δεικτέον ὅτι πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

1.160 Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν Ν ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Η, τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Β, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Θ, τὸ δὲ Β ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Θ ποτὶ τὸ Υ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ Ν ποτὶ τὸ Ξ, ὃν τὸ Τ ποτὶ τὸ Υ· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ο, ὃν τὸ Υ ποτὶ τὸ Φ, καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. Ἐχοντι δὴ τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ πάντα ποτὶ τὸ Α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ πάντα ποτὶ τὸ Η, τὸ δὲ Α ποτὶ τὸ Ν, ὃν τὸ Η ποτὶ τὸ Τ, τὸ δὲ Ν ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Τ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω· δηλὸν οὖν, ὅτι πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, Σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω. Φανερόν δὲ ὅτι καὶ εἴ κα τῶν τε Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ μεγεθῶν τὰ μὲν Α, Β, Γ, Δ, Ε λέγονται ποτὶ τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ, τὸ δὲ Ζ μὴδὲ ποθ' ἐν λέγεται, καὶ τῶν Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ τὰ μὲν Η, Θ, Ι, Κ, Λ λέγονται ποτὶ τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, τὰ ὁμοῖα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ Μ μὴδὲ ποθ' ἐν λέγεται, ὁμοίως πάντα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ποτὶ πάντα τὰ Ν, Ξ, Ο, Π, Ρ τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ ποτὶ πάντα τὰ Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ.

1.161 β'. Εἴ κα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλάλαις ἔωντι ὅποσαιοῦν τῷ πλήθει, καὶ παρ' ἐκάστην αὐτᾶν παραπέση τι χωρίον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, ἔωντι δὲ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι καὶ ἡ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστῳ, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἐξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾷ καὶ μιᾷ τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν ποτὶ τὴν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾷς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾷ καὶ τᾷ ἡμισέᾳ μιᾷς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἐξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. Ἐστωσαν γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὅποσαιοῦν τῷ πλήθει, ἐφ' ἃν τὰ Α, καὶ παραπεπτωκέντω παρ' ἐκάστην αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, ἔστων δὲ τῶν ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἡ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστῳ, καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἡ Β, ἐλαχίστα δὲ ἡ Η· ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐφ' ὧν ἕκαστον τῶν Θ, Ι, Κ, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ

μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν AB παρακειμένῳ, ἔστω δὲ ἅ μὲν ΘΙ γραμμὰ ἴσα τᾷ Α, ἅ δὲ ΚΛ ἴσα τᾷ Β, καὶ τὰν μὲν ΘΙ γραμμῶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾷς Ι, τὰν δὲ ΚΛ ἑκάστα τριπλασία τᾷς Κ· δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, Κ, Λ, ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΘΙΚΛ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΙΚ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου.

1.162 Ἦστι γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ Α, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, καὶ ἅ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ [ἐπεὶ τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν], καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ· σύμπαντα οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ Α ἐλάσσονά ἐντι ἢ διπλασίονα, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλασίονα.

1.163 Αὐτὰ οὖν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ Α ἐλάσσονά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα. Πάλιν ἐντὶ γραμμαὶ τινες αἱ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἅ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ, ἐφ' ἃν τὰ Κ, Λ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστῳ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασῶν τῶν ἰσῶν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστῳ πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχουσῶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριηλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾷς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐλίκων ἐκδεδομένοις. Τὰ οὖν χωρία, ἐν οἷς τὸ Κ, πάντων μὲν τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, ἐλάσσονά ἐστιν, αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, μείζονα· ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Ι, Κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονά ἐστι, τῶν δὲ ἐν οἷς τὰ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, μείζονα. Δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ Θ, Ι, Κ, Λ ποτὶ μὲν τὰ χωρία, ἐν οἷς τὰ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΘΛ ποτὶ τὰν ΙΚ, ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρὶς τοῦ ἐν ᾧ τὸ ΑΒ μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

1.164 γ'. Εἴ κα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι ἐπιψαύωντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἔωντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾷς ἐτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τᾷς ἐπιψαυούσας τὰς παραλλήλου αὐτᾶ. Ἀποδεδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. Εἴ κα ἀπὸ τᾷς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ὅπως οὖν ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτὰ δὲ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι καὶ ὕψος τὸ αὐτό· διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας τὰς παρὰ τὴν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας. Ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἀποτετμήσθω ἀπ' αὐτᾶς δύο τμάματα τό τε ΑΔΕ καὶ τὸ ΘΒΓ, ἔστω δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τμάματος διάμετρος ἡ ΔΖ, τοῦ δὲ ΘΒΓ ἡ ΒΗ, καὶ ἔστων ἴσαι αἱ ΔΖ, ΒΗ· δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΔΕ, ΘΒΓ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. Ἔστω δὲ πρῶτον ἡ ἀποτεμένουσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἡ ΘΓ ποτ' ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾷς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, λελάφθω δὲ παρ' ἃν δύνανται αἱ ἀπὸ τᾷς τομᾶς, ἡ διπλασία τᾷς μέχρι τοῦ ἄξονος, καὶ ἔστω ἐφ' ᾗ τὸ Μ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡ ΑΚ.

1.165 Ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐντι ἡ ΔΖ τοῦ τμάματος, ἡ δὲ ΑΕ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἡ ΔΖ παρὰ τὴν διάμετρον ἐστὶ τᾷς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὴν ΑΕ ἀγομένας. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾷς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾷς ΑΚ, τοῦτον ἔχέτω ἡ Ν ποτὶ τὴν Μ· αἱ δὲ ἀπὸ τᾷς τομᾶς ἐπὶ τὴν ΔΖ ἀγόμεναι παρὰ τὴν ΑΕ δύνανται τὰ παρὰ τὴν ἴσαν τᾷ Ν παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὐτοὶ ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾷς ΔΖ ποτὶ τὸ Δ πέραις· δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς δύναται οὖν καὶ ἡ ΑΖ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾷς

Ν καὶ τὰς ΔΖ. Δύναται δὲ καὶ ἡ ΘΗ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τὰς Μ καὶ τὰς ΒΗ, ἐπεὶ κάθετός ἐστιν ἡ ΘΗ ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔχει οὖν καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΑΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΘΗ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ Ν ποτὶ τὴν Μ, ἐπεὶ ἴσαι ὑπέκλειντο αἱ ΔΖ, ΒΗ.

1.166 Ἐχει δὲ τὸ ἀπὸ τὰς ΑΖ τετράγωνον καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΑΚ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ Ν ποτὶ τὴν Μ· ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ ΘΗ, ΑΚ. Ἐντὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ ΒΗ, ΔΖ· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΗ, ΒΗ περιεχόμενον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΔΖ. Ἰσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ΘΗΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΖ τριγώνῳ· ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. Ἔστι δὲ τοῦ μὲν ΑΔΕ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΑΔΕ τμήμα, τοῦ δὲ ΘΒΓ τριγώνου ἐπίτριτον τὸ ΘΒΓ τμήμα· δηλὸν οὖν ὅτι τὰ τε τμήματα ἐστὶν ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. Εἰ δὲ μηδετέρα τῶν τῶν τμήματα ἀποτεμνουσῶν ποτ' ὀρθὰς ἐντὶ τῇ διαμέτρῳ τὰς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθεῖσας ἀπὸ τὰς διαμέτρου τὰς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τῇ διαμέτρῳ τῇ τοῦ ἐνὸς τμήματος καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τὰς ἀπολαφθεῖσας ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσας τῇ διαμέτρῳ, τὸ γενόμενον τμήμα ἐκατέρῳ τῶν τμημάτων ἴσον ἐσσεῖται. Δηλὸν οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν. δ'. Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα τὴν διάμετρον ἴσαν τῇ μείζονι διαμέτρῳ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ἐλάσσων διάμετρος αὐτὰς ποτὶ τὴν μείζω ἢ ποτὶ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον. Ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, διάμετρος δὲ αὐτὰς ἡ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ' ἧς τὰ Α, Γ, ἡ δὲ ἐλάσσων, ἐφ' ἧς τὰ Β, Δ, ἔστω δὲ κύκλος περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ· δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΒΔ ποτὶ τὴν ΓΑ, τουτέστι τὴν ΕΖ.

1.167 Ὅν δὴ λόγον ἔχει ἡ ΒΔ ποτὶ τὴν ΕΖ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ψ κύκλος τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος ὁ Ψ κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπὸ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζων. Δυνατὸν δὴ ἐστὶν εἰς τὸν Ψ κύκλον πολὺγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον μείζον τοῦ ΑΒΓΔ χωρίου. Νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὸν ΑΕΓΖ κύκλον εὐθύγραμμον ὁμοῖον τῷ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ κάθετοι ἄχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΓ διάμετρον, ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖαι καθ' ἃ τέμνοντι αἱ κάθετοι τὴν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν, εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν· ἐσσεῖται δὴ τι ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον, καὶ ἔξει αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΒΔ ποτὶ τὴν ΕΖ. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΘ, ΚΛ κάθετοι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνεται κατὰ τὰ Μ, Β, δηλὸν ὅτι τὸ ΑΕ τραπέζιον ποτὶ τὸ ΘΜ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΘΕ ποτὶ τὴν ΒΘ.

1.168 Διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ' ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἡ ΕΘ ποτὶ τὴν ΒΘ. Ἐχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς Α, Γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ ποτὶ τὰ ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τοῦτον τὸν λόγον· ἔξει οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ΑΕΓΖ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΕΖ ποτὶ τὴν ΒΔ. Ἐχει δὲ τὸ αὐτὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐγγεγραμμένῳ· ὅπερ ἀδύνατον· μείζον γὰρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Πάλιν δὴ δυνατόν εἰς τὴν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶν ἐγγράψαι πολὺγωνον ἀρτιόπλευρον μείζον τοῦ Ψ κύκλου. Ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἀπὸ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ κάθετοι ἀχθεῖσαι ἐπὶ τὴν ΑΓ ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν· πάλιν οὖν ἐσσεῖται τι ἐν τῷ ΑΕ κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἔξει ποτὶ τὸ ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ ΕΖ ποτὶ τὴν ΒΔ. Ἐγγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν Ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ Ψ κύκλῳ

ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὼν τῷ ἐν τῇ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῇ ἐγγεγραμμένῳ ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Ψ κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς.

1.169 Δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν ΑΕΓΖ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΒΔ ποτὶ τὰν ΕΖ. ε'. Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ποτὶ πάντα κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν διαμέτρων τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. Ἐστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς, ἐν ᾧ τὸ Χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς αἱ ΑΓ, ΒΔ, μείζων δὲ ἂ ΑΓ, καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ Ψ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἂ ΕΖ· δεικτέον ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον. Περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· τὸ δὴ Χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἂ ΑΓ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἂ ΒΔ ποτὶ τὰν ΑΓ.

1.170 Ἐχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἂ ΑΓ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἂ ΕΖ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ Χ χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον. ς'. Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν διαμέτρων τῶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομῶν ποτ' ἄλλαλα. Ἐστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς, ἐν οἷς τὰ Α, Β, ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΔ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν διαμέτρων τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς τῆς περιεχούσας τὸ Α χωρίον, τὸ δὲ ΕΖ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν διαμέτρων τῆς ἐτέρας τομῆς· δεικτέον ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ. Λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ ΚΛ.

1.171 Ἐχει δὴ τὸ μὲν Α χωρίον ποτὶ τὸν Ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΚΛ, ὁ δὲ Ψ κύκλος ποτὶ τὸ Β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ΚΛ ποτὶ τὸ ΕΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ Α χωρίον ποτὶ τὸ Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ΓΔ ποτὶ τὸ ΕΖ. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τούτου δὲ φανερόν ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοίων ὀξυγωνίου κώνου τομῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι ποτ' ἄλλαλα, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἁλλάλας αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τῶν τομῶν. ζ'. Ὀξυγωνίου κώνου τομῆς δοθείσας καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἔστιν ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς, δυνατόν ἐστι κῶνον εὐρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τῆς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἂ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς. Δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομῆς, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἔστιν ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς, διὰ δὲ τῆς ἀνεστακούσας εὐθείας καὶ τῆς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδόν τι ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἂ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἂ ΑΒ, τὸ δὲ κέντρον τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς τὸ Δ, ἂ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα ὀρθὰ ἂ ΓΔ, πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ Γ, ἂ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ γεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν ΓΔ· δεῖ δὴ κῶνον εὐρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομῆς.

1.172 Ἀπὸ δὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὰ Α, Β εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι ἐκβεβλήσθων, καὶ ἀπὸ τοῦ Α διάχθω ἂ ΑΖ, ὥστε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ ΔΓ τετράγωνον· δυνατόν δὲ ἔστιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον· ἀπὸ δὲ τῆς ΑΖ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ΑΓ, ΑΖ, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ

κύκλου τούτου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον· ἐν δὴ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου τούτου δειχθήσεται ἐοῦσα ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομάς, ὃ μὴ ἐστὶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου. Νοεῖσθω δὴ τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομάς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἅ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ· ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΖ· ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· συμπίπτει δὴ αὐτὰ τῇ ΑΖ κατὰ τὸ Λ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΖΑ ἅ ΛΜ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΑΖ, τὸ δὲ Μ νοεῖσθω μετέωρον ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν ΑΒ διὰ μὲν τοῦ Λ ἅ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ε ἅ ΠΡ.

1.173 Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τὰν ΕΑ, ΕΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΕΠ, ΕΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΔ, ΔΒ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τὰν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΕΠ, ΕΡ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΔ, ΔΒ. Ἔστιν δέ, ὥς μὲν τὸ ὑπὸ τὰν ΑΕ, ΕΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΕΠ, ΕΡ, οὕτω τὸ ὑπὸ τὰν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΛΞ, ΛΟ, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς μείζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΚ, ΚΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τὰν ΑΛ, ΛΖ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΞΛ, ΛΟ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΚ, ΚΒ. Ἐχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΞΛ, ΛΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ τετράγωνον· ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΑΛ, ΛΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τὰν ΑΛ, ΛΖ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ τετράγωνον· ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν ΑΖ κάθετος ἄχθη ἅ ΛΜ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ· ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶν τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα.

1.174 Ἄ δὲ ΓΜ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κῶνου· δηλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κῶνου. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομάς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κῶνου. Ὅλα οὖν ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν τοῦ αὐτοῦ κῶνου. ἦ'. Ὀξυγωνίου κῶνου τομάς δοθείσας καὶ γραμμὰς μὴ ὀρθὰς ἀνεστακούσας ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομάς ἐν ἐπιπέδῳ, ὃ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακὸς διὰ τῆς ἐτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὐρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τῆς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἅ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά. Ἔστω δὴ διάμετρος μὲν τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομάς ἅ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ ἅ ΔΓ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστάκουσα, ὥς εἴρηται, ἅ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά νοεῖσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· δεῖ δὴ κῶνον εὐρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά.

1.175 Οὐ δὴ ἐντι ἴσαι αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἐπεὶ ἅ ΓΔ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά. Ἔστω οὖν ἴσα ἅ ΕΓ τῇ ΓΒ, ἅ δὲ Ν εὐθεῖα ἴσα ἔστω τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐτέρας διαμέτρου, ᾗ ἐστὶ συζυγὴς ἅ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἄχθω ἅ ΖΗ παρὰ τὰν ΕΒ, ἀπὸ δὲ τῆς ΕΒ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΕΒ, εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Ν τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τὰν ΖΔ, ΔΗ, κύκλος, εἰ δὲ μὴ ἐστὶν ἴσον, ὀξυγωνίου κῶνου τομά τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἐτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΔ, ΔΗ· κῶνος δὲ λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ Γ σαμεῖον, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος ἡ ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομά ἅ περὶ διάμετρον τὰν ΕΒ· δυνατόν

δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἂ ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ μέσαν τὰν ΕΒ ἀχθεῖσα ὀρθὰ ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΕΒ· ἐν ταύτῃ δὴ τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἂ περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ. Εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπὶ τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἐσσεῖται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. Νοεῖσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἂ ΘΚ ἐπὶ τὰν ΑΒ, ἂ δὲ ΓΚ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΕΒ κατὰ τὸ Λ, διὰ δὲ τοῦ Λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΕΒ ποτ' ὀρθὰς τῇ ΕΒ ἂ ΛΜ, τὸ δὲ Μ νοεῖσθω μετέωρον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ τὰν ΑΒ ἂ ΠΡ· ἔστιν δὴ, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾷς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾷς ΛΜ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΛ, ΑΒ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔ, ΔΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΛ, ΑΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΑΡ· ἐσσεῖται οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ τᾷς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾷς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΑΡ.

1.176 Ἔχει δέ, ὡς τὸ ἀπὸ τᾷς Ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾷς ΘΚ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ, ἐπεὶ ἐν τῇ αὐτῇ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν ΑΒ· τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾷς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΑΡ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾷς ΘΚ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΠΛ, ΑΡ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾷς ΓΔ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾷς ΚΓ· τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾷς ΛΜ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾷς ΛΓ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾷς ΘΚ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾷς ΚΓ· ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐντι τὰ Γ, Θ, Μ σαμεῖα. Ἄ δὲ ΓΜ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· δηλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ σαμεῖον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν φανερόν οὖν ἐστίν ὃ ἔδει δεῖξαι. Θ'. Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας καὶ γραμμὰς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μὴ ὀρθὰς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὃ ἐστίν ἀπὸ τᾷς ἐτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστίν ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τῇ ἀνεστακούσῃ γραμμᾷ, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἂ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ.

1.177 Ἔστω τᾷς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐτέρα διάμετρος ἂ ΒΑ, κέντρον δὲ τὸ Δ, ἂ δὲ ΓΔ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακούσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται, ἂ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοεῖσθω περὶ διάμετρον τὰν ΑΒ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ· δεῖ δὴ κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΔ, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἂ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ. Ἀπὸ δὴ τῶν Α, Β σαμείων ἄχθων παρὰ τὰν ΓΔ αἱ ΑΖ, ΒΗ· ἂ δὴ ἐτέρα διάμετρος τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἦτοι ἴσα ἐντι τῷ διαστήματι τᾶν ΑΖ, ΒΗ ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. Ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τῇ ΖΗ, ἂ δὲ ΖΗ ἔστω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἀπὸ δὲ τᾷς ΖΗ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ· ἐν δὴ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ.

1.178 Εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπὶ τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Νοεῖσθω δὴ τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾷς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ Θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἂ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ· ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΒΑ, ΓΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ἄχθω παρὰ τὰν ΓΔ ἂ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἀνεστακέτω ἂ ΛΜ ποτ' ὀρθὰς τῇ ΖΗ ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ΖΗ, τὸ δὲ Μ νοεῖσθω μετέωρον ἐν τῇ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ· τὸν αὐτὸν δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾷς ΘΚ καθέτου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον καὶ τὸ ἀπὸ ΖΓ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἂ ΖΗ τῇ ἐτέρᾳ διαμέτρῳ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΚΒ περιεχόμενον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾷς ΖΓ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ· ἴσον οὖν ἐντι τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΛ, ΛΗ περιεχόμενον τῷ ἀπὸ τᾷς ΘΚ τετραγώνῳ. Ἔστιν δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΛΜ· ἴσαι ἄρα ἐντι αἱ ΘΚ, ΜΛ κάθετοι.

Παράλληλοι οὖν ἐντι αἱ ΛΚ, ΜΘ ὥστε καὶ αἱ ΔΓ, ΜΘ παράλληλοι ἐσσοῦνται. Καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΘΜ, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Μ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἄκται παρὰ τὸν ἄξονα· δηλὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. Ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν· φανερόν οὖν ἐστίν, ὃ ἔδει δεῖξαι. Δηλὸν δὴ ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων ὀρθὸς ἐσσεῖται, εἴ καὶ ἡ ἄ ἐτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τῶν ἀπὸ τῶν περάτων τῆς ἐτέρας διαμέτρου ἀγμενᾶν παρὰ τὰν ἀνεστάκουσαν εὐθεΐαν.

1.179 Ἔστω πάλιν ἡ ἐτέρα διάμετρος μείζων τῆς ΖΗ, καὶ ἴσα ἔστω ἡ ΠΖ τῇ ἐτέρᾳ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς ΠΖ ἐπίπεδον ἀνεστακῆτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΒΑ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ΠΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΔΡ· ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται εὐθὺς ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ. Ἀλλ' ἔστω ἐλάσσων ἡ ἐτέρα διάμετρος τῆς ΖΗ. Ὡς δὲ μείζων δύναται ἡ ΖΓ τῆς ἡμισείας τῆς ἐτέρας διαμέτρου ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΓΞ τετράγωνον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ ἀνεστακῆτω γραμμὰ ἴσα τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐτέρας διαμέτρου ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ ΞΝ, τὸ δὲ Ν νοείσθω μετέωρον· ἡ οὖν ΓΝ ἴσα ἐντι τῇ ΓΖ. Ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΖΗ, ΓΝ, κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ· ἥξει δὲ οὗτος διὰ τοῦ Ν· καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΓΔ· ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐστὶν ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ.

1.180 Εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. Λελάφθω δὴ τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς τὸ Θ, καὶ ἡ ΘΚ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ παρὰ τὰν ΓΔ ἔστω ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τῇ ΖΗ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ΖΗ ἡ ΑΜ, νοείσθω δὲ τὸ Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν ἡ ΜΟ· ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἐπεὶ ποτ' ὀρθὰς ἐντι ἡ ΚΛ τῇ ΖΗ· ἔστιν δὲ, ὥς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΟ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΓ, ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΜΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΑΗ περιεχομένῳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· ἔστιν ἄρα, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΟ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΚΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ.

1.181 Ἐντι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΚΒ, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἡ ΞΝ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐτέρας διαμέτρου· δηλὸν οὖν ὅτι ἴσαι ἐντι αἱ ΜΟ, ΘΚ κάθετοι· ὥστε παράλληλοι αἱ ΚΟ, ΘΜ. Ἐπεὶ δὲ ἡ ΜΘ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντι τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ Μ σαμεῖον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν ΜΘ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου φανερόν οὖν ὅτι καὶ τὸ Θ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐντι αὐτοῦ. Οὐκ ἦν δὲ δηλὸν οὖν ὅτι ἀναγκαῖόν ἐστι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. ι'. Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκεῖμενον ἔχει λόγον ἕκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων ἀποδείκνυται ὑπὸ τῶν πρότερον, ἡ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξις ἐντι καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκεῖμενον λόγον ἔχει ἕκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. Καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου τριπλασίων ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ καὶ ὕψος ἴσον, ἡ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλασίος ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ καὶ ὕψος ἴσον. ια'. Εἴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἡ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἡ αὐτὰ τῇ περιλαμβανούσῃ τὸ σχῆμα, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται ἡ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον.

1.182 Εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Εἴ καὶ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα

ἢ διὰ τὰς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἃ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ, εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, ἃ αὐτὰ τᾷ περιλαμβανούσῃ τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, εἰ δὲ καὶ διὰ τὰς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία, διάμετρος δὲ τὰς τομὰς ἐσσεῖται ἃ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Εἰ δὲ καὶ τμαθῇ ὀρθῶ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἃ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Εἴ καὶ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὅποτερον οὖν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἃ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἃ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα, ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τὰς τομὰς ἐσσεῖται ἃ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἃ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. Εἴ καὶ τῶν εἰρημένων σχημάτων ὅποιον οὖν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐντὸς πεσοῦνται τὰς τοῦ σχήματος τομὰς.

1.183 Τούτων δὲ πάντων φανεραὶ ἐντὶ αἱ ἀποδείξεις. ἰβ'. Εἴ καὶ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μήτε διὰ τοῦ ἄξονος μήτε παρὰ τὸν ἄξονα μήτε ποτ' ὀρθᾶς τῷ ἄξονι, ἃ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτὰς ἃ μείζων ἐσσεῖται ἃ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τὰς γενομένης τομὰς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἃ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεῖσῶν παρὰ τὸν ἄξονα ἀπὸ τῶν περάτων τὰς μείζονος διαμέτρου. Τετράσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἃ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἃ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος καὶ διάμετρος τὰς τομὰς ἃ ΒΔ· δεικτέον ὅτι ἃ τομὰ τοῦ κωνοειδέος ἃ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν ΑΓ ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομὰ, καὶ διάμετρος αὐτὰς ἃ μείζων ἐστὶν ἃ ΑΓ, ἃ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐντὶ τᾷ ΛΑ τὰς μὲν ΓΛ παρὰ τὴν ΒΔ εἰσάσας, τὰς δὲ ΑΛ καθέτου ἐπὶ τὴν ΓΛ. Νοείσθω τι σαμείον ἐπὶ τὰς τομὰς λελαμμένον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὴν ΓΑ ἃ ΚΘ· ἐσσεῖται οὖν ἃ ΚΘ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστὶν ἃ ΑΓΒ ὀρθογώνιου κώνου τομὰ, διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶν ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἃ ΕΖ ὀρθᾶς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὴν ΒΔ, καὶ διὰ τῶν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὴν ΒΔ· τετμήσεται δὴ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα· ὥστε ἃ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· ἃ ἄρα ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ΖΘ, ΘΕ [ἡμικύκλιον γὰρ ἐστὶ τὸ ἐπὶ τῆς ΕΖ, καὶ ἃ ΚΘ κάθετος οὔσα μέση γίνεται ἀνάλογον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΖ περιεχομένῳ].

1.184 Ἄχθω δὲ ἐπιψαύουσα τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἃ μὲν ΜΝ παρὰ τὴν ΑΓ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Ν, ἃ δὲ ΒΤ παρὰ τὴν ΕΖ· τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΝΤ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τὰς ΒΤ· δέδεικται γὰρ τοῦτο. Τᾷ δὲ ΝΤ ἴσα ἐντὶ ἃ ΤΜ, διότι καὶ ἃ ΒΡ τᾷ ΒΜ· ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΚΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς ΤΜ ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΤΒ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΤΜ.

1.185 Ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἐντὶ τὰ ΓΑΛ, ΤΜΒ τρίγωνα, τὸ ἀπὸ τὰς ΘΚ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΓ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΑΓ τετράγωνον. Ὅμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀλλῶν καθέτων τετράγωνα τᾶν ἀγομενῶν ἀπὸ τὰς τομὰς ἐπὶ τὴν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τὰς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς ΑΛ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΑΓ· δηλὸν οὖν ὅτι ἃ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου

κώννου τομά, διάμετροι δὲ αὐτὰς ἐντὶ ἅ μὲν μείζων ἅ ΑΓ, ἃ δὲ ἐλάσσων ἴσα τῇ ΑΛ. ιγ'. Εἴ κα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώννου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἃ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώννου τομά, διάμετρος δὲ αὐτὰς ἃ μείζων ἐσσεῖται ἃ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τῆς γενομένης τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Τεμνέσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἃ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κώννου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἃ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος καὶ διάμετρος τῆς τομᾶς ἃ ΒΔ.

1.186 Νοεῖσθω δὴ τι ἐπὶ τῆς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν ΑΓ ἃ ΚΘ· ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἃ ΑΒΓ κώννου τομά. Διὰ δὲ τοῦ Θ ἄχθω ἃ ΕΖ ποτ' ὀρθὰς τῇ ΒΔ, καὶ διὰ τὰν ΕΖ, ΚΘ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἄχθω τέμνον τὸ κωνοειδὲς· τετμήσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα· ὥστε ἃ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ· ἃ ἄρα κάθετος ἃ ΚΘ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τὰν ΕΘ, ΘΖ. Ἀχθω δὴ πάλιν ἃ μὲν ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ κώννου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἃ δὲ ΒΤ παρὰ τὰν ΕΖ· τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ ΕΘ, ΘΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὅν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΤΝ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΑΘ, ΘΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὅν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΤΝ. Ὅμοίως οὖν δειχθησοῦνται καὶ τὰ ἀπὸ τὰν ἀλλῶν καθέτων τὰν ἀπὸ τῆς τομᾶς ἀγομενᾶν ἐπὶ τὰν ΑΓ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῆς ΑΓ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὅν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΤΝ.

1.187 Καί ἐστιν ἐλάσσων ἃ ΒΤ τῆς ΤΝ, διότι καὶ ἃ ΜΤ ἐλάσσων ἐστὶν τῆς ΤΝ· καὶ γὰρ ἃ ΜΒ ἐλάσσων τῆς ΒΡ· τοῦτο γάρ ἐστιν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώννου τομαῖς σύμπτωμα· δηλον οὖν ὅτι ἃ τομὰ ὀξυγωνίου κώννου τομά καὶ διάμετρος αὐτὰς μείζων ἃ ΑΓ [ὁμοίως καθέτου οὔσης τῆς ΝΡ ἐν τῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώννου τομᾷ διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἃ ΓΛ]. ιδ'. Εἴ κα τὸ παραμᾶκες σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἃ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώννου τομά, διάμετρος δὲ αὐτὰς ἃ μείζων ἐσσεῖται ἃ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τῆς γενομένης τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. Εἰ μὲν οὖν κα τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δηλον· τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον τοῦ μὲν σφαιραιδέος τομὰ ἔστω ἃ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώννου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου ἃ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ σφαιροειδέος καὶ διάμετρος τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώννου τομᾶς ἃ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ ἐλάσσων διάμετρος ἔστω ἃ ΠΡ. Ἀχθω δὲ ἃ μὲν ΒΤ ποτ' ὀρθὰς τῇ ΒΔ, ἃ δὲ ΗΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ ὀξυγωνίου κώννου τομᾶς κατὰ τὸ Ν, ἄχθω δὲ καὶ ἃ ΜΛ διὰ τοῦ Χ παρὰ τὰν ΑΓ· ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθησοῦντι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τὰν καθέτων τὰν ἀπὸ τῆς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τῆς ΑΓ τμαμάτων τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὅν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΤΝ.

1.188 Ὅτι μὲν οὖν ἃ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώννου τομά καὶ διάμετρος αὐτὰς ἃ ΓΑ δηλον· ὅτι δὲ μείζων δεικτέον. Τὸ γὰρ ὑπὸ τὰν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ ΜΧ, ΧΛ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὅν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ, ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ ΠΡ, ΜΛ. Ἐλασσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΠΧ, ΧΡ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τὰν ΜΧ, ΧΛ, ἐπεὶ καὶ ἃ ΧΠ τῆς ΧΛ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΤ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΤΝ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τὰν καθέτων τετράγωνα τὰν ἀπὸ τῆς τομᾶς ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀγομενᾶν ἐλάσσονά ἐντι τῶν ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῆς ΑΓ περιεχομένων. Δηλον οὖν ὅτι μείζων ἐντὶ διάμετρος ἃ ΓΑ. Εἴ κα τὸ ἐπιπλατὺ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται, τὰν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται

ἀ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. Ἐξ αὐτῶν δὲ φανερόν ἐν πάντεσσι τοῖς σχημάτεσσιν ὅτι, εἴ κα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ αὐτῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται· τὰ γὰρ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἐξοῦντι. ιε'.

1.189 Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος τῶν ἀγομενῶν εὐθειᾶν παρὰ τὸν ἄξονα αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. Ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διὰ τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἂ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι, ἂ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος ἐν δὲ τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομενῶν παρὰ τὴν διάμετρον εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός· δηλον οὖν τὸ προτεθέν. Ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ τῶν ἀγομενῶν εὐθειᾶν παρὰ τινὰ γραμμάν, ἃ ἐστὶν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. Ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διὰ τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές καὶ διὰ τοῦ σαμείου, ἀφ' οὗ ἄγεται ἡ ἐς αὐτό, ἡ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἡ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα· ἐν δὲ τῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τοῦ ἐπὶ τᾶς τομᾶς τῶν ἀγομενῶν εὐθειᾶν παρὰ τὴν οὕτως ἀγμένην γραμμάν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ' ἃ ἐστὶν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

1.190 Εἴ κα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτεται μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ' ἓν μόνον ἄψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἀφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. Ἐφαπτέσθω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ πλείονα σαμεῖα. Λαφθέντων δὴ δύο σαμείων, καθ' ἃ ἄπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθειςᾶν ἀπὸ τῶν ἀχθειςᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ἦτοι διὰ τοῦ ἄξονος ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον· ὥστε τὴν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σημεῖα ἐσσοῦνται ἐν τῇ τοῦ κώνου τομᾷ, ἐπεὶ ἔν τε τῇ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Ἀ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντός ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντός ἐσσεῖται. Ἔστιν δὲ ἡ εὐθεῖα αὕτα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖται τι ἐντός τοῦ κωνοειδέος ὅπερ ἀδύνατον· ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. Καθ' ἓν ἄρα μόνον ἄψεται σαμεῖον. Ὅτι δὲ καὶ τὸ διὰ τᾶς ἀφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον, εἰ μὲν κατὰ τὴν κορυφάν τοῦ κωνοειδέος ἐφάπτεται, δηλον.

1.191 Ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπίπεδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαὶ διάμετρον ἔχουσαι τὸν ἄξονα, τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τῶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου. Αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ ἐπιψαύουσαι τῶν τῶν κώνων τομᾶν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὴν διάμετρον· ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. Ὁρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον· ὥστε καὶ ποτὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. Ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὴν κορυφάν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. Ἀχθὼ δὴ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἀφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος, καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἡ ΑΒΓ κώνου τομὰ, ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἡ ΒΔ, τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομὰ ἔστω ἡ ΕΘΖ εὐθεῖα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἀπτομένα κατὰ τὸ Θ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὴν ΒΔ ἡ ΘΚ, καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· ποιήσει δὴ τοῦτο τὴν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ Κ. Ἀ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου· ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ τὴν ΘΚ· ὥστ'

ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ ΚΘ, ΒΔ. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι. ιζ'.

1.192 Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν ἐπίπεδον ἄπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἄψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἀφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. Ἀπτεσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. Λαφθέντων δὴ τῶν σαμείων, καθ' ἃ ἄπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθειᾶν ἀχθεισᾶν καὶ διὰ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἃ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. Ἀ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. Ἔστιν δὲ ἃ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖται τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. Οὐκ ἔστιν δέ ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. Δῆλον οὖν, ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἄψεται. Ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἀφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως τοῖς περὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. Εἴ κα τῶν κωνοειδέων ἢ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένης τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαύουσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαύει τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἃ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. Οὐ γὰρ ἄψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Εἰ δὲ μή, ἃ ἀπὸ τοῦ σαμείου κάθετος ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐκτὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπὶ γὰρ τᾶν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ' ἄλλαλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐντὸς πεσεῖται.

1.193 Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύονται, ἃ τὰς ἀφᾶς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται. Εἰ μὲν οὖν κα ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἔωντι, δῆλον· ἄλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθὰς. Τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἀφᾶς τᾶς ἐτέρας ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. Ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον τὸ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ἑκατερᾶν τᾶν ἀφᾶν ἀγμένον. Εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα οὐκ ἐούσας ὀρθὰς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον· ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὃ τε ἄξων καὶ αἱ ἀφαί, καὶ τετμακὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. Ἀ οὖν τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, αἱ δὲ τῶν ἐπιψαύοντων ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται καὶ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἀφᾶς τῶν ἐπιπέδων· εἰ δὲ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύονται παράλληλοι ἐούσαι, τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς καὶ αἱ ἀφαί ἐπ' εὐθείας ἐσσοῦνται.

1.194 ιζ'. Εἴ κα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερουοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δὲ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένης τομᾶς ἀγόμεναι εὐθεῖαι παρὰ τὰν τὰς ἀφᾶς ἐπιζευγνύουσας ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. Ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένης τομᾶς, διὰ δὲ τοῦ γενομένου σαμείου καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἀφᾶς ἐπιζευγνύουσας ἐπίπεδον ἄχθω τεμεῖ δὴ τοῦτο τό τε σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλλα ἐπίπεδα. Ἔστω οὖν ἃ μὲν τοῦ σφαιροειδέος τομὰ ἃ ΑΒΓΔ [ὀξυγωνίου κώνου τομά], αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ψαύοντων τομαὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι, τὸ δὲ λαφθὲν σαμεῖον τὸ Α, ἃ δὲ τὰς ἀφᾶς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἃ ΒΔ· πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου· ἃ δὲ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαύοντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἃ ΓΑ· ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον.

1.195 Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἃ ΑΒΓΔ ἥτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἐπιψαύονται αὐτᾶς δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΖ, ΗΘ, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἄκται παράλληλος αὐταῖς ἃ ΑΓ, δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν Α, Γ

ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν ΒΔ ἐπιψαύοντι τὰς τομὰς καὶ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. Εἰ δέ κα τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαυόντεσσι μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον ἦ, ὡς τὸ ΚΛ, δῆλον ὡς τὰν ἀπὸ τὰς τομὰς ἀγομενᾶν εὐθειᾶν αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γενόμενα τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ιη'. Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ αὐτὸ καὶ ἅ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. Τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου· ἦτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμαμένον ἢ ποτ' ὀρθὰς ἢ μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. Εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τε αὐτὸ καὶ ἅ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· φανερόν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον καὶ ἅ ἐπιφάνεια τοῦ ἐτέρου μέρους ἐπὶ τὰν τοῦ ἐτέρου. Ἄλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμαμένον μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι.

1.196 Τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἅ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἅ ΒΔ καὶ κέντρον τὸ Θ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμακóτος διὰ τοῦ κέντρου τὸ σφαιροειδὲς ἔστω τομὰ ἅ ΑΓ εὐθεῖα. Λελάφθω δὴ τι καὶ ἄλλο σφαιροειδὲς ἴσον καὶ ὁμοῖον τούτῳ, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομὰ ἔστω ἅ ΕΖΗΝ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἅ ΕΗ καὶ κέντρον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἄχθω ἅ ΖΝ γωνίαν ποιοῦσα τὰν Κ ἴσαν τᾷ Θ, ἀπὸ δὲ τὰς ΖΝ ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἅ ΕΖΗΝ τομὰ· ἐντὶ δὴ δύο ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΝ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις· ἐφαρμόζονται οὖν ἐπ' ἀλλάλας τεθείσας τὰς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ καὶ τὰς ΖΝ ἐπὶ τὰν ΑΓ. Ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, ἐπεὶ ἀπὸ τὰς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ὀρθὰ ἐντι· ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμήμα τὸ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Ε τῷ ἐτέρῳ τμήματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἐτέρου σφαιροειδέος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β καὶ τὸ λοιπὸν τμήμα ἐπὶ τὸ λοιπὸν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας.

1.197 Πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τὰς ΕΗ ἐπὶ τὰν ΒΔ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Ε κατὰ τὸ Δ κεῖσθαι, τὸ δὲ Η κατὰ τὸ Β, τὰν δὲ μεταξὺ τῶν Ν, Ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν Α, Γ σαμείων, δῆλον ὡς αἱ τε τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμοζοῦντι ἐπ' ἀλλάλας, καὶ τὸ μὲν Ζ ἐπὶ τὸ Γ πεσεῖται, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τὸ Α. Ὅμοιως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΝΖ ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΝΖ τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Η ἐφαρμόζει τῷ τμήματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Δ. Ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμήμα ἐφ' ἐκάτερον τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμήματα· διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι. ιθ'. Τμήματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτεμνομένου δυνατόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐγγράψαι καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους.

1.198 Δεδόσθω τμήμα, οἷον τὸ ΑΒΓ, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν τμήματος τομὰ ἔστω ἅ ΑΒΓ κώνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακóτος τὸ τμήμα ἅ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος καὶ διάμετρος τὰς τομὰς ἅ ΒΔ. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτεμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἅ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἅ ΓΑ. Ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ· πεσεῖται δὲ ἅ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ἐπεὶ ἐστὶν ἦτοι κωνοειδὲς ἢ σφαιροειδὲς μὴ μείζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. Τοῦ δὴ κυλίνδρου τούτου αἰεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ποτε τὸ

καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους· ἔστω δὴ τὸ καταλειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος ὁ ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἔλασσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους.

1.199 Διαιρήσθω δὴ ἡ ΒΔ ἐς τὰς ἴσας τῇ ΕΔ κατὰ τὰ Ρ, Ο, Π, Ξ, καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστω ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τῶν ἀχθεισῶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν ΒΔ· ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τῇ ΒΔ, Ἀφ' ἐκάστου δὴ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθων ἐκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ ΕΔ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κύκλου, ἐφ' ᾗ ἐστὶ τὸ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ᾗ ἐστὶ τὸ Β· ἐσσεῖται δὴ τι ἐν τῷ τμήματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ᾗ ἐστὶ τὸ Δ, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ᾗ τὸ Β ἐστίν. Λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Ἐκαστος δὴ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ὡς ὁ μὲν ΘΗ τῷ ΘΙ, ὁ δὲ ΚΛ τῷ ΚΜ, καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως· καὶ πάντες δὴ οἱ κύλινδροι πάντεσσιν ἴσοι ἐντί. Δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ· οὗτος δέ ἐστιν ἔλασσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. κ'.

1.200 Τμήματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδῶν ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἢ τῶν σφαιροειδῶν ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ὁμοίως ἀποτετμαμένου δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμήμα σχῆμα στερεὸν ἐγγράφειν καὶ ἄλλο περιγράφειν ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφομένου ὑπερέχειν ἔλασσον παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Δεδόσθω τμήμα, οἷον εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ δοθὲν τμήμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἡ ΑΒΓ κώνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακὸς τὸ τμήμα ἡ ΓΑ εὐθεῖα. Ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμήμα μὴ εἶμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἡ ΑΓ.

1.201 Ἔστω δὴ παράλληλος τῇ ΑΓ ἡ ΦΥ ἐπιψαύουσα τῇς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῆς ΦΥ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὲ τοῦτο τοῦ σχήματος κατὰ τὸ Β· καὶ εἰ μὲν ἐστὶ τὸ τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ Β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἡ ΒΔ, εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τῆς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ Β ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ, εἰ δὲ σφαιροειδέος, ἐπὶ τὸ Β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολελάφθω ἡ ΒΔ· δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἡ ΒΔ δίχα τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται οὖν τὸ μὲν Β κορυφὰ τοῦ τμήματος, ἡ δὲ ΒΔ ἄξων. Ἔστιν δὴ τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, καὶ γραμμὰ ἡ ΒΔ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακίτου ἐν ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾗ ἐστὶν ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διὰ τῆς ἐτέρας διαμέτρου ἐόντος τοῦ ἐπιπέδου· δυνατόν οὖν ἐστὶν κύλινδρον εὐρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΔ, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· πεσεῖται δὲ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ἐπεὶ ἐστὶν ἥτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμήμα καὶ οὐ μείζον ἐστὶν ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. Ἐσσεῖται δὴ τις κυλίνδρου τόμος βάσις μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· τοῦ οὖν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλήλοις τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἔλασσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Διηρήσθω δὴ ἡ ΔΒ ἐς τὰς ἴσας τῇ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσεων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν ΑΓ ἔστω ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἀπὸ δὲ τῶν

ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ· τέμνοντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος, καὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ὁμοῖαι τᾷ περὶ τὰν ΑΓ διάμετρον, ἐπεὶ παράλληλά ἐντι τὰ ἐπίπεδα.

1.202 Ἀφ' ἐκάστας δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομαῖς ἀναγεγράφθων κυλίνδρου τόμοι δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομαῖς τῷ Δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ Β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ ΔΕ· ἐσσοῦνται δὴ τινὰ σχήματα στερεά, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον, ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. Λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. Δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ προτέρῳ ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ· οὗτος δὲ ἐστὶν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθους. κα'. Τούτων προγεγραμμένων ἀποδεικνύωμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. Πᾶν τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἐστω γὰρ τμήμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἡ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτεμνοντος τὸ τμήμα ἡ ΓΑ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κώνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, οὗ κορυφὰ τὸ Β.

1.203 Δεικτέον ὅτι τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. Ἐκκείσθω γὰρ κώνος ὁ Ψ ἡμιόλιος ἐὼν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξων δὲ ἡ ΒΔ, ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται οὖν ὁ Ψ κώνος ἡμίσεος τοῦ κυλίνδρου [ἐπεὶπερ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Ψ κώνος τοῦ αὐτοῦ κώνου]· λέγω ὅτι τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ Ψ κώνῳ. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐντι ἢ ἔλασσον. Ἐστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν εἰς τὸ τμήμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφέν σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΕΔ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΙ, τῶν δὲ κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφέν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΣΤ, ἄξονα δὲ τὰν ΘΙ, ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διηρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν.

1.204 Καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμήμα ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ τμήμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου.

1.205 Ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἡ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ καὶ τῷ ὃν ἔχει ἡ ΔΑ ποτὶ τὰν ΕΞ. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΖ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἡ ΠΕ, τουτέστιν ἡ ΔΑ, ποτὶ τὰν ΖΟ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ

ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν AB, BD εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν AG, ἄξων δὲ [ἐστὶν] ἡ ΔB εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἳ ἐντι βάσεις τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπ' αὐτὰν μεταξὺ τᾶν AB, BD. Αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶς AD μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ἡ ΔB, μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· πολλῶ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ἄξων ἡ ΔB, μείζων ἐντι ἢ διπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

1.206 Τοῦ δὲ Ψ κώνου ἦν διπλασίων· ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μείζων. Οὐκ ἄρα ἐστὶν μείζων τὸ κωνοειδὲς τοῦ Ψ κώνου. Ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον· πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν [ἕκαστον] ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κώνος τοῦ κωνοειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δηλὸν ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν DE ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν EA τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς AD τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν EZ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ ΔA ποτὶ τὰν KE δυνάμει· οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἡ BA ποτὶ τὰν BE, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἡ ΔA ποτὶ τὰν EE· καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τῇ ΔE ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν ἕξει τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τᾶν AB, BD εὐθειᾶν· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ἄξων ἐστὶν ἡ BA εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας.

1.207 Αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἳ βάσιές ἐντι τῶν κυλίνδρων, τὰν εὐθειᾶν πασῶν τᾶν ἀπολελαμμενᾶν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τῇ AD ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δηλὸν οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν AG, ἄξονα δὲ τὰν BD, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος· τοῦ γὰρ Ψ κώνου διπλασίων ἐστὶ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶν τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. κβ'. Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμαμάτος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἐστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον, ὡς εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἡ ABΓ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα ἡ AG εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν AG ἡ ΦΥ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ B, καὶ ἡ BA ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα· τεμεῖ δὴ αὐτὰ δίχα τὰν AG· ἀπὸ δὲ τᾶς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον τῷ

κατὰ τὰν ΑΔ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦτο τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ Β, καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμήματος κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἂ ΒΔ.

1.208 Ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὼν τῷ ἄξωνι τετμάκει τὸ κωνοειδὲς, ἂ τομά ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτὰς ἂ μείζων ἂ ΑΓ. Ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου κώνου τομὰς περὶ διάμετρον τὰν ΓΑ καὶ γραμμὰς τὰς ΒΔ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰς ἀνεστακούσα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ τὰς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξωνα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ ΒΔ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά· δυνατόν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἂ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά ἐσσεῖται· ὥστε ἐσσεῖται τόμος κυλίνδρου τις βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξωνα δὲ τὰν ΒΔ, καὶ ἀπότμαμα κώνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμήματι, ἄξωνα δὲ τὸν αὐτόν. Δεικτέον, ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου. Ἐστω δὴ ὁ Ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμήματος τούτου· ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν διπλάσιος τοῦ Ψ κώνου· οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν, τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν.

1.209 Ἀναγκαῖον δὴ ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἤτοι μείζον ἐστὶ ἢ ἔλασσον. Ἐστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον. Ἐγγεγράφθω δὴ τι εἰς τὸ τμήμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ Ψ κώνου, καὶ διάχθω τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν. Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξωνα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξωνα τὰν ΔΕ τὸν αὐτόν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τὰς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τὰς ΚΕ· οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτόν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν, ἐπεὶ ὁμοῖαί ἐντι ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτόν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτῶν δυνάμει, ἡμίσειαι δὲ ἐντι τῶν ὁμολόγων διαμέτρων αἱ ΑΔ, ΚΕ.

1.210 Ὅν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΑΔ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἂ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ μάκει, ἐπεὶ ἂ μὲν ΒΔ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσας· ὃν δὲ λόγον ἔχει ἂ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΕ, τοῦτον ἔχει ἂ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· ἔξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτόν λόγον, ὃν ἂ ΑΔ ποτὶ τὰν ΕΞ· καὶ τῶν ἄλλων τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξωνα ἴσον ἐχόντων τᾷ ΔΕ ποτὶ ἕκαστον τῶν τόμων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτόν ἄξωνα ἐχόντων τὸν αὐτόν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ἡμίσεια τὰς διαμέτρου τᾶν βάσεων αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμένην ἀπ' αὐτὰς μεταξὺ τᾶν ΑΒ, ΒΔ. Δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον ἐὼν τοῦ Ψ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν μείζων ἐὼν ἢ διπλασίῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὥστε καὶ τοῦ Ψ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλασίῳ.

1.211 Οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλασίῳ. Οὐκ ἄρα ἐστὶ μείζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ Ψ κώνου. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ἔλασσόν ἐστιν· δηλον οὖν ὅτι ἴσον. Ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξωνα τὸν αὐτόν. κγ'. Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμήματα ἀποτμαθῶντι

ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῶ, ἔωντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. Ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος [καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα] τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ΒΔ, τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ ΑΖ, ΕΓ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ ΕΓ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ΖΑ, ἄξονες δὲ ἔστων τῶν τμαμάτων αἱ ΒΘ, ΚΛ ἴσαι ἀλλάλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ Β, Λ· δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμάμα τοῦ κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Λ. Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματά ἐντι ἀφηρημένα τό τε ΑΛΖ καὶ τὸ ΕΒΓ, καὶ ἐντι αὐτῶν αἱ διάμετροι ἴσαι αἱ ΚΛ, ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ ΑΛΚ τῷ ΕΘΒ· δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ ΑΛΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ.

1.212 Ἀχθῶ δὴ ἁ ΑΧ κάθετος ἐπὶ τὰν ΚΛ ἐκβληθεῖσαν. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΚΛ, ἴσαι καὶ αἱ ΕΘ, ΑΧ. Ἔστω δὴ ἐν τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Β, κώνος ἐγγεγραμμένος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐν δὲ τῷ τμάματι, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἄχθῶ δὲ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἐπὶ τὰν ΑΖ ἁ ΛΝ· ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ. Τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, καὶ ὁ κώνος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλα ἔκ τε τοῦ τῶν βάσεων λόγου καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων· τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΖ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΓ, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΓ [ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, πρὸς τὸν κώνον, οὗ κορυφὰ τὸ Β, τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἁ ΚΑ ποτὶ τὰν ΕΘ, καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἁ ΝΛ ποτὶ τὰν ΒΘ· ἁ μὲν γὰρ ΚΑ ἡμισέα ἐντὶ τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, ἁ δὲ ΕΘ ἡμισέα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσεως τοῦ κώνου, αἱ δὲ ΛΝ, ΒΘ ὕψεά ἐντι αὐτῶν.

1.213 Ἐχει δὲ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν ΚΛ, ἐπεὶ ἁ ΒΘ ἴση ἐστὶ τᾷ ΚΛ. Ἐχει δὲ καὶ ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΚΛ, ὃν ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΚ]· ἔχει οὖν κα καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κώνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΑΧ· ἴσα γὰρ ἐστὶν ἁ ΑΧ τᾷ ΕΘ, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. Ὁ δὲ [ἐκ] τῶν εἰρημένων λόγων, ὁ τᾶς ΑΚ ποτὶ ΑΧ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τᾶς ΑΚ ποτὶ ΛΝ· τὸ ἄρα ἀπότμαμα ποτὶ τὸν κώνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΑΚ ποτὶ τὰν ΛΝ, καὶ ὃν ἔχει ἁ ΛΝ ποτὶ τὰν ΒΘ. Ἰσα δὲ ἁ ΒΘ τᾷ ΚΛ· δηλον οὖν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ Λ, τῷ κώνῳ, οὗ κορυφὰ τὸ Β. Φανερόν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντί, ἐπεὶ τὸ μὲν ἕτερον αὐτῶν ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσων ἐόντων. κδ'. Εἴ κα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ' ἀλλάλα τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῶν. Ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν, ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἐτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ Κ, τῷ δὲ τοῦ ἐτέρου ἴσα ἁ Λ· δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλα τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Λ τετραγώνοις.

1.214 Τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος ἔστω τομὰ ἁ ΑΒΓ ὀρθογωνίου κώνου τομά, ἄξων δὲ ἁ ΒΔ, καὶ ἀπολελάφθῳ ἁ ΒΔ τᾷ Κ ἴσα, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθῳ ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμάμα τοῦ κωνοειδέος τὸ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ Κ. Εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ Κ ἴσα ἐστὶ τᾷ Λ, φανερόν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις· ἐκάτερον γὰρ αὐτῶν ἴσον τῷ αὐτῷ· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν Κ, Λ ἴσα· ὥστε τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. Εἰ δὲ μὴ ἴσα ἐστὶν ἁ Λ τᾷ Κ, ἔστω ἁ Λ ἴσα τᾷ

ΒΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα· τὸ δὴ τμήμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΕΖ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμήματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τῷ Λ.

1.215 Ἐγγεγράφθωσαν δὴ κῶνοι βάσις μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΕΖ, κορυφὰν δὲ τὸ Β σαιμεῖον· ὁ δὴ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΑΔ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει. Ὁν δὲ λόγον ἔχει ἅ ΔΑ ποτὶ τὰν ΘΕ δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἅ ΒΔ ποτὶ τὰν ΒΘ μάκει· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΒΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΔΒ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἅ ΔΒ ποτὶ τὰν ΒΘ· οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὄν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΒ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ. Ὁν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ὁ ἄξονα ἔχων τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΘΒ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΔΒ ποτὶ τὸ τμήμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν ΘΒ [ἐκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστιν]. Καὶ ἔστιν τῷ μὲν τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΒΔ ἴσον τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τῷ Κ, τῷ δὲ τμήματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν ΘΒ ἴσον τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τῷ Λ, καὶ τῷ μὲν ΒΔ ἴσα ἅ Κ, τῷ δὲ ΘΒ ἴσα ἅ Λ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τῷ Κ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τῷ Λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς Λ. κε'.

1.216 Πᾶν τμήμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἅ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τῷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τῷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. Ἐστω τι τμήμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἅ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἅ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κῶνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτεμνοντος τὸ τμήμα ἅ ΑΓ εὐθεῖα, ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμήματος ἅ ΒΔ, ἅ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἅ ΒΘ καὶ τῷ ΒΘ ἴσα ἅ ΖΘ καὶ ἅ ΖΗ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμήμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἅ ΗΔ ποτὶ τὰν ΖΔ. Ἐστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ ΦΑ, ΓΥ, ἔστω δὲ καὶ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὰν ΒΔ τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἅ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμί δὴ τὸ τμήμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κῶνῳ. Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσον, ἥτοι μείζον ἢ ἐλάσσον ἐστὶν. Ἐστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμήμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ Ψ κῶνου, διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ· ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διηρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν.

1.217 Καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμήμα τοῦ Ψ κῶνου, καὶ μείζον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον ἐστὶ τοῦ Ψ κῶνου. Ἐστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἅ ΒΡ· ἐσσεῖται οὖν ἅ ΗΔ τριπλασία τᾶς ΘΡ. Καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΔ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἅ ΗΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν Ψ

κῶνον, ὃν ἂ ΖΔ ποτὶ τὰν ΗΔ, ἔξει ἄρα μεγεθέων τριῶν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων τὸν αὐτὸν λόγον ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον, ὃν ἂ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ.

1.218 Ἦεστωσαν δὲ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' ἃν τὰ Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς ἐν τῇ ΒΔ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα ἴσα τῇ ΖΒ, καὶ παρ' ἐκάσταν αὐτὰν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΔΒ, τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΙΒ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχοντων [καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τῆς ΒΔ εὐθείας τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσιν], καὶ ἔστω ἂ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρά, ἐφ' ἣς τὸ Ν, ἴσα τῇ ΒΔ, ἂ δὲ τοῦ ἐλάχιστου ἴσα τῇ ΒΙ, ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΔΒ· ὁ δὲ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΔΑ ποτὶ τὰν ΚΕ δυνάμει· οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΒΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΒΕ· ἐν πάσῃ γὰρ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομῇ τοῦτο συμβαίνει [ἂ γὰρ διπλασία τῆς ποτεούσας, τουτέστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἵδους πλευρά]. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΖΔ, ΒΔ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ΞΝ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΜ· ἂ γὰρ Ξ ἴσα ἐστὶ τῇ ΖΒ, ἂ δὲ Μ τῇ ΒΕ, ἂ δὲ Ν τῇ ΒΔ· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, ἄξονα δὲ τὰν ΔΕ, τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΜ.

1.219 Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τῇ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων τετραγώνῳ. Ἦεστιν δὴ τινα μεγέθεα, οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τῇ ΔΕ, καὶ ἄλλα μεγέθεα, τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἐπεὶ οἱ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις καὶ τὰ Ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις, λέγονται δὲ τῶν τε κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται, καὶ τῶν χωρίων, ἐν οἷς τὰ Ω, ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἶδει τετραγώνῳ, τὰ [δὲ] ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται· δηλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου.

1.220 Δέδεικται δὲ ὅτι πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι ἢ ὃν ἂ ΝΞ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῇ τε ἡμισείᾳ τῆς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῆς Ν· ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον ἢ ὃν ἂ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ· ὃν ὁ ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον. Ὡστε μείζων ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον τοῦ Ψ κώνου· οὐκ ἄρα μείζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμήμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. Ἦεστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμήμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμήματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δηλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὴ ὁ τε

κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΞΝ [ἴσον γὰρ ἐκάτερον], καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τῇ ΔΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου ἴσον εἶμεν ἐκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ· ἔξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλημάτεσσιν.

1.221 Δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσῳ λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἅ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῇ τε ἡμισέᾳ τῆς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῆς Ν· ὥστε καὶ ὁλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔξει ἢ ἅ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ἀλλ' ὥς ἅ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ. Ὡστε μείζον ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ Ψ κῶνου· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἕλαττον ἐὼν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κῶνου. Οὐκ ἄρα ἕλασσόν ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδὸς τμήμα τοῦ Ψ κῶνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μείζον οὔτε ἕλασσόν ἐστιν, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν. κς'. Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμήμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδὸς, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἅ συναμφοτέραις ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμήματος καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῷ τε ἄξονι καὶ τῇ διπλασίᾳ τῆς ποτεούσας τῷ ἄξονι. Ἐστω γὰρ τμήμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδὸς ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμήμα τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἅ ΑΒΓ ἀμβλυγωνίου κῶνου τομὰ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακός τὸ τμήμα ἅ ΓΑ εὐθεῖα, κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κῶνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς τὸ Θ σαμεῖον, καὶ ἄχθῳ διὰ τοῦ Β παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσα τῆς τοῦ κῶνου τομᾶς ἅ ΦΥ, ἐπιψαύετω δὲ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ αὐτὰ δίχα τὰν ΑΓ, καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμήματος τὸ Β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἅ ΒΔ, ἅ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἅ ΒΘ· τῇ δὲ ΒΘ ἴσα ἔστω ἅ τε ΘΖ καὶ ἅ ΖΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ΦΥ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω τι παράλληλον τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδὸς κατὰ τὸ Β.

1.222 Καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΑΓ οὐκ ἐὼν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τετμάκει τὸ κωνοειδὲς, ἅ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἅ μείζων ἅ ΓΑ· εούσας δὴ ὀξυγωνίου κῶνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ καὶ τῆς ΒΔ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ, δυνατόν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΔ, οὔ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ ἅ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ.

1.223 Εὐρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἅ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ΦΥ. Πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὔ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἅ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ ἅ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ. Εὐρεθέντος οὖν καὶ ἀπότμαμά τι ἐσσεῖται κῶνου βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδὸς τμήμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου τὸ εἰρημένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἅ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ. Ὅν γὰρ ἔχει λόγον ἅ ΗΔ ποτὶ τὰν ΔΖ, τοῦτον ἐχέτω ὁ Ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου. Εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδὸς τμήμα τῷ κῶνῳ τῷ Ψ, ἔστω, εἰ δυνατόν ἐστιν, μείζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδὸς τμήμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο

περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὼν τοῦ τμᾶματος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δηλονότι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Διάχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ τμᾶματι πάντων ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, καὶ ἅ τε BP τρίτον μέρος ἔστω τᾶς ΒΔ, καὶ τᾶλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω.

1.224 Πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλήλους, ὅνπερ αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν, ἐπεὶ ὁμοίαι ἐντι ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸν αὐτὸν [οὖν] λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτῶν δυνάμει. Ὅν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΔ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ, ἐπεὶ ἐστὶν ἅ μὲν ΖΔ ἀγμένα διὰ τοῦ Θ, καθ' ὃ αἱ ἔγγιστα συμπίπτουν, αἱ δὲ ΑΔ, ΚΕ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσιν· ἐστὶν δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ΖΔΒ περιεχόμενον ἴσον τῷ Ω χωρίῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΖΕΒ τῷ ΕΜ· ἔχει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ΕΜ· καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τᾶ ΔΕ ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾶ ΔΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ Ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἶδει τετραγώνῳ.

1.225 Πάλιν οὖν ἐντὶ τινὰ μεγέθεα, οἱ τόμοι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα, τὰ χωρία, ἐν οἷς τὸ Ω, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα αὐτοῖς, λέγονται δὲ οἱ τόμοι ποτ' ἄλλους τόμους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται, τὰ δὲ Ω χωρία ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν Ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἶδеси τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται· δηλονότι οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. Πάντα δὲ τὰ Ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μεῖζονα λόγον ἔχοντι ἢ ὃν ἅ ΕΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· μεῖζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ὃν ἔχει ἅ ΕΝ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ τε ἡμισέᾳ τᾶς Ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς Ν· ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἅ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Μεῖζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κώνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὼν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου.

1.226 Οὐκ ἐστὶν οὖν μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμᾶμα σχήματος στερεοῦ καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρου τόμων ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κώνος τοῦ τμᾶματος, πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὼν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κώνον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἐστὶν οὖν οὐδ' ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Δηλονότι οὖν τὸ προτεθέν. κζ'. Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ

ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἐστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμαμένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ· διοίσει δὲ οὐδέν, εἴτε ἁ μεῖζων ἐστὶ διάμετρος ἁ ΒΔ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς εἴτε ἁ ἐλάσσων· τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ Θ καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν ΒΔ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τε ἄχθαι καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα.

1.227 Δεικτέον ὅτι τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Β σαμεῖον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Ἐστω γὰρ κῶνός τις, ἐν ᾧ τὸ Ψ, διπλασίῳ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν τὰν ΘΒ· φαμὶ δὴ τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ Ψ κώνῳ. Εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τῷ Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκεείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου.

1.228 Ἐπεὶ οὖν μεῖζον ἐὼν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἀμίσεος τοῦ σφαιροειδέος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἢ τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι τῷ ἀμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ἐστω δὴ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἄξονα δὲ τὰν ΒΘ. Ἐπεὶ οὖν οὗτος ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ Ψ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔστε ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Ἐστων [δὴ] οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' ἃν τὰ Ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς τᾶς ΒΘ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἐκάστω τᾷ ΒΘ, καὶ ἀπὸ ἐκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω, ἀφαιρήσθω δὲ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΙ, ΙΔ· ἀπὸ δὲ τοῦ παρ' αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς ΒΙ· ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΧ, ΧΔ· καὶ αἰὲ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρήσθω, οὗ πλάτος ἐνὶ τμήματι μεῖζον τοῦ πλάτους τοῦ πρὸ αὐτοῦ ἀφαιρημένου γνώμονος· ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς ΒΔ τμαμάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμᾶμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος.

1.229 Ἐσσεῖται δὴ καὶ [ἀπὸ] τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΘΕ. Ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΘ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ· ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ περιεχόμενον· ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρημένον. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος ἄξονα ἐχόντων ἴσον τᾷ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν

γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἐπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. Ἐντὶ δὴ τινὰ μεγέθεα, οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν Ξ, ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα, λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται, καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα, τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται· πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς ἐτέρους κυλίνδρους τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν.

1.230 Τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ' αὐτῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ΕΡ, ΕΣ, ΕΤ, ΕΥ, ΕΦ [ΕΨ, ΕΩ] τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἡ ἐλάχιστά ἴσα τῇ ὑπεροχῇ, ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ' ἃν τὰ δύο Ξ, Ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα ἴσα τῇ μεγίστῃ· τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασῶν, ἃ ἐστὶν ἐκάστα ἴσα τῇ μεγίστῃ, πάντων μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερέχουσῶν ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας μείζονα ἢ τριπλάσια· τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. Ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τῶν ἐτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντι ἀφαιρημένα ἀπ' αὐτῶν, δηλονότι τῶν λοιπῶν μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια· τῶν οὖν γνωμόνων μείζονά ἐντι ἢ ἡμιόλια. Ὡστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου.

1.231 Οὐκ ἄρα ἐστὶ μείζον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κώνου. Οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. Ἐστω γὰρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. Πάλιν δὲ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ Ψ κώνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφέν σχῆμα τοῦ τμήματος, δηλονότι καὶ τὸ περιγραφέν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΘΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποθ' αὐτό, ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΕΠ ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΕΠ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δεύτερον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὰν ἴσαν τῇ ΘΕ ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρῶτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις.

1.232 Καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρῶτῳ τετραγώνῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσιν τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλαῶν ὑπερέχουσῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος· ὅπερ ἀδύνατον· τοῦ γὰρ Ψ κώνου ἡμιόλιός ἐστι, τὸ δὲ

περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μείζον ἐστὶ οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν. κη'. Καὶ τοίνυν εἴ κα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδὲς, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ Θ, τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δ' αὐτὰ διὰ τοῦ Θ ἀγμένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπέκειτο διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. Ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτέμνον ὑπέκειτο οὐ ποτ' ὀρθὰς εἶμεν τῷ ἄξονι ἀγμένον.

1.233 Ἀχθων δὴ τινες αἱ ΚΛ, ΜΝ παρὰ τὰν ΑΓ ἐπιψαύουσαι τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰς κατὰ τὰ Β, Δ, ἀπὸ δὲ τὰν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαύονται δὴ ταῦτα τοῦ σφαιροειδούς κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἁ ΒΔ ἐπιζευχθεῖσα πεσεῖται διὰ τοῦ Θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ Β, Δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΒΘ, ΘΔ. Δυνατὸν δὴ ἐστὶν κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν ΒΘ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, εὐρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδούς καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι κορυφὰν ἔχοντα τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἁ ἀπὸ διαμέτρου τὰς ΑΓ. Εὐρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τι ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· λέγω δὴ ὅτι τοῦ σφαιροειδούς τὸ ἡμίσειον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. Ἐστω δὴ ὁ Ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμήματος τοῦ κώνου. Εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς τῷ Ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζον. Ἐνέγραψα δὴ τι εἰς τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἔχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς τοῦ Ψ κώνου.

1.234 Ὅμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδούς μείζον ἐὼν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐὼν, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδούς μείζον ἢ ἡμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν μείζον τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς τοῦ Ψ κώνου. Εἰ δὲ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς τοῦ Ψ κώνου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδούς σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἔχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδούς. Πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὼν τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν τοῦ μὲν Ψ κώνου ἡμιόλιος ἐὼν, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος· ὅπερ ἀδύνατον.

1.235 Οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἡμισυ τοῦ σφαιροειδούς τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μείζον ἐστὶν οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἐστί. Φανερόν οὖν ἐστὶν ὃ ἔδει δεῖξαι. κθ'. Παντὸς σχήματος σφαιροειδούς ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἔλαττον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ἡμίσειον τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδούς καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμήματος. Ἐστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδούς σχήματος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ τὰς τομὰς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδούς ἔστω ἁ ΒΖ, κέντρον δὲ τὸ Θ, τοῦ δὲ

ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα τομὰ ἔστω ἁ ΑΓ εὐθεῖα· ποιήσῃ δὲ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν ΒΖ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν εἴμεν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑπέκειτο· ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμαμένον, οὗ κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἀμίσειον τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ ΒΘ ἴσα ἔστω ἁ ΖΗ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ Β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ.

1.236 Ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ· φαμὶ δὴ τὸν Ψ κῶνον ἴσον εἴμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ Β σαμεῖον. Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἴσος, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων. Ἐνέγραψα δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ μείζον ἔστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου. Ἐπεὶ οὖν μείζον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι μείζον ἔστι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου.

1.237 Ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς ΒΔ ἁ ΒΡ. Ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ΒΗ τριπλασία ἐστὶν τᾶς ΒΘ, ἁ δὲ ΒΔ τᾶς ΒΡ, δῆλον ὅτι τριπλασία ἐστὶν ἁ ΔΗ τᾶς ΘΡ· ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὰν ΒΔ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΔΗ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΔΗ· ἔξει οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸν Ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ἔστων δὴ γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ' ἃν τὰ Ξ, Ν, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσιν τοῖς τᾶς ΒΔ, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα ἴσα τᾷ ΖΔ, ἔστω δὲ καὶ τᾶν ΞΟ ἐκάστα ἴσα τᾷ ΒΔ· τᾶν οὖν ΝΟ ἐκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς ΘΔ. Παραπεπτωκέτω δὴ παρ' ἐκάσταν αὐτὰν χωρίον τι πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ ΒΔ, ὥστε εἴμεν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον. Ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ ΒΧ, καὶ ἀφ' ἐκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς ἀπὸ τοῦ ἐπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρήσθω πλάτος ἔχων ἐνὶ τμάματι ἔλασσον τοῦ πλατέος τοῦ πρὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου· ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΖ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παραπεπτωκὸς παρὰ τὰν ΝΟ ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ ΔΕ, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΖΧ, ΧΒ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκὸς ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις ἐξοῦντι.

1.238 Διάχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι, ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. Ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔΕ ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΔΓ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΕ. Οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΔ, ΔΖ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΖ· ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον· ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ ΔΕ ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν

λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνῶμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. Ἐντὶ οὖν μεγέθεά τινα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότα πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τῆς $\text{B}\Delta$, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, λέγονται δὲ οἱ τε κύλινδροι ποτ' ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται, καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα χωρία, τοὺς ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρημένους, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ' ἐν λέγεται· δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἐτέρους τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνῶμονας· ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνῶμονας.

- 1.239 Καὶ ἐπεὶ ἐντὶ τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι, ἐφ' ἃν τὰ N , O , καὶ παρ' ἐκάσταν παραπέπτωκέν τι χωρίον ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλὰ ἄν ὑπερέχοντι, καὶ ἡ ὑπεροχὴ ἴσα ἐστὶ τῆς ἐλαχίστης, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότα, πλάτος δὲ ἔχοντα τὰς ἴσας τῆς $\text{B}\Delta$, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τοῦτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία, ὧν ἐστὶν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσῳ λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΞN ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρῃ τῇ τε ἡμισέᾳ τῆς NO καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῆς ΞO . Φανερόν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνῶμονας μείζονα λόγον ἐξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΞN ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῇ τε ἡμισέᾳ τῆς NO καὶ δυοῖς τριταμορίοις τῆς ΞO · ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΞN ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῇ τε ἡμισέᾳ τῆς NO καὶ δυοῖς τριταμορίοις τῆς ΞO .
- 1.240 Ἦστί δὲ τῇ μὲν ΞN ἴσα ἡ ΔZ , τῇ δὲ ἡμισέᾳ τῆς NO ἡ ΔO , τὰ δὲ δύο τριταμόρια τῆς ΞO ἡ ΔP · ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμήματι μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἡ ΔZ ποτὶ τὰν ΘP . Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΔZ ποτὶ τὰν ΘP , τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· μείζονα οὖν ἔξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ μείζον ἐὶν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. Οὐκ ἄρα ἐστὶ μείζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμήμα τοῦ Ψ κώνου. Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἕλασσον. Πάλιν δὲ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμήμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγράφτου ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ μείζον ἐστὶν ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμήματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. Ἐπεὶ οὖν ἕλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμήματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφέν ἢ ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμήματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφέν σχῆμα ἕλασσόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. Πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ΔE ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τῆς $\text{B}\Delta$ ποθ' αὐτό· ἐκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν· ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσον τῆς ΔE ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ' αὐτὸν ἐόντα τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότων πλάτος ἐχόντων ἴσον τῆς $\text{B}\Delta$ ποτὶ τὸν γνῶμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ' αὐτοῦ, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσον τῆς ΔE ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότων ποτὶ τὸν γνῶμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον πρῶτου λεγομένου τοῦ ἐσχάτου· καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ΞN παραπεπτωκότα ποτὶ τὸ

ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον.

1.241 Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΞΝ παραπεπτωκότα ποτὶ τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν ΝΟ παραπεπτωκότα υπερβάλλοντα εἶδει τετραγώνῳ χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῶ τε ἡμισέᾳ τῆς ΝΟ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῆς ΞΟ, δηλὸν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπά, ἅ ἐντι ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρουμένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΞΝ ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τῶ τε ἡμισέᾳ τῆς ΝΟ καὶ δυσὶ τριταμορίοις τῆς ΞΟ· δηλὸν οὖν ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΖΔ ποτὶ τὰν ΘΡ. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ΔΖ ποτὶ τὰν ΘΡ, τοῦτον ἔχει ὁ εἰρημένος κύλινδρος ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅπερ ἀδύνατον· ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὼν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κῶνου.

1.242 Οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κῶνου. Ἐπεὶ δὲ οὔτε μείζον οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν. λ'. Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμαῖμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου τὸ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἡ ἴσα συναμφοτέρα τῶ τε ἡμισέᾳ τῆς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. Τετμάσθω γὰρ τι σχῆμα σφαιροειδὲς, ὡς εἴρηται, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἡ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἡ ΓΑ εὐθεῖα, καὶ παρὰ τὰν ΑΓ ἄχθων αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τὰς τοῦ κῶνου τομὰς κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτὰν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσούντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Ζ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ Β, Ζ.

1.243 Ἀχθῶ οὖν ἡ τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων ἐπιζευγνύουσα καὶ ἔστω ἡ ΒΖ· πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος καὶ τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰς τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμάσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἡ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ καὶ διάμετρος αὐτὰς ἡ ΓΑ. Λελάφθω οὖν ὁ τε κύλινδρος ὁ ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΔ, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ ἡ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ Β σαμεῖον, οὗ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἡ τοῦ ὀξυγωνίου κῶνου τομὰ ἡ περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ· ἐσσεῖται δὲ τὸς τομὰς τοῦ κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν καὶ ἀπότμαμα κῶνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. Δεικτέον ὅτι τὸ τμαῖμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου τὸ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἡ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ· ἴσα δὲ ἔστω ἡ ΖΗ τῇ ΘΖ. Λελάφθω δὲ τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ Ψ, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κῶνου τὸ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ΔΗ ποτὶ τὰν ΔΖ. Εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τμαῖμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ Ψ κῶνῳ, ἔστω πρῶτον, εἰ δυνατόν, μείζον.

1.244 Ἐνέγραψα δὲ εἰς τὸ τμαῖμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιέγραψα ἐκ κυλίνδρων τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμαῖμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ Ψ κῶνου. Ὅμοίως δὲ τῷ προτέρῳ δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζον ἐὼν τοῦ Ψ κῶνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὅ ἐστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμαῖμα τοῦ Ψ κῶνου μείζον. Ἀλλ' ἔστω, εἰ δυνατόν, ἔλασσον.

Ἐγγεγράφθω δὴ πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρου τόμων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα, ὥστε τὸ περιγραφέν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἀλίκῳ ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ τμᾶματος. Πάλιν δὴ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ Ψ κώνου καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν Ψ κῶνον· ὃ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. Φανερόν οὖν ὃ ἔδει δεῖξαι. λα'. Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μείζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμᾶματος ἄξονι ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμᾶματος ἄξονα.

1.245 Τετμάσθω τι σφαιροειδές, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἂ ΑΒΓ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἂ ΒΔ, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου ἂ ΓΑ εὐθεῖα· ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΒΔ· ἔστω δὲ μείζον τῶν τμαμάτων, οὗ κορυφὰ τὸ Β, καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ Θ. Ποτικείσθω δὴ ἂ ΔΗ τᾷ ΔΘ ἴσα καὶ ἂ ΒΖ τᾷ αὐτᾷ ἴσα· δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ. Τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδές ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ Δ σαμεῖον· ἔστιν δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδές διπλάσιον τοῦ τμᾶματος τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν· δέδεικται γὰρ ταῦτα· τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδές τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου.

1.246 Ὁ δὲ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἂ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ· ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΚΘ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΕΑ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. Ὁν δὴ λόγον ἔχει ἂ ΘΔ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἐχέτω ἂ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ· ἔξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ, ὃν ἂ ΔΘ ποτὶ τὰν ΔΕ. Ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΞΔ, ΘΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΒΘΔ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ· ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΚΛ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ. Ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ΑΓ, κορυφὰν δὲ τὸ Δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ΖΕ, ΕΔ [τουτέστιν ἂ ΒΕ ποτὶ ΕΖ· τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισέᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμᾶματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμᾶματος, οὗτος δὲ ἐστὶν ὃν ἔχει ἂ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΕ, ΕΔ.

1.247

Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΞΔ [τετραπλάσιον γὰρ ἐκάτερον], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον ἢ τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΔ, ἔχει καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕΔ· ὥστε καὶ τὸ μείζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἂ ὑπεροχά, ἧ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕΔ. Ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΔ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΗ περιεχομένῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΞΕ· ἔχει ἄρα τὸ μείζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΔ.

1.248 Τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ [τὸν γὰρ αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ], ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμᾶματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμᾶματι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετράγωνον· τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν· ἔχει οὖν καὶ τὸ μείζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Οὗτος δὲ ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ· τὸ γὰρ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΗ ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΔ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΞΕ, ΖΕ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΘΕ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ· ἂ γὰρ ΞΕ ποτὶ τὰν ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ διὰ τὸ ἀνάλογόν τε εἶμεν τὰς ΞΔ, ΘΔ, ΔΕ, καὶ τὰν ΘΔ ἴσαν εἶμεν τῇ ΗΔ· καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΗ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΞΕ ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΘΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετράγωνον ἴσον ἐντὶ ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΘΕ· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΘ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΞΔ, ΕΔ περιεχομένῳ, ἂ δὲ ὑπεροχά, ἧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΘΕ, ἐπεὶ ἴσαι αἱ ΒΘ, ΒΖ· δῆλον οὖν ὅτι τὸ μείζον τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.

1.249 λβ'. Καὶ τοίνυν εἴ κα μὴ ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς μηδὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μείζον τμᾶμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔξει τὸν λόγον, ὃν ἂ συναμφοτέραις ἴσα τῇ τε ἡμισέᾳ τῆς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γενομένων τμαμάτων καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμαματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμαματος. Τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἂ ΑΒΓΔ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἂ ΓΑ εὐθεῖα, παρὰ δὲ τὰν ΑΓ ἄχθωσαν αἱ ΠΡ, ΣΤ ἐπιψαύουσαι τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰς κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτὰν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν ΑΓ· ἐπιψαυσούντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ Β, Δ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων τὰ Β, Δ.

1.250 Ἄχθω οὖν ἂ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γενομένων τμαμάτων ἂ ΒΔ· πεσεῖται δ' αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, μείζον δὲ ἢ τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος τὸ τμᾶμα, οὗ κορυφὰ τὸ Β, ποτικείσθω δὲ ἂ ΔΗ ἴσα τῇ ΔΘ καὶ ἂ ΒΖ τῇ αὐτῇ. Δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸ μείζον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμᾶματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἂ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ. Τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς

ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλήλῳ τῷ κατὰ τὰν ΑΓ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσειον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμαμα κώνου κορυφὰν ἔχον τὸ Δ σαμεῖον, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἅ ΔΘ ποτὶ τὰν ΕΔ, τοῦτον ἔχέτω ἅ ΞΔ ποτὶ τὰν ΘΔ. Ὅμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τό τε ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΒΕ, ΕΔ, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ τμήμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται τὸν αὐτὸν ἔχον λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ· ἔξει οὖν τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμήμα τοῦ σφαιροειδέος ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ.

1.251 Ἐξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΒΘ, ΞΔ· τετραπλάσιον γὰρ ἑκατέρου ἑκάτερον· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμήμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΞΔ, ΒΘ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ· ἔξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμήμα αὐτοῦ [τοῦ σφαιροειδέος] τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΖΗ, ΞΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ· αὐτὸ δὲ τὸ μείζον τμήμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἅ ὑπεροχά, ᾧ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΖΗ, ΞΔ τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ. Τὸ δὲ ἔλασσον τμήμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τὰν ΖΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ τὰν ΒΕ, ΕΔ [δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἅ ΖΕ ποτὶ τὰν ΒΕ]· τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένον ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τὰν ΒΕ, ΕΔ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· τὰ γὰρ ἀποτμάματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τὸν τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τῷ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὰν ΕΒ· ἔχει οὖν καὶ τὸ μείζον τμήμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἅ ὑπεροχά, ᾧ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τὰν ΗΖ, ΞΔ τοῦ ὑπὸ τὰν ΖΕΔ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΒΕ τετράγωνον· ὁ δὲ λόγος οὗτος ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθεῖη καὶ ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἅ ΕΗ ποτὶ τὰν ΕΔ.