

eul_wid: kle-aa

Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος · Apollonius of Perga

Conics

Κωνικά

Period: Ἑλληνιστική Hellenistic
Dialect: Κοινή τεχνική Technical Koine
Domain: Μαθηματικά Mathematics
Format: Πραγματεία Treatise

¹ prol Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν. Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι, μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετὰ σου ἐν Περγᾷ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν· πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος, τὰ δὲ λοιπὰ, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν· οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἶομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγεννηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὅκτῳ βιβλίοις ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτὰ εἰς τὸ σπουδαιότερον διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες ἀεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν μετεληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσης, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἐτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτῶ βιβλίων τὰ πρῶτα τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη, περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλεόν καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξεργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρεῖαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνες δὲ διαμέτρους καὶ τίνες ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατόν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπὰ ἐστὶ περιουσιαστικώτερα· ἐστὶ γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλεόν, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν, τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἰρῇται. εὐτύχει. Ἐὰν ἀπὸ τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὅς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ,

εὐθεΐα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεΐα περιενεχθεῖσα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἢ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκάτερα εἰς ἄπειρον αὖξεται τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον, ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεΐαν. ^[10]

¹ HOR¹ κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τε κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας κωνικῆς ἐπιφανείας, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή, ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεΐαν, βάσιν δὲ τὸν κύκλον. τῶν δὲ κώνων ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσει τοὺς ἄξονας, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσει τοὺς ἄξονας. πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεΐαν, ἥτις ἡγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθεΐα τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων. ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων διάμετρον καλῶ πλαγίαν μὲν, ἥτις εὐθεΐα τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεΐαν δίχα τέμνει, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου, ὀρθίαν δέ, ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας εὐθεΐα τινὶ καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν δίχα τέμνει, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων. συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους [δύο] καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, ὧν ἑκάτερα διάμετρος οὖσα τὰς τῇ ἐτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ. ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθεΐαν, ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς ἡ τῶν γραμμῶν πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους. συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, αἵτινες διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους. Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεΐαι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσίν. ^[45]

¹ ¹ ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω τις εὐθεΐα ἡ ΑΓΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓΒ εὐθεΐα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γεγραφυῖα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεΐα ἡ ΔΕ, ὃ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ ΕΔ, ὃ ΕΖ. ἐὰν δὲ μένοντος τοῦ Α σημείου ἡ ΔΕ εὐθεΐα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφέρειας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ. πόρισμα. καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεΐα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐὰν ἐπὶ τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν ἐφ' ὅποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεΐα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός. ^[20]

¹ ² ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὃ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεΐα, ὃ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ὅποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ μὴ νεύετω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦνται δὲ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ· ἔσται ἄρα ἡ ΒΓ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὥστε καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΔΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ ἐκβεβλήσθω. πεσεῖται δὲ ἐπὶ τὴν ΒΓ

εὐθεΐαν· τὸ γὰρ ΒΓΑ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεία ἐντὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας· ἡ ἄρα ΔΕ ἐντὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας. ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ. λέγω δὴ, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι αὐτῆς τὸ Θ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὲ ἡ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐντὸς· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκβαλλομένην ὡς κατὰ τὸ Κ. ἡ ΕΘ ἄρα ἐκτὸς ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας. ἡ ἄρα ΔΕ ἐντὸς ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτὸς. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν. ^[30]

^{1 3} ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ Α σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς ΑΒ, ΑΓ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν ΒΓ εὐθεΐαν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομὴ ἐστὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κῶνου ἐπιφανείας, εὐθεΐα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ εὐθεΐα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ. ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν. Ἐὰν ὁποτεροαὺν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεΐα, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ κῶνος ἔσται. ^[5]

^{1 4} ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἥς κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεΐα, ὁ ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ τῷ ΒΓ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν ΔΕ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ γραμμὴ κύκλος ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἄξων ἄρα ἐστὶ καὶ συμβάλλει τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐκβεβλήσθω τι διὰ τῆς ΑΖ ἐπίπεδον. ἔσται δὲ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Η, Ε σημεία ἐν τῷ τέμνοντι ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, εὐθεΐα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗΕ. εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω. συμβαλεῖ δὲ τῇ ΒΓ περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΖΚ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΔΕ, ΒΓ ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΚΖ παράλληλος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἡ τε ΖΒ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΓ πρὸς ΗΕ καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΗΘ. καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς αἱ ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Η σημείου πρὸς τὴν ΔΕ γραμμὴν προσπίπτουσιν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ γραμμὴ τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. καὶ φανερόν, ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τοῦ ΔΕ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ πρὸς τῷ Α σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας κῶνός ἐστι. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρος ἐστὶ τοῦ κύκλου. Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, ἡ τομὴ κύκλος ἐστί, καλεῖσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία. ^[5]

^{1 5} ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῶ πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον

πρὸς τῷ Α σημείῳ τὸ ΑΚΗ ὁμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΚΗ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΗΘΚ γραμμὴν. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμὴ. εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖα ἐπὶ τῶν ΗΘΚ, ΒΓ γραμμῶν τὰ Θ, Λ, καὶ ἀπὸ τῶν Θ, Λ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πιπτέτωσαν ὡς αἱ ΖΘ, ΛΜ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΔΖΕ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΛΜ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΖΘ, ΔΕ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. κύκλος ἄρα ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΔΕ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΚΗ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΔΕ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ σημεῖω ἴσαι [κατὰ κορυφὴν]. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΗ τρίγωνον τῷ ΚΖΕ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΚ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΖΗ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖΔ ἴσον ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΗΚ ἡγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ΗΚ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ, οὗ διάμετρος ἡ ΗΚ. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δὲ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθεῖα τινί, ἢ ἐστὶ κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ^[5]

- ¹ ⁶ ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας τοῦ Μ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΜΝ. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΜΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐπεξεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ· καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΘΚ τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΘ. ἡ δὲ ΑΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΘ συμπίπτει· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπ' εὐθείας, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ. ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Η, Λ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΘ, ΑΚ, ΔΗ, ΚΛ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι, τὰ Α, Η, Λ ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστὶ τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Λ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΛΚ τῇ ΚΘΛ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ ΔΗ, καὶ διηκταί τις ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖΘ, ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ἐπεὶ περ ἐν κύκλῳ τῷ ΒΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΚΛ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ κώνου, κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὔσαν ἦτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ τριγώνου εὐθείᾳ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν

ὀρθός ἢ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεΐα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἢ τῇ βάσει τοῦ κῶνου. ^[15]

1 7 ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἔστιν ὁ ΒΓ κύκλος, κατ' εὐθεΐαν τὴν ΔΕ ἥτοι πρὸς ὀρθὰς οὔσαν τῇ ΒΓ ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου τὴν ΔΖΕ· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΖΗ. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς τὸ Θ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΚ συμβαλεῖ τῇ ΖΗ καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μὴ ἔστιν ἐπὶ πλευρᾷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τὸ Θ, καὶ ἔστι κάθετος ἡ ΔΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΗ παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘΚ, συμβαλεῖ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καὶ ἔστιν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπιπέδῳ, ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομὴ ἔστι τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΗ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΖΗ· καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας. ^[45]

1 7 (50) ἥτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἡ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ἢ οὐδέτερον. ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΒΓ ὀρθόν ἐστι, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΓ ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὀρθή ἐστιν. ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. μὴ ἔστω δὲ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. μὴ ἔστω δὲ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔστι δὲ καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς· ἡ ἄρα ΔΕ ἐκατέρᾳ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΓ, ΗΖ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ἐν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΒΓ κύκλος· ὁ ΒΓ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. πόρισμ α'. ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς ΔΖΕ τομῆς διάμετρος ἐστὶν ἡ ΖΗ, ἐπεὶ περ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθεΐας τινὴ τῇ ΔΕ δίχα τέμνει, καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι καὶ μὴ πρὸς ὀρθὰς. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κῶνου κατ' εὐθεΐαν πρὸς ὀρθὰς οὔσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς ἥτοι παρὰ μίαν ἢ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κῶνου, προσεκβάλληται δὲ ἢ τε τοῦ κῶνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἀυξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεται τις εὐθεΐα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κῶνου τομῆς παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κῶνου εὐθεΐαν. ^[10]

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν ΒΓ κύκλον κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΖΕ γραμμὴν· ἡ δὲ διάμετρος τῆς ΔΖΕ τομῆς ἡ ΖΗ ἤτοι παράλληλος ἔστω τῇ ΑΓ ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου. λέγω, ὅτι καί, ἐὰν ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλληται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· φανερόν δὴ, ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ συνεκβληθήσονται. ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου, αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Η μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΖΗ τυχὸν τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ. κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Ε, Μ, Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστὶν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καί, ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἢ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται. καὶ φανερόν, ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεται τις ἀπὸ τῆς ΖΘ εὐθείας πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θῶμεν τὴν ΖΞ καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΕ παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα· ὥστε ἄγεται τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ παράλληλος οὖσα τῇ ΔΕ ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ^[45]

- 1 9 Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἡγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος. ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μήτε παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΚΕ γραμμὴν. λέγω, ὅτι ἡ ΔΚΕ γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ συμπίπτει τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΖΗ, τὸ δὲ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἦχθω ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ ποιεῖτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑ, ΑΓ εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ Δ, Ε, Η σημεῖα ἐν τε τῷ διὰ τῆς ΔΚΕ ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν Α, Β, Γ, τὰ ἄρα Δ, Ε, Η σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕΔ. εἰλήφθω δὴ τι ἐπὶ τῆς ΔΚΕ γραμμῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἦχθω ἡ ΚΛ· ἔσται δὲ ἴση ἡ ΚΜ τῇ ΜΛ. ἡ ἄρα ΔΕ διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΔΚΛΕ κύκλου. ἦχθω δὲ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΜΞ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΖΗ παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν ΝΞ, ΚΜ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ, τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΝΚΞ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ, καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΝΞ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΜΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ· κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΚΕΛ γραμμὴ, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΔΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΜΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΜΔ, οὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΞ. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον τῷ ΞΜΕ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· παράλληλος γὰρ ἡ ΝΞ τῇ ΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ὑπεναντία ἄρα ἐστὶν ἡ τομὴ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΔΚΕ γραμμὴ. Ἐὰν ἐπὶ κώνου τομῆς ληφθῇ δύο σημεῖα, ἡ μὲν ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός. ^[40]

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ κῶνου ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ γραμμὴν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΕΖ δύο σημεῖα τὰ Η, Θ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς ΔΕΖ γραμμῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός. ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, εἴληπται δὲ τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ Η, Θ, ἃ μὴ ἐστὶν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὸ Α, ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κῶνου καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός· ὥστε καὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κῶνου κατ' εὐθείαν πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ἢ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κῶνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κῶνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἡ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κῶνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλεῖσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή ἢ . [15]

1 11 ἔστω κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κῶνου κατ' εὐθείαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κῶνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΑ. ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κῶνου. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΑ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΝ πρὸς ΖΑ ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΑΝ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ.

[45]

1 11 (50) ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τῆς ΖΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΑΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΑΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΑ. καλεῖσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ παραβολή, ἡ δὲ ΘΖ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΖΗ διάμετρον, καλεῖσθω δὲ καὶ ὀρθία. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κῶνου κατ' εὐθείαν πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ

τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς δυνήσεται τι χωρίον παρακείμενον παρὰ τινα εὐθεΐαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἶδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ὑποτείνουσας τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή. ^[20]

1 12 ἔστω κῶνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεΐαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ποιεῖτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ γραμμὴν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει μὴ πλεονάζοντι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τῇ ΑΓ ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΖΗ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ, καὶ τεμνέτω τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΖΛ, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΜΝ, διὰ δὲ τοῦ Ν τῇ ΖΛ παράλληλος ἡ ΝΟΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΛ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ ΖΝ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΛΟ, ΞΠ. λέγω, ὅτι ἡ ΜΝ δύναιται τὸ ΖΞ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ ὑπερβάλλον εἶδει τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ. ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΡΝΣ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΡΝΣ. καὶ ἔστιν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἡ ΜΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΡΝΣ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ^[45]

1 12 (50) καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, ὃ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὁ τῆς ΖΘ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΣ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὃ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἕκ τε τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὃ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ, τῆς ΖΝ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΝΞ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΝΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ. τὸ δὲ ἀπὸ ΜΝ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΣΝΡ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΞΝΖ ἐστὶ τὸ ΞΖ παραλληλόγραμμον. ἡ ἄρα ΜΝ δύναιται τὸ ΞΖ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ ὑπερβάλλον τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ. καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή, ἡ δὲ ΛΖ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως καλείσθω δὲ ἡ αὕτη καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΖΘ. Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἐκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἡγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἔστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ' εὐθεΐαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἥτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς

τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τι χωρίον παρακείμενον παρὰ τινὰ εὐθείαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἡγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλείπον εἶδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται καλεῖσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις. ^[20]

1 13 ἔστω κώνος, οὗ κορυφή μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἐκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου μήτε ὑπεναντίως ἡγμένῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΕ γραμμὴν· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ, ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς οὔσα τῇ ΒΓ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΕΘ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΖΗ παράλληλος ἦχθω ἡ ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΛΜ δύναται τι χωρίον, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΕΘ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλείπον εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΘΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ τῇ ΕΜ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΠΜΡ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΠΡ τῇ ΒΓ παράλληλός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΖΗ παράλληλος, τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. καὶ ἐστὶ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΘ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἕκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ^[55]

1 13 (50) ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἕκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΞ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΜΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΡ τῷ ὑπὸ ΞΜΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΠΜΡ ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· καὶ τὸ ὑπὸ ΞΜΕ ἄρα ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. ἡ ΛΜ ἄρα δύναται τὸ ΜΟ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΘΕ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλείπον εἶδει τῷ ΟΝ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΔΕΘ. καλεῖσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις, ἡ δὲ ΕΘ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγμένως, ἡ δὲ αὐτὴ καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΕΔ. Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἐκατέρᾳ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἢ τε διάμετρος ἡ αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ' ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθείᾳ ἴσαι, καὶ τοῦ εἵδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινὴ ἢ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν· καλεῖσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ἀντικείμενα ι. ^[5]

1 14 ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφή τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκατέρᾳ τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστὶν ἡ καλουμένη ὑπερβολή. ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν

ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεΐα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἦχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ· κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΗΘΚ, ΖΕΔ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσσονται δὴ παράλληλοι. ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεΐα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διὰ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ποιήσει δὴ τομὰς ἐν μὲν τοῖς κύκλοις παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΟ, ΒΓ, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑΟ, ΓΑΞ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΕΟ τῇ ΗΚ πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα παράλληλος. καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ταῖς τομαῖς συμβάλλει κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα ἐντὸς τῶν γραμμῶν, δῆλον, ὡς καὶ τὰς γραμμὰς τέμνει τὸ ἐπίπεδον. τεμνέτω κατὰ τὰ Θ, Ε· τὰ ἄρα Μ, Ε, Θ, Ν σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ εἰσὶν αἱ γραμμαὶ εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΕΘΝ γραμμὴ. καὶ φανερόν, ὅτι τὰ τε Ξ, Θ, Α, Γ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ καὶ τὰ Β, Ε, Α, Ο ἐν τε γὰρ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἐν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ. ἦχθωσαν δὴ ἀπὸ μὲν τῶν Θ, Ε τῇ ΘΕ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΘΡ, ΕΠ, διὰ δὲ τοῦ Α τῇ ΜΕΘΝ παράλληλος ἦχθω ἡ ΣΑΤ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΤΞ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποιήκε τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεΐαν τὴν ΔΜΖ πρὸς ὀρθὰς οὕσαν τῇ ΒΓ, καὶ πεποιήκε τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ΜΕ ἐκβαλλομένη συμπίπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΕΜ παράλληλος ἦκται ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΜ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΕΠ, καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΕΠ, ἡ μὲν ΔΕΖ ἄρα τομὴ ὑπερβολὴ ἐστὶν, ἡ δὲ ΕΠ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. ^[55]

1 14 (50) ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ ὑπερβολὴ ἐστὶν, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΡ τῇ ΕΠ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΕΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΓ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΞ, καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ. ἀλλ' ὁ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΣ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ὁ δὲ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΞ μετὰ τοῦ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΟ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ. καὶ ἐστὶν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ, ἡ ΘΕ πρὸς ΘΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΘΡ. Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσα εὐθεΐα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ διάμετρος πρὸς τινὰ εὐθεΐαν, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἐλλείπον εἶδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ἐφ' ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ' ἣν κατῆκται. ^[10]

1 15 ἔστω ἔλλειψις, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Γ ἦχθω τεταγμένως καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς ἡ ΔΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΔΖ, καὶ ποιείσθω ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΔΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ ἐλλείπον εἶδει τῷ ΑΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται

αί ἐπὶ τὴν AB καταγόμεναι τεταγμένως ἡ AN, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BN, καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Ξ, Γ τῇ AN παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΕΞ, ΓΠ, διὰ δὲ τῶν Ν, Ο, Π τῇ AB παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΝΥ, ΟΣ, ΤΠ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΓ τῷ ΑΠ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ΑΟ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΝ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΠ, καὶ ἡ ΠΤ πρὸς ΤΝ, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΑ, τουτέστι τῇ ΤΠ, καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΤΑ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΑΠ τῷ ΤΡ, τὸ δὲ ΕΤ τῷ ΤΥ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΟΤ τῷ ΟΡ ἐστίν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΝΟ, τὸ ΤΥ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΣ. ἀλλὰ τὸ ΤΥ τῷ ΤΞ ἐστίν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΤΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ ΠΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΟ μετὰ τοῦ ΠΟ· ὥστε τὸ ΠΑ τοῦ ΑΟ ὑπερέχει τῷ ΟΠ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΑΟ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΗ, τὸ δὲ ΟΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΟΣΠ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστι τῆς ΞΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΗ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ· ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. ^[45]

1 15 (50) καὶ ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΠΓΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΣΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΣ. καὶ ἐστίν ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΘΔ τῷ ὑπὸ ΠΣΟ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΣ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ ἐλλείπον εἶδει τῷ ΖΛ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΖ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐκβαλλομένη ἡ ΘΗ ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΔΕ. ἐκβεβλήσθω γὰρ καὶ συμβαλλέτω τῇ τομῇ κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Φ τῇ ΗΞ παράλληλος ἦχθω ἡ ΦΧ, διὰ δὲ τοῦ Χ τῇ ΑΝ παράλληλος ἦχθω ἡ ΧΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ ΗΞ τῇ ΦΧ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΧ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΞΟ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΦΧ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΧΨ. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ, οὕτως ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ, καὶ ἐστίν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ, οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΧΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΧΞ πρὸς ΧΒ. ἴση ἄρα ἐστίν ἡ ΑΞ τῇ ΧΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΓ τῇ ΓΧ ἐστίν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΦ. ἡ ἄρα ΘΗ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἐτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΘ. Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγῆς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ. ^[80]

1 16 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἦχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι διάμετρος ἐστίν ἡ ΓΔ συζυγῆς τῇ ΑΒ. ἔστωσαν γὰρ παρ' αὐς δύνανται αἱ καταγόμεναι αἱ ΑΕ, ΒΖ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΖ, ΒΕ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἐτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν Η, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ ταῖς ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἦχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΑ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΛΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΒ, τῆς ΚΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΝΛ πρὸς ΛΑ, τῆς ΒΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΛΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΛΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΛΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. καὶ

ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΚΑ τῷ ὑπὸ ΝΛΒ· ἴσον ἄρα ἔστι καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΛΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ ὅλη τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ τῇ ΞΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ· καὶ ἐστὶ παράλληλος τῇ ΑΒ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγῆς τῇ ΑΒ. Τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τῆς τομῆς καλεῖσθω, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν προσπίπτουσα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς. ^[35]

1 HOR2 ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς κέντρον καλεῖσθω. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἡγμένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην μέσον τε λόγον ἔχουσα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ δίχα τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κέντρου δευτέρα διάμετρος καλεῖσθω. Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γραμμῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. ^[10]

1 17 ἔστω κώνου τομή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ Α σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ ΑΒ διαμέτρῳ καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς. ἡ ΑΓ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΑΒ· ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται· διόπερ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. Ἐὰν κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δὲ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ, ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ^[5]

1 18 ἔστω κώνου τομή καὶ συμπίπτουσα αὐτῇ ἡ ΑΖΒ εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. εἰλήφθω γὰρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ τῇ ΑΒ συμπίπτει τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΕΖ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Ε, Ζ, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐὰν δὲ ἐκτὸς τοῦ Ε σημείου, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ΓΔ ἐκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὰ Δ, Ε μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Β ἐκβαλλομένη συμπίπτει. ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ^[20]

1 19 ἔστω κώνου τομή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Β, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦχθω ἡ ΒΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. εἰλήφθω γὰρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ· ἔστι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζυγυυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΑΔ, καὶ ἐστὶ τῇ κατηγμένην παράλληλος ἡ ΒΓ, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα συμπεσεῖται τῇ ΑΔ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Α, Δ σημείων, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται, εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ Δ ὡς κατὰ τὸ Ε, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἔσται ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς. ^[5]

1 20 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεία ἐπ' αὐτῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ,

οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ ΑΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΖ τῷ ὑπὸ ΖΑΗ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΑΗ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ. Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἡ κύκλου περιφερεία εὐθεῖα ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἵδους ὡς τοῦ εἵδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, πρὸς ἄλληλα δέ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν. ^[5]

1 21 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἐλλειψὶς ἡ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ ΑΓ, καὶ κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ ΔΕ, ΖΗ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ διορίζουσα τὸ εἶδος, καὶ διὰ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ὑπὸ ΚΗΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΕ τῷ ὑπὸ ΘΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ, τῆς ΑΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ, ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ. Ἐὰν παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εὐθεῖα τέμνη κατὰ δύο σημεῖα μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐντός, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς. ^[25]

1 22 ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκτὸς τῆς τομῆς τῇ ΑΒ. κατήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ ΓΕ, ΔΒ· ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολῇ. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ παραβολῇ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, μείζων δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΑΒ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. ὥστε καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΔΒ μείζων ἐστί. καὶ εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒΑ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καὶ εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς. Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνη μεταξὺ κειμένη τῶν δύο διαμέτρων, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκάτερα τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς. ^[20]

1 23 ἔστω ἔλλειψις, ἥς διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ ΕΖ μεταξὺ κειμένη τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς. κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΓΔ αἱ ΕΚ, ΖΛ. ἔστιν ἄρα, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΓ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μείζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ· ἔγγιον γὰρ τὸ Η τῆς διχοτομίας· τὸ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τοῦ ὑπὸ ΔΚΓ μείζον· μείζον ἄρα καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ τοῦ ἀπὸ ΕΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῆς ΕΚ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκάτερα τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς. Ἐὰν παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ εὐθεῖα καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ. ^[20]

1 24 ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ συμπίπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα ἐκτὸς πίπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ.

εἰλήφθω γάρ τι σημείον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔZ· ἡ ΔZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ A· καὶ ἐστὶ μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ZΔA ἡ ΓΔE. καὶ ἡ ΓΔE ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. Ἐὰν ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων. ^[10]

1 25 ἔστω ἔλλειψις, ἥς διάμετροι αἱ AB, ΓΔ, καὶ ταύτῃ συμπιπτέτω τις εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ EZ κατὰ τὸ H καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ EZ συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν AB, ΓΔ. κατήχθωσαν ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰς AB, ΓΔ τεταγμένως αἱ HΘ, HK. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ HK τῇ AB, συμπέπτωκε δέ τις τῇ HK ἡ HZ, καὶ τῇ AB ἄρα συμπεσεῖται. ὁμοίως δὲ καὶ τῇ ΓΔ συμπεσεῖται ἡ EZ. Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. ^[10]

1 26 ἔστω πρότερον παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ABΓ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἦχθω ἡ EZ. λέγω, ὅτι ἡ EZ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς EZ τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦχθω ἡ EH, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς HE μείζον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΓΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ. μείζον δὲ τὸ ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ἀπὸ EH· μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΘΓ τοῦ ἀπὸ EH· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΓ τῆς EH. καὶ εἰσι παράλληλοι· ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ΘΓ· ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ K. λέγω δὲ, ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ K συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατὰ δύο σημεία, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω δὲ ἡ τομὴ ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ AB, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB καὶ ἐκβεβλήσθω. τῶν αὐτῶν δὲ κατασκευασθέντων ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΓM. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ MΓA μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ὑπὸ MΓA ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μείζον τοῦ ἀπὸ HE, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ἀπὸ EH. ὥστε καὶ ἡ ΓΘ τῆς EH μείζων ἐστὶ, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον συμβήσεται. Ἐὰν παραβολῆς τὴν διάμετρον εὐθεῖα τέμνῃ, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ^[35]

1 27 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ AB, καὶ ταύτῃ τεμνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἦχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ AE· ἡ AE ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῇ AE παράλληλός ἐστιν ἢ οὐ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται, ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. μὴ ἔστω δὲ παράλληλος τῇ AE, ἀλλ' ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ AE κατὰ τὸ E. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει ἐπὶ τὰ μέρη, ἐφ' ἃ ἐστὶ τὸ E, φανερόν· εἰ γὰρ τῇ AE συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν. λέγω, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ MA καὶ τεταγμένως ἡ HZ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ BAZ, καὶ παρατεταγμένως ἡ BK συμπιπτέτω τῇ ΔΓ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ZAB τῷ ἀπὸ ΑΔ, ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς ΑΔ, ἡ ΔA πρὸς AZ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ BΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔZ ἐστίν, ὡς ἡ BA πρὸς ΑΔ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ZΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐπεὶ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ BAZ, ἔστιν ὡς ἡ BA πρὸς AZ, οὕτως τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔZ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔZ, οὕτως τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH, ὡς δὲ ἡ AB πρὸς AZ, οὕτως τὸ ὑπὸ BAM πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH, οὕτως τὸ ὑπὸ BAM πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ὑπὸ BAM, οὕτως τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM. τὸ δὲ ἀπὸ ZH ἴσον τῷ ὑπὸ ZAM διὰ τὴν τομήν· καὶ τὸ ἀπὸ BΓ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BAM. πλαγία δὲ ἡ AM, παρατεταγμένως δὲ ἡ BΓ. ἡ ἄρα τομὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ συμπίπτει τῇ τομῇ ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Γ. Ἐὰν εὐθεῖα

ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἐτέρας τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεΐα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ^[35]

1 28 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν ἡ AB διάμετρος, καὶ τῆς A τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἐτέρας τομῆς τὸ E, καὶ διὰ τοῦ E τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ EZ. λέγω, ὅτι ἡ EZ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ AB διαμέτρῳ, καὶ ἐστὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ EZ, ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ· συμπίπτετω κατὰ τὸ H, καὶ τῇ HB ἴση κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ZE παράλληλος ἦχθω ἡ ΘΚ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ, καὶ τῇ ΛΘ ἴση κείσθω ἡ ΗΜ, καὶ παρατεταγμένως ἦχθω ἡ ΜΝ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΗΝ, καὶ μία εὐθεΐα ἐστὶν ἡ ΑΜ, ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΚΘΛ τρίγωνον τῷ ΗΜΝ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΝ ἴσον ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΒΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΑΜ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΑ τῷ ὑπὸ ΑΜΒ. ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ. καὶ ἐστὶν, ὥς τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. τὸ Ν ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστὶν. ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ Ν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεΐα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν, ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὴν ἐτέραν τομὴν. ^[30]

1 29 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΓΔ τεμνέτω τὴν ΑΔ τομὴν. λέγω, ὅτι καὶ τὴν ἐτέραν τομὴν τεμεῖ. τεταγμένως γὰρ κατήχθω ἡ ΕΔ, καὶ τῇ ΑΕ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τεταγμένως ἦχθω ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΒΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὥς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ τῷ ἀπὸ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΖΗ, καὶ εὐθεΐα ἐστὶν ἡ ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ ΕΔ τῇ ΖΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εὐθεΐα ἐστὶ. καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τεμεῖ καὶ τὴν ἐτέραν τομὴν. Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις εὐθεΐα ἀχθῇ ἐφ' ἐκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον. ^[15]

1 30 ἔστω ἔλλειψις ἢ ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἦχθω τις εὐθεΐα ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ. ἦχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὥς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. καὶ ἐναλλάξ, ὥς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· ἐναλλάξ ἄρα, ὥς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. καὶ ὥς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τῷ ἀπὸ ΑΓ τὸ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ ΖΓ τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἴση ἄρα ἡ ΖΓ τῇ ΓΗ. καὶ εἰσι παράλληλοι αἱ ΔΖ, ΗΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἵδους ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἵδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσέσῃ εὐθεΐα πρὸς τὴν τομὴν, προσεκβληθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς κατὰ τὰ ἐπόμενα μέρη τῆς τομῆς. ^[5]

1 31 ἔστω ὑπερβολή, ἥς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ὃν τι τὸ Γ μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τὴν ΓΒ τῆς ἡμισείας τῆς AB, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεΐα πρὸς τὴν τομὴν ἡ ΓΔ.

λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς ὡς ἡ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΘ, καὶ ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΕΗ τῇ ΔΘ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ διὰ τὴν τομὴν, τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. ἐναλλάξ ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔΕ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς ἐντὸς ἄρα. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τινος τῶν ἐπὶ τῆς ΑΓ σημείων πολλῶ μᾶλλον ἐντὸς πεσεῖται, ἐπειδὴ καὶ τῆς ΓΔ ἐντὸς πεσεῖται. Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεία παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάπτεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. ^[30]

1 32 ἔστω κώνου τομὴ πρότερον ἢ καλουμένη παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρατεταγμένως ἦχθω ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΗΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΖΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ. πεποιήσθω οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος ἦχθω τῇ ΕΔ ἡ ΘΑΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΘ, καὶ ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΖΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΘΑ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ. ἴση ἄρα ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΖ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρατεταγμένως ἦχθω ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως ἀπ' αὐτοῦ κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΜ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΜ, πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΝ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΝ τεμνέτω τὴν ΖΜ κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ τῇ ΖΑ παράλληλος ἦχθω ἡ ΞΘ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΑΓ ἡ ΘΑΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΝ, ἔστιν ὡς ἡ ΝΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ. ^[45]

1 32 (50) ὡς ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· μέση ἄρα ἀνάλογόν ἐστίν ἡ ΚΘ τῶν ΞΘΑ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ ἴσον διὰ τὴν τομὴν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς, ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ^[5]

1 33 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν,

πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἡ ΒΕ πρὸς ΔΕ, ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΔ, τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐναλλάξ ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴσης γὰρ οὔσης τῆς ΑΕ τῇ ΕΔ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΑΔ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ τοῦ ἀπὸ ΒΑ ἐστὶν ἔλασσον· τῆς γὰρ ΑΒ οὐκ ἐστὶ διχοτομία τὸ Ε σημεῖον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ ἐντὸς πίπτει τῆς τομῆς· ἐφάπτεται ἄρα. Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἵδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχη τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα, ἢ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ^[5]

1 34 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ὡς ἡ ΕΓΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΖΘ, καὶ ἦχθωσαν διὰ τῶν Α, Β τῇ ΕΓ παράλληλοι αἱ ΑΛ, ΒΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΔΓ, ΒΓ, ΗΓ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Μ, Ξ, Κ σημεία. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΑΝ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΞ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΞΝ, ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΑΝ, ἡ ΒΚ πρὸς ΝΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ τῇ ΝΞ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΝΞ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΑΟΞ. ἡ ΝΞ ἄρα πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. ἀλλ' ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΜ· ἡ ΚΒ ἄρα πρὸς ΒΜ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ. ὥστε τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΝΑΔ τριγώνων, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ἐναλλάξ τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ^[45]

1 34 (50) οὐκ ἄρα ἡ ΕΓ τέμνει τὴν τομὴν· ἐφάπτεται ἄρα. Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἢ ἀπὸ τῆς ἀφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. ^[5]

1 35 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΒ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἄνισος αὐτῇ, καὶ τῇ ΑΗ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ὅπερ ἀδύνατον· δυεῖν γὰρ ἔσται εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἴση ἄρα. λέγω δὲ, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτέτω ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΗΔ ἴση κείσθω

ἡ HE, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ EZ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς. ὥστε συμπεσεῖται τῇ ΔΓ, καὶ δυεῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηται τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἵδους πλευρᾶς, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἐτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἐτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἕτερα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. ^[10]

1 36 ἔστω ὑπερβολῆς ἢ ἐλλειψὶς ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ AB, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BE πρὸς EA, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν, ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, ἡ BH πρὸς HA, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ HZ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα συμπεσεῖται τῇ ΓΔ. δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον. λέγω, ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπίπτει ὡς ἡ ΓΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ, ἡ BH πρὸς HA, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ HZ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΘΓ. δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔσται· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον, ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ^[10]

1 37 ἔστω ὑπερβολῆς ἢ ἐλλειψὶς ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐφαπτομένη ἡχθω ἡ ΓΔ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΕ, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Z. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔZE τῷ ἀπὸ ZB, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΕ, ἔσται, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν, ὡς συναμφοτέρως ἡ ΑΔ, ΔΒ πρὸς ΔΒ, οὕτως συναμφοτέρως ἡ ΑΕ, ΕΒ πρὸς ΕΒ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση· ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἐροῦμεν· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΕ, ΕΒ ἡμίσειά ἐστὶν ἡ ZE, τῆς δὲ AB ἡ ZB· ὡς ἄρα ἡ ZE πρὸς ΕΒ, ἡ ZB πρὸς ΒΔ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ EZ πρὸς ZB, ἡ ZB πρὸς ZΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ EZΔ τῷ ἀπὸ ZB. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ZE πρὸς ΕΒ, ἡ ZB πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ AZ πρὸς ΔΒ, ἐναλλάξ, ὡς ἡ AZ πρὸς ZE, ἡ ΔΒ πρὸς BE· συνθέντι, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς EZ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ AEB ἴσον τῷ ὑπὸ ZED. ἔστι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ZED πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΔ, ΔΒ ἡμίσειά ἐστὶν ἡ ΔZ, τῆς δὲ AB ἡμίσειά ἐστὶν ἡ ZB· ὡς ἄρα ἡ ZΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ZB πρὸς BE. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΔZ πρὸς ZB, ἡ BZ πρὸς ZE. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔZE τῷ ἀπὸ BZ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔEZ καὶ τῷ ἀπὸ ZE, τὸ δὲ ἀπὸ BZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AEB μετὰ τοῦ ἀπὸ ZE. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ EZ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ λοιπῷ τῷ ὑπὸ AEB ἴσον ἔσται. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ

τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἐτέρᾳ διαμέτρῳ, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου τετραγώνῳ, μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ ὀρθία τοῦ εἵδους πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. ^[10]

- 1 38 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΗΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΗΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ ΕΛΖ συμπίπτουσα τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ ΑΒ ἢ ΘΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. ἤχθω τεταγμένως ἡ ΜΕ· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ἐστὶν ὡς ἡ πλαγία ἡ ΒΑ πρὸς ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· καὶ τὰ τέταρτα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΜ πρὸς ΜΕ, τουτέστι πρὸς ΗΘ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΛΜ πρὸς ΜΕ. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ λόγος συνῆπται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΛ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΛ, τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΜΗΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΗΛ τῷ ἀπὸ ΗΑ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΗΜ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΕ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΘΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. ^[45]

- 1 38 (50) Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἡ μεταξὺ τοῦ ἐτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἐτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ. καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων· ἐστὶ δὲ διπλασία τῆς ΗΖ συναμφοτέρως ἡ ΓΖ, ΖΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΗ τῇ ΗΔ, τῆς δὲ ΗΓ διπλασία ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα συναμφοτέρως ἡ ΓΖΔ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. φανερόν δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὅτι ἡ ΕΖ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἐάν τε ἴσον ᾗ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἐάν τε λόγον ἔχη τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ τὸν εἰρημένον· δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφέρειας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστὶν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἔξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἵδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. ^[10]

- 1 39 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἐφαπτομένη ἡχθῶ τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθῳ ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ἐτέραν τῶν ΖΕ, ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ

ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ. ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΕΓ, Η. καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, Η πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τουτέστιν ἡ Η πρὸς ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ἔστιν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΕΓ, ἡ Η πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς Η καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ Η πρὸς ΕΔ, ἀλλ' ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς Η, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς ΔΕ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν καὶ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστὶν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἔξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην. ^[10]

1 40 ἔστω ὑπερβολῆς ἢ ἑλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖΓ, δευτέρα δὲ ἡ ΔΖΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἡχθῶ ἡ ΘΛΑ, καὶ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘΗ, ΖΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἡ ἑτέρα τῶν ΘΗ, ΖΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἔστω τῷ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ὑπὸ ΘΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τουτέστιν ἡ Κ πρὸς ΑΗ, ἔστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς Κ καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ Κ πρὸς ΗΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΗΑ πρὸς Κ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ Κ πρὸς ΗΖ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΑ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΘΗΖ τῷ ὑπὸ ΑΗ, Κ, ἡ ΑΗ ἄρα πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΗΘ πρὸς ΗΑ. Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀναγραφῇ εἴδη παραλληλόγραμμα ἰσογώνια, ἔχη δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἶδει ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδους τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἶδει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδους ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἶδει.

[15]

1 41 ἔστω ὑπερβολῆς ἢ ἑλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τεταγμένως κατήχθῶ ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΓΔ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ ΑΖ, ΔΗ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχτω λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΖ, ΗΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ ὅμοιον τῷ ΑΖ μετὰ τοῦ ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ. πεποιήσθω γάρ, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΘ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ τῷ ὑπὸ ΔΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἔτι δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ.

κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΓΘ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ λόγος λοιπῷ τῷ τῆς ΘΓ πρὸς ΓΗ λόγῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, ὥς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΓΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΒΔΑ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ἐναλλάξ, ὥς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ^[45]

1 41 (50) ὥς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ, τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΑ· ἰσογώνια γάρ ἐστι καὶ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς ΗΓ πρὸς ΑΕ καὶ τῆς ΓΔ πρὸς ΕΖ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ΗΔ πρὸς ΑΖ. λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς [ὥς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἓν] ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· ὥς ἄρα τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. τὸ ἀπὸ ΕΔ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΗΔ, ΑΖ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ὥς ὅλον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς ὅλον τὸ ΑΖ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΗ, καὶ λοιπὸν ἐστὶ πρὸς λοιπόν, ὥς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, λοιπὸν ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ. ἀλλ' ὥς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ τῇ ὑπεροχῇ, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ. μετὰ τοῦ ΔΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ. Ἐὰν παραβολῆς εὐθεΐα ἐπιψάουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς εὐθεΐα καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεΐαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἀφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπὸ τε τῆς ἀπὸ τῆς ἀφῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς. ^[5]

1 42 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΘ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τ υ χόντος κατήχθω ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΖ ἡ ΓΗ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΘΓ ἡ ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ. ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΘΒ. τὸ ΑΘΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ διὰ τὴν τομήν, ἀλλ' ὥς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, ὥς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον, ἔστιν ἄρα ὥς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΗ παραλληλόγραμμον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν, ὥς τὸ ΑΘΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεΐα ἐπιψάουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ εὐθεΐα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένη εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῶσι δύο εὐθεΐαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἀφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, οὗ ἀποτεμένει τριγώνου ἢ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας

μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ. ^[15]

1 43 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ τῇ ἐφαπτομένην παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΚ, διὰ δὲ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΛ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΓΑΒ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΚΘ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΕΔ, κατηγμένη δὲ ἐστὶν ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὥς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ· ἔξει ἄρα ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΒΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι τὸ ΓΚΜ τρίγωνον τοῦ ΒΓΛ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΘΚ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται. Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἐτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένη εὐθείᾳ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς, οὗ ἔτυχε σημείου, καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἀφῆς τεταγμένως, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτεμένει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ. ^[10]

1 44 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AZ, BE, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΖΑ τομῆς τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΖΗ, τεταγμένως δὲ ἡ ΖΟ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΖ καὶ ἐκβεβλήσθω ὡς ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΟ παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ σημείον τι ἐπὶ τῆς BE τομῆς τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν τεταγμένως κατήχθω ἡ ΝΘ, τῇ δὲ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΘΚΝ τρίγωνον τοῦ ΓΜΘ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ. διὰ γὰρ τοῦ Ε τῆς BE τομῆς ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΕΔ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, BE, ὧν διάμετρος ἡ AB, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ, τῇ ΖΗ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἡ δὲ ΝΚ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΔ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΝΚ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ ἐστὶν ἡ BE, ἥς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ, καὶ τῇ ΕΞ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΛ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀφ' οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔΕ ἡ ΚΝ, τὸ ἄρα ΝΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΜΓ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΒΓΛ τριγώνῳ· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ μγ' θεωρήματι δέδεικται. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἐτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ληφθέντος δὲ, οὗ ἔτυχεν, ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτεμένει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μείζον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς. ^[15]

1 45 ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΑΘ, δευτέρα δὲ ἡ ΘΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν ΓΜΛ ἐφαπτόσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ ΓΔ ἤχθω παρὰ τὴν ΑΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΓ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθωσαν αἱ BE, BZ παρὰ τὰς ΛΓ, ΓΔ. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ BEZ τρίγωνον τοῦ ΗΘΖ μείζον ἐστὶ τῷ ΛΓΘ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΛΘ.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΓΚ, ΒΝ παρὰ τὴν ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΜ, κατῆκται δὲ ἡ ΓΚ, ἡ ΓΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ, καὶ τοῦ ὄν ἔχει τοῦ εἵδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· ὥς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΓΔ πρὸς ΔΛ· ἡ ΓΚ ἄρα πρὸς ΚΘ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἐστὶ τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ εἶδος, τὸ δὲ ΓΚΘ, τουτέστι τὸ ΓΔΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ, τουτέστι τῆς ΔΘ· τὸ ΓΔΛ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ΓΔΘ μετὰ τοῦ ΓΔΛ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΔΛ τρίγωνον τοῦ ΓΚΘ ἦτοι τοῦ ΓΔΘ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, διαφέρει δὲ καὶ τῷ ΓΘΛ τριγώνῳ, ἴσον ἄρα τὸ ΓΘΛ τρίγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ τριγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΖΕ τρίγωνον ὁμοίον ἐστὶ τῷ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ τῷ ΓΔΘ, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΖΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ κατηγμένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ· ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ. ^[45]

1 46 Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἀφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταῦτά τῇ τομῇ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει. ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΓΜ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΑΝΖΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΑΝ τῇ ΝΖ. ἤχθωσαν τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΚΖΗ, ΑΜΔ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΛΔ τρίγωνον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΕΖΗ τῷ ΒΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΜ παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ ΑΖΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΜΔΗΖΝ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΝ τρίγωνον τῷ ΑΜΝ ἴσον ἐστὶ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΚΖ τῇ ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΖΝ τῇ ΑΝ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταῦτά τῇ τομῇ, δίχα τεμεῖ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην. ^[5]

1 47 ἔστω ὑπερβολή ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τυχὸν ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΝΟΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ. κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΕΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ. διὰ τὰ δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγ' θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘΝΖ τρίγωνον τῷ ΑΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΑΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΕ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΕΟ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΕ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ. Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμῃ τὴν ἐτέραν τομήν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης. ^[5]

1 48 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΑΚ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ ἐστὶν ἴση. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΕΔ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΑΚ παράλληλός ἐστὶν. ὥστε καὶ τῇ ΝΗ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστὶν ἡ ΒΝΗ, ἥς κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ ἐπέζευκται ἡ ΓΕ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος τῇ ΔΕ ἦκται ἡ ΝΗ, διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ. Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἀφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμήμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ

μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἀφῆς πρὸς τὸ τμήμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεΐα τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς ἡγμένην εὐθεΐαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἀφῇ. ^[10]

1 49 ἔστω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΜΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΔΝ, τεταγμένως δὲ ἀνήχθω ἡ ΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, εὐθεΐα τις ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΚΛΠ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστιν ὅτι διαμέτρου οὔσης τῆς ΔΛ ὀρθία ἐστὶν ἡ Η. κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΞ, ΚΝΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τεταγμένως δὲ κατῆκται ἡ ΔΞ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΞ. ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΖΔ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΓΒ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΕΒΜΝ σχῆμα· τὸ ἄρα ΔΓΜΝ τετράπλευρον τῷ ΖΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΠΜ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΛΠΜΝ τετράπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΛΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δις ὑπὸ ΓΔΛ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δις ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεΐα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεΐα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεΐα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένην εὐθεΐα, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμήμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεΐα τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένην εὐθεΐαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τι χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἀφῇ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλον εἶδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἐλλείπον. ^[15]

1 50 ἔστω ὑπερβολή ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΓΚ, καὶ διὰ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΕΘ, καὶ γινέσθω, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΚ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΕΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΛΜΞ, τῇ δὲ ΒΗ ἡ ΛΡΝ, τῇ δὲ ΕΘ ἡ ΜΠ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ ΛΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ. ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΠ παράλληλος ἡ ΓΣΟ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΓ, ἡ ΕΣ πρὸς ΣΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΣ τῇ ΣΘ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καὶ ἐστὶ τῆς ΕΘ ἡμίσεια ἡ ΕΣ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ· ὡς ἄρα ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τῷ ΛΝΞ, κοινῶν ἀφαιρεθέντων ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου, τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. ^[45]

καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἢ τε ΜΞ πρὸς ΕΔ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς ΕΣ, οὕτως συναμφοτέρος ἡ ΜΞ, ΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλάξ, ὡς συναμφοτέρος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΞΜ, ΕΔ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφοτέρος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφοτέρον τὴν ΜΞ, ΔΕ, τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ, ὡς δὲ ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ, τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΣΕ τῇ ΣΘ ἴση, ἡ δὲ ΣΘ τῇ ΟΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ. Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψάουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἐτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένη εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ, ὡς τὸ τμήμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἀφῆς πρὸς τὸ τμήμα τῆς ἡγμένης διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἀφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖα τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἣτις ἂν ἐν τῇ ἐτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν προσπορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἀφῇ ὑπερβάλλον εἶδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσπορισθείσης εὐθείας. ^[15]

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἦχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἦχθω τεταγμένως ἡ ΒΛΗ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, εὐθεῖα τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ. ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ ΒΓ τομῇ παράλληλοι τῇ ΓΔ ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΓ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ ἀφῇ ὑπερβάλλοντα εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστὶν ἡ ΖΓ τῆς ΓΕ. λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐν τῇ ΖΑ τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς ΑΖ τομῆς ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΑΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΑΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΔ, ΜΖ, ἴση ἄρα καὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΜΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΕΜ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, τουτέστι τῆς ΜΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστὶν ἡ ΑΖ, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΑΝ, καὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΖΜ, ὅσαι ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλοι τῇ ΖΜ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΖ, δυνήσονται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς Κ εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ὑπερβάλλον εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ. Δεδειγμένων δὲ τούτων συμφανές, ὅτι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ ἐκάστη τῶν παρὰ τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον ἀπαγομένων εὐθειῶν διάμετρος ἐστὶν, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ τῇ ἐλλείψει καὶ ταῖς ἀντικειμέναις ἐκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ διότι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἐκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἶδει, ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἶδει,

καὶ διότι πάντα, ὅσα προδεδείκται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα συμπαραβαλλομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται. ^[60]

1 52 Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ καθ' ἐν σημεῖον πεπερασμένης εὐρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἥς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφή δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας, ἣτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἐτέρας τινὸς δοθείσης εὐθείας. ἔστω θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α, ἐτέρα δὲ ἡ ΓΔ τῷ μεγέθει, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω πρότερον ὀρθή· δεῖ δὴ εὐρεῖν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ παραβολήν, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κορυφή δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΓΔ, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, τουτέστιν ἵνα ἄξων ἡ ἢ ΑΒ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ εἰλήφθω τῆς ΓΔ τέταρτον μέρος ἡ ΓΗ, τῆς δὲ ΓΗ μείζων ἔστω ἡ ΕΑ, καὶ τῶν ΓΔ, ΕΑ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΑ, τὸ ἀπὸ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἡ τετραπλασία· καὶ τὸ ἀπὸ Θ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἑλαττόν ἐστὶν ἡ τετραπλάσιον. ἡ Θ ἄρα τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἡ διπλῇ· ὥστε δύο αἱ ΕΑ τῆς Θ μείζονες εἰσι. δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς Θ καὶ δύο τῶν ΕΑ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τοίνυν ἐπὶ τῆς ΕΑ τρίγωνον τὸ ΕΑΖ ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ Θ τῇ ΖΕ, καὶ ἦχθω τῇ μὲν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΚ, τῇ δὲ ΕΑ ἡ ΖΚ, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφή τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΑ κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΑΖΚ ἐπίπεδον. ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΚ. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παράλλῳ τῷ ΚΑ κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΜΖΝ ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ ΜΝ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθὸς ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὀρθὸς δὲ ἐστὶ καὶ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΞΛ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΚΖΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ ὀρθή ἐστὶν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΜΝ, ΑΒ. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΜΝΞ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθείαν τὴν ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὔσαν τῇ ΜΝ, ἡ κοινὴ ἐστὶ τομὴ τοῦ τε ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου ἡ ΑΒ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΚΜ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστὶ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ καταχθήσονται γωνία· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὔση τῇ ΑΒ.

[55]

1 52 (50) καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΓΔ, Θ, ΕΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΖΚ, ἡ δὲ Θ τῇ ΕΖ καὶ τῇ ΑΚ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΑΚ, ἡ ΑΚ πρὸς ΑΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΑΖ, τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΖΚ. ὀρθία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ια' θεωρήματι. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΕ, καὶ τῆς ΓΔ ἔστω ἡμίσεια ἡ ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἦχθω ἡ ΘΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΛ κάθετος ἦχθω ἡ ΑΛ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΛ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΕΛ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΚΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΚΜ. ^[5]

1 53 καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΚ, ΚΜ, τῆς μὲν ΚΛ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ Κ, τῆς δὲ ΚΜ μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς γεγράφθω παραβολή, ἥς διάμετρος ἡ ΚΛ, κορυφή δὲ τὸ Κ, ὀρθία δὲ ἡ ΚΜ, ὡς προδεδείκται· ἥξει δὲ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΛ τῷ ὑπὸ ΑΚΜ, καὶ ἐφάψεται

τῆς τομῆς ἡ ΕΑ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΚ τῇ ΚΛ. καὶ ἐστὶν ἡ ΘΑ τῇ ΕΚΛ παράλληλος· ἡ ΘΑΒ διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς, αἱ δὲ ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΕ δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς ΑΒ. καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΑΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΖ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Α, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘΕ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ. ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΕΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΘΑ διπλῇ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ. διὰ δὲ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μθ' θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ ΓΔ. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῆς ἐτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταῦτα τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ εὐρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος εἴη τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἣτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείᾳ, δυνήσεται παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ἐτέραν εὐθεῖαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ ὑπερβάλλον εἶδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν. ^[10]

1 54 ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ· δεῖ δὴ εὐρεῖν ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒΓ ἐπιπέδῳ ὑπερβολὴν, ἥς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Β, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΒΔ ἐν τῇ δοθείᾳ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΒΓ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Β ὑπερβάλλοντα εἶδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ. ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι πρὸς τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου τὸ ἐν τῷ ΑΖΒ μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΕΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΛ. εἰ μὲν οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα, εἰ δὲ μὴ, γινέσθω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΚΛ τὴν ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΜΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΕΖ, ΖΒ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΒΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΕ τῇ ὑπὸ ΑΞΒ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΖΒ τῇ ὑπὸ ΞΒΖ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΞΒΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΞΒ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν ΒΞ διάμετρον κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ ΒΖΞ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθός· ἴση γὰρ ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ΒΖ, ΖΞ, ΜΖ, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΒΞ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΗΠΡ· ὥστε διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου ἡ ΗΘ. κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ ΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ ΠΔΡ· ἔσται δὴ ἡ ΠΔΡ πρὸς ἐκάτεραν τῶν ΗΘ, ΔΒ ὀρθή· ἐκάτερος γὰρ τῶν ΞΒ, ΘΗ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ΖΗΘ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΠΔΡ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ΖΗΘ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. ^[55]

1 54 (50) καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ κατ' εὐθεῖαν τὴν ΠΔΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΗΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συμπίπτει τῇ ΗΖ κατὰ τὸ Α, ὑπερβολὴ ἄρα ἔσται ἡ τομὴ διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΠΒΡ, ἥς κορυφὴ μὲν ἐστὶ τὸ Β σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΠΔΡ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΕΝΖ τῷ ὑπὸ ΑΝΒ· ὡς ἄρα ἡ

ΑΒ πρὸς ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ πρὸς ΝΖ καὶ τῆς ΒΝ πρὸς ΝΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΝ πρὸς ΝΖ, ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ· ἡ ἄρα ΑΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΖΟ τῇ ΑΔ· πλαγία μὲν ἄρα πλευρά ἐστὶν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ ἰβ' θεωρήματι δέδεικται. Μὴ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΘ· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολήν, ἥς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν τῇ ὑπὸ ΘΑΒ γωνίᾳ καταχθήσονται. ^[5]

1 55 τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἦχθω τις εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τῶν ΖΔΘ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΔΛ, καὶ κείσθω τῇ ΔΛ ἴση ἡ ΔΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛΖΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω τῇ ΚΖ ἡ ΛΝ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν ΚΛ, ΛΝ γεγράφθω ὑπερβολή, ἥς πλαγία μὲν πλευρά ἔσται ἡ ΚΛ, ὀρθία δὲ ἡ ΛΝ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς τομῆς ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται πλάτη ἔχουσαι τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Λ ὑπερβάλλοντα εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΚΛΝ· ἔξει δὲ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α· ἴσον γάρ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΖ τῷ ὑπὸ ΛΖΜ. καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς ἡ ΑΘ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΖΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΛ. ὥστε ἡ ΑΒ διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, τουτέστι τὴν ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἕκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ ὁ αὐτός ἐστὶ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. κοινὸς ἀφηρήσθω ὁ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾗ, παρ' ἣν δύνανται ἐστὶν ἡ ΑΓ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν' θεωρήματι. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις εὐρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἐτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἥς κορυφὴ ἔσται τὸ πρὸς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν γωνίᾳ δοθείᾳ δυνήσονται τὰ παρακείμενα ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἐτέραν εὐθείαν πλάτος ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλείποντα εἶδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ. ^[10]

1 56 ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν μείζων ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ γράψαι ἔλλειψιν, ἥς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν δεδομένη γωνίᾳ καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΑΓ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Α ἐλλείποντα εἶδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ. ἔστω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἐν αὐτῷ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμήμα κύκλου γεγράφθω τὸ ΑΔΒ, οὗ διχοτομία ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ο τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ καὶ συμπίπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείᾳ κατὰ τὸ Ε· ἔσται δὴ,

ὥς ἡ AB πρὸς AG, ἡ BA πρὸς AE, τουτέστιν ἡ ΔΑ πρὸς ΑΟ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ. καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ, ZB καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΑ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΔΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΛ καὶ συμπιπτέτω τῇ AB ἐκβληθείῃ κατὰ τὸ Κ· ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΖΟ καὶ συμπιπτέτω τῇ HK κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ γωνία δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΖΔΑ, ΖΑΔ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΑ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΒΑ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. ἔστι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΛΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΑ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΒ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΘ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. γεγράφθω δὲ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ ὀρθὸς πρὸς τὸ ΘΗΖ τρίγωνον, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Ζ σημεῖον· ἔσται δὲ ὁ κῶνος ὀρθὸς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΗΖ τῇ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΗΘΝ κύκλος ὀρθὸς ἐστὶ πρὸς τὸ ΘΗΖ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔσται. ^[45]

1 56 (50) ἔστω δὲ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ· ἡ ΚΜ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΗΘΖ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἐτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΚ, ΚΜ, ὅ ἐστι τὸ ὑποκείμενον, κατ' εὐθείαν τὴν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ταῖς ΖΗ, ΖΘ πλευραῖς τοῦ κῶνου, ἡ ἄρα γινομένη τομὴ ἔλλειψίς ἐστὶν, ἥς διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθῆσονται ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, ὥς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΗ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΘ, ὅς ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ· ὥς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ, τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΛΘ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾗ, ὀρθία τοῦ εἶδους πλευρά ἐστὶν ἡ ΑΓ, ὥς δέδεικται ἐν τῷ ιγ' θεωρήματι. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ ΑΒ ἐλάσσων τῆς ΑΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν ΑΓ. ^[75]

1 57 τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ τῇ ΔΕ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΗ, καὶ πεποιήσθω, ὥς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ἀπὸ ΕΖ, ἔστιν ὥς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὥς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὥς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. τὸ δὲ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΔΕ· ὥς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ, τὸ ὑπὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. δύο οὖν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων καὶ μείζονος οὕσης τῆς ΕΖ γεγράφθω ἔλλειψις, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΕΖ, ὀρθία δὲ ἡ ΖΗ· ἥξει δὲ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ εἶναι ὥς τὸ ὑπὸ ΖΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ· ἐλεύσεται οὖν καὶ διὰ τοῦ Β. γέγραπται οὖν ἔλλειψις περὶ τὴν ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὥς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΔΒ, ὥς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. ὥστε ὀρθία ἐστὶν ἡ ΑΓ. Ἀλλὰ δὲ μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΕ, καὶ ἐν αὐτῷ τῇ ΑΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΗ ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τῶν ΔΕΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΕΘ, καὶ τῇ ΕΘ ἴση κείσθω ἡ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΘΖΛ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΘΖ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΘΜΕ παράλληλος γινομένη τῇ ΑΖΛ· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ. ^[10]

1 58 καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν ΚΘ, ΘΜ γεγράφθω ἔλλειψις, ἥς διάμετρος πλαγία ἡ ΚΘ, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ ΘΜ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘΚ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθῆσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΖΑ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘΕ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β ἡ τομὴ, καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ ΑΕΒ. καὶ ἐφάπεται τῆς τομῆς ἡ ΔΑ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΔΕΖ τῷ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ καὶ τοῦ τῆς διπλασίας τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τούτου τοῦ λόγου ἔσται ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΞΑ πρὸς ΑΝ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἵδους πλευρὰ ἐστὶν ἡ ΑΓ. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμένων εὑρεῖν ἀντικειμένας, ὧν διάμετρος ἐστὶ μία τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, κορυφὴ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ἑτέραν παρακείμενα καὶ ὑπερβάλλοντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ. [5]

1 59 ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμέναι αἱ ΒΕ, ΒΘ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Η· δεῖ δὴ γράψαι ἀντικειμένας περὶ μίαν τῶν ΒΕ, ΒΘ, ὥστε τὰς καταγομένας κατάγεσθαι ἐν γωνίᾳ τῇ Η. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΕ, ΒΘ γεγράφθω ὑπερβολή, ἥς διάμετρος ἔσται πλαγία ἡ ΒΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ ΘΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΕ καταχθῆσονται ἐν γωνίᾳ τῇ Η, καὶ ἔστω ἡ ΑΒΓ· τοῦτο γὰρ ὡς δεῖ γενέσθαι, προγέγραπται. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΚ ἴση οὔσα τῇ ΒΘ, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ ΔΕΖ, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΒΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ ΕΚ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθῆσονται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῇ Η. φανερόν δὴ, ὅτι αἱ Β, Ε εἰσιν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἐστὶ, καὶ αἱ ὀρθαὶ ἴσαι. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομάς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος. [5]

1 60 ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας αἱ ΑΓ, ΔΕ· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὧσιν αἱ ΑΓ, ΔΕ συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τὸ τῶν περὶ τῆς ΑΓ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ ΑΓ τὸ τῶν περὶ τὴν ΔΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΛ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω ἡ ΑΓ τῇ ΓΑ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν ΑΓ, ΓΛ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, ὧν διάμετρος μὲν ἔσται πλαγία ἡ ΓΑ, ὀρθία δὲ ἡ ΓΛ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ καταχθῆσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ ἔσται δὴ ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων μέσον τε γὰρ λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἵδους πλευρῶν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην οὔσα δίχα τέτμηται καὶ τὸ Β. ἔστω δὴ πάλιν τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΔΖ πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΔΖ τῇ ΔΕ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων τῶν ΕΔ, ΔΖ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΜΑΝ, ΟΕΞ, ὧν διάμετρος μὲν πλαγία ἡ ΔΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἡ ΔΖ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν καταχθῆσονται ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ· ἔσται καὶ τῶν ΜΑΝ, ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ. ὥστε ἡ μὲν ΑΓ τὰς τῇ ΔΕ παραλλήλους μεταξὺ τῶν ΖΑΗ, ΘΓΚ τομῶν δίχα τέμνει, ἡ δὲ ΔΕ τὰς τῇ ΑΓ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. καλείσθωσαν δὲ αὗται αἱ τομαὶ συζυγεῖς. Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν. [30]

Εἰ ὑγιαίνεις, ἔχοι ἂν καλῶς· καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω. Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρὸς σε κομίζοντά σοι τὸ β' βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου· καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβάλη εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μεταδὸς αὐτῷ, καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ, ἵνα ὑγιαίνης. εὐτύχει. Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένη τὸ τέταρτον τοῦ εἵδους, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ. ^[5]

- 2 1 ἔστω ὑπερβολή, ἥς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, ὀρθία δὲ ἡ BZ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΕ, καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ABZ εἵδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ AB πρὸς BZ, τὸ ἀπὸ AB πρὸς τὸ ὑπὸ ABZ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπὸ AB τέταρτον μέρος τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ABZ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς BZ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ AB πρὸς BZ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ. Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

[25]

- 2 2 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΒΘ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὲ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστίν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΚΗ μεῖζόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ AB πρὸς BZ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς BZ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΑΚ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΜΚΗ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ τῷ ὑπὸ ΜΚΗ ὅπερ ἄτοπον· μείζων γὰρ αὐτοῦ δέδεικται. οὐκ ἄρα ἡ ΓΘ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ. Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσύμπτωτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἀφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἵδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἀγομένην διαμέτρῳ. ^[5]

- 2 3 ἔστω ὑπερβολή ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ συμπεσεῖται ταῖς ΖΕ, ΕΗ. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΔ διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἵδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΚ. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΖΕ, ΕΗ ἀσύμπτωτοι. ἡ ἄρα ΚΘ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ΕΖ, ΕΗ ἀσύμπτωτοις κατὰ τὰ Ζ, Η. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἵδους. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τῷ τετάρτῳ τοῦ εἵδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ. ἀσύμπτωτοι

ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ἀφ' ἐκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἵδους. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν, ὥστε ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας. ^[30]

- 2 4 ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ δεδοσθω σημείον τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ τὰς ΓΑΒ γράψαι εἰς ἀσυμπτώτους ὑπερβολὴν. ἐπεξεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέντω τὸ ὑπὸ ΔΕ, Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η ὑπερβάλλοντα εἶδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἐκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἵδους. αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς. Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἢ διάμετρος εὐθεϊάν τινα τέμνη δίχα, ἢ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψάουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ. ^[20]
- 2 5 ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἥς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ, ἦχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ ἴσην ποιούσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ. εἰ γὰρ μή, ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΘΑ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἐστὶν ἡ ΑΒΓ, ἥς διάμετρος μὲν ἡ ΔΕ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΖΗ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ. ἡ ἄρα ΑΘ τῇ ΚΕ παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ. Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεϊάν τινα δίχα τέμνη μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν, ἢ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψάουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ. ^[15]
- 2 6 ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ε. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΖΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς ΑΒ τομῆς, ἡ ΓΖ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ, εἴτε μὴ ἐστὶν, ὑποκείσθω τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΑΒ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτη παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ καὶ δίχα τμηθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. ^[20]
- 2 7 ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΖΗ, καὶ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΒΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΒΕ διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. μὴ γάρ, ἀλλὰ, εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ· ὅπερ ἄτοπον· γὰρ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΕ. Ἐὰν ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεία, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ αἱ ἀπολαμβάνομεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται. ^[10]
- 2 8 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ τῇ ΑΒΓ συμπίπτέτω τις ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔΗ. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι

τῇ ΑΓ. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ. συμπίπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ· καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ. Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς, καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἄπτεται τῆς τομῆς. ^[15]

2 9 εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑΔ ἀσυμπώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω, ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἄπτεται τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπτέσθω κατὰ τὸ Β. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΔ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον ἄπτεται τῆς τομῆς. Ἐὰν εὐθεῖα τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἐκατέρᾳ τῶν ἀσυμπώτων, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπώτων καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἡγμένην εὐθεῖαν. ^[5]

2 10 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΔΖ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπώτους, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΘ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΘΕΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΜ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΘ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΜ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΖ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΔΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΔΓΖ τῷ ἀπὸ ΒΛ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΚΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ὑπὸ ΖΓΔ. Ἐὰν ἐκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἡγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν. ^[5]

2 11 ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διὰ τινος σημείου τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν συμπίπτει τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν· ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη ὡς ἡ ΑΒ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. συμπίπτέτω κατὰ τὸ Η. λέγω δὲ, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ. ἔστω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΗΚ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ. Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπώτους ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς β εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν, αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

[10]

2 12

ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ AB, BG, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς AB, BG κατήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ταῖς ΕΔ, ΔΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΔΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΘ πρὸς ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ. Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. ^[20]

- 2 13 ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, AB, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ. εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς ΓΑ, AB ἤχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΘ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὲ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΓΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΚΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΛΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ· ὅπερ ἀδύνατον· μείζων γάρ ἐστι καὶ ἡ ΚΛ τῆς ΕΖ καὶ ἡ ΛΑ τῆς ΑΕ. συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΖ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Μ. λέγω δὴ, ὅτι κατ' ἄλλο οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν τῇ ΓΑ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΝΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΝΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ. Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνουῦνται διάστημα. ^[20]

- 2 14 ἔστω ὑπερβολή, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ AB, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ. λέγω, ὅτι αἱ AB, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίζονται διάστημα τοῦ Κ. ἤχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΘ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ. μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΓΗ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἐλάττονές εἰσιν. εἰλήφθω δὲ τοῦ Κ διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΝ· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝΒ. ἡ ἄρα ΜΝ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΛ καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς Κ. πόρισμα. ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτῶτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ AB, ΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ τῆς ὑπὸ ἐτέρων ἀσυμπτῶτων τῇ τομῇ περιεχομένης. Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναὶ εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι. ^[25]

- 2 15 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τῶν Α, Β τομῶν κοιναὶ εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι. ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΑΕ, ΖΒΗ· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. ἀπειλήφθω δὲ ἐκάστη τῶν ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν AB εἵδους· ἴσαι ἄρα αἱ ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ. ἐπεξεύχθωσαν δὲ αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. φανερόν δὴ, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΗ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστίν, ἥς διάμετρος ἡ AB, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐκατέρα τῶν ΔΑ, ΑΕ δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν AB εἵδους, ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τῇ Β ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΖΓ, ΓΗ. τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναὶ εἰσιν ἀσύμπτωτοι. Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἐκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς, συμπεσεῖται ἐκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβάνόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτῶταις ἴσαι ἔσσονται. ^[5]

ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ διήχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἢ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ' ἓν σημεῖον μόνον. ἐπεὶ γὰρ τῆς Α τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ διήκται τις εὐθεῖα ἢ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΓΖ, ἢ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β. συμπίπτει κατὰ τὰ Λ, Μ. ἦχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἢ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ὑπὸ ΘΜΚ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΚΜ. τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναὶ εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι. ^[20]

2 17 ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ὧν αἱ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι. ἦχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὸ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ, ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταὶ εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναὶ εἰσιν ἀσύμπτωτοι. Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον. ^[5]

2 18 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπίπτει ἢ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν Α, Β τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον. ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΗΘ, ΚΛ. ἢ ΕΖ ἄρα συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΚΛ. φανερόν οὖν, ὡς καὶ ταῖς Α, Β τομαῖς συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον. Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψάουσα, ἥς ἔτυχε τῶν τομῶν, συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἀφήν. ^[15]

2 19 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἢ ΕΓΖ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ. ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν· συμπίπτει κατὰ τὰ Η, Θ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ. ἦχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ. ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΘ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ, καὶ ὅλη ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἀφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν, ἢ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἡγμένη, αἱ δὲ διὰ τῶν ἀφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων. ^[5]

2 20 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ τῆς Α τομῆς ἦχθω ἐφαπτομένη ἢ ΕΖ καὶ ἐκβληθεῖσα συμπίπτει τῇ ΓΧ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ ΕΖ παράλληλος ἦχθω ἢ ΧΗ, καὶ διὰ τοῦ Η ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἦχθω ἢ ΘΗ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΧΕ, αἱ δὲ ΗΟ, ΕΞ συζυγεῖς εἰσὶ διάμετροι. ἦχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΚΕ, ΗΛ, ΓΡΠ, παρ' ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι, ἔστωσαν αἱ ΑΜ, ΓΝ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΗΛ πρὸς ΛΧ, καὶ ἡ ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὧν ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ

αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ λόγῳ· ἐκάστη γὰρ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ ἐκάστη τῶν ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ παράλληλός ἐστι. λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Κ, Λ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΚΧ τρίγωνον τῷ ΗΘΛ καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΚΧ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΚΧΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΧ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ. πεποιήσθω δὴ, ὡς ἡ ΠΗ πρὸς ΗΡ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρος ἐστὶν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἄγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ.

[45]

2 20 (50) διὰ δὲ τοῦτο ἐστὶν, ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ, ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΧ, τὸ ΧΤΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ. ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ, τὸ ΤΖΧ πρὸς τὸ ΧΗΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΧΕΖ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην· παράλληλος γάρ ἐστὶν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ, ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ὡς δὲ ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ· παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς ΘΗ, τῆς ΧΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, ὡς δὲ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΧ, τὸ ὑπὸ ΘΗΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΕΧ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ τῷ ἀπὸ ΕΧ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ Σ, ΗΧ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΗΟ εἵδους· ἢ τε γὰρ ΗΧ τῆς ΗΟ ἐστὶν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται· τὸ δὲ ἀπὸ ΕΧ τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΞ· ἴση γὰρ ἡ ΕΧ τῇ ΧΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἶδει. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΗΟ δύναται τὸ παρὰ τὴν ΕΞ εἶδος. αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτῶτων ἐστίν. [80]

2 21 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ, ὧν αἱ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ. λέγω, ὅτι τὸ Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτῶτι ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἵδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἵδους. ἐπεξεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτῶτι ἐστίν. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιοῦν τῶν τομῶν, καὶ αὐτὴ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτῶταις, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτῶτων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ. [5]

2 22 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΧΕΖ, ΧΗΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τὴν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτῶτους ἡ ΘΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ. τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ, ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη. καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἵδους. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἵδους ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ. Ἐὰν ἐν

ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου. ^[5]

- 2 23 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ πρὸς ὁποιοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω τις εὐθεΐα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἦχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομάς ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ. ἦχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι. καὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΚ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ. Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεΐαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας συμπτώσεων περιέχεται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεΐαι ἐκτὸς τῆς τομῆς. ^[15]
- 2 24 ἔστω παραβολῇ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΑΒΓΔ δύο εὐθεΐαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας συμπτώσεων περιεχέσθω. λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις. ἦχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν. συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς. Ἐὰν ὑπερβολῇ δύο εὐθεΐαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας συμπτώσεων περιέχεται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεΐαι ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας. ^[5]
- 2 25 ἔστω ὑπερβολῇ, ἥς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεΐαι τὴν τομὴν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας περιεχέσθω. λέγω, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας. ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΖ, ΑΘ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς ὑπὸ ΑΖΘ, ΑΘΖ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, κἂν ἐφαπτόμεναι ὥσι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ. Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἡ κύκλου περιφερεία δύο εὐθεΐαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ^[20]
- 2 26 εἰ γὰρ δυνατόν, ἐν ἐλλείψει ἡ κύκλου περιφερεία δύο εὐθεΐαι αἱ ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τὴν ΕΖ δίχα τέμνουσα, ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΓΔ. ὥστε καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΓΔ, ΕΖ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Ἐὰν ἐλλείψεως ἡ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεΐαι ἐπιψαύωσιν, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μὴ, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου. ^[5]
- 2 27 ἔστω ἔλλειψις ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ. ἐπεὶ γὰρ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α ἡ ΓΔ, ἡ ΓΔ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως κατηγμέναις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΖ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς. καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι. μὴ ἐρχέσθω δὴ ἡ ΑΒ διὰ τοῦ κέντρου, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἦχθω διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα

ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΓΔ. ἡ ἄρα ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, ἐν οἷς ἐστὶν ἡ ΑΒ. Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερεία δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα τις δίχα τέμνη, διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. ^[20]

- 2 28 ἐν γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ἐκβεβλήσθω. λέγω, ὅτι διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΖΘ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστὶ τῇ ΑΒ. ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστὶ τῇ ΓΔ. καὶ ἐστὶ διάμετρος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΔ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρος ἐστὶν ἡ ΗΘ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΕΖ. ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερεία δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. ^[15]
- 2 29 ἔστω κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφέρεια, ἥς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΓΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ, ἴση καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστὶ τῇ ΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΓ παράλληλος, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα παράλληλός ἐστὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη. ἴση ἄρα ἡ ΖΘ τῇ ΘΚ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα διάμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ. Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν. ^[20]
- 2 30 ἔστω κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΑ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΔΓ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΔ· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ ἔλλειψις ἐστὶν ἡ τομῇ, τὸ Α, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διαμέτροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός· ὅπερ ἀδύνατον· εἴτε παραβολή ἐστὶν ἡ τομῇ, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διαμέτροι· εἴτε ὑπερβολή ἐστὶ, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ ΒΑ, ΑΓ μὴ περιέχουσιν τὰς ἐαυτῶν συμπτώσεις, ἐντός ἐστὶ τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας· ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς κέντρον γὰρ ὑπόκειται διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔΑ, ΑΕ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἐκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταῦτα τῷ κέντρῳ. ^[20]
- 2 31 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ κατὰ τὰ Α, Β, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ. ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμενά εἰσι τομαί, ὧν διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Α, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ ΕΖ· παράλληλός ἐστὶν ἄρα ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ. μὴ ἔστω δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΑΗ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΚ· ἡ ΘΚ ἄρα παράλληλός ἐστὶ τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ ΕΖ, ΘΚ, συμπεσοῦνται ἄρα. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ ΘΚ τῇ ΓΔ· καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. καὶ φανερόν, ὅτι ἐπὶ ταῦτα τῷ κέντρῳ. Ἐὰν ἐκατέρα τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομήν γωνίας. ^[20]

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἦτοι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ἦτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ, καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. λέγω, ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας. ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ZH, ΘΚ· ἡ AB ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσύμπτωτοις. συμπίπτει κατὰ τὰ Θ, Η. καὶ ἐπεὶ ὑπόκεινται συμπίπτουσαι αἱ ZK, ΘΗ, φανερόν, ὅτι ἦτοι ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΘΛΖ γωνίαν τόπῳ συμπεσοῦνται ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΚΛΗ. ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἐφάπτωνται. Ἐὰν μὲν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ ἐτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων, ὧν ἔστιν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τὴν περιέχουσαν γωνίαν τὴν τομὴν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας. ^[5]

- 2 33 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὴν A τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ οὐ συμπίπτει τῇ B τομῇ. ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ EZ, ΗΘ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσύμπτωτοις. οὐ συμπίπτει δὲ κατ' ἄλλα ἢ τὰ E, Θ. ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ B τομῇ. καὶ φανερόν, ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται. ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον τῇ ἐτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται. Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ μέσῃ τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων. ^[15]
- 2 34 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς A ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ A, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ ἡ EZ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΗ διάμετρος ἔστι τῶν ἀντικειμένων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΑΘΚ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλος ἔστι τῇ ΓΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ παράλληλος ἔστι τῇ EZ· καὶ ἡ κατὰ τὸ Θ ἄρα ἐφαπτομένη παράλληλος ἔστι τῇ EZ. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ EK τῇ KZ· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ EH τῇ HZ ἔστιν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρος ἔστιν ἡ ΑΘ τῶν ἀντικειμένων. ἡ AB ἄρα. Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἐτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένη εὐθεῖα. ^[15]
- 2 35 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ AB τεμνέτω ἐν τῇ B τομῇ δίχα τὴν ΓΔ εὐθεῖαν κατὰ τὸ E. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλος ἔστι τῇ ΓΔ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ HZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση. παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ ΓΖ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει. οὐκ ἄρα παράλληλος ἔστιν ἡ ΔΖ τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΓΔ. Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὔσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων. ^[10]
- 2 36 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, EZ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρᾳ αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΘ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ διάμετρος ἔστι τῶν ἀντικειμένων. εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ ΗΚ. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλος ἔστι τῇ ΓΔ· ὥστε καὶ τῇ EZ. ἴση ἄρα ἔστιν ἡ EK τῇ KZ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΖ ἔστιν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ ΗΚ διάμετρος ἔστι τῶν ἀντικειμένων. ἡ ΗΘ ἄρα. Ἐὰν ἀντικείμενας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρος ἔστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγῆς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένη. ^[5]
- 2 37 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὰς A, B τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσα καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ E, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ XE,

καὶ διὰ τοῦ X τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἢ AB. λέγω, ὅτι αἱ AB, EX συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔX καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ EΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EX τῇ ZΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ BA ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ, ἴση ἄρα καὶ ἡ EX τῇ ZH· ὥστε καὶ ἡ ΓH ἴση τῇ ZH. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓZ· ὥστε καὶ τῇ EX. αἱ EX, AB ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύσιν συμπίπτουσαι, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ μέσῃ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγῆς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν. ^[5]

2 38 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓX, ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX. λέγω, ὅτι ἡ EX διάμετρος ἐστὶν ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγῆς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ EZ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Z· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔX τῇ EZ. συμπίπτέτω κατὰ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓZ τῇ τομῇ. συμβαλέτω κατὰ τὸ A, καὶ διὰ τοῦ A τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἢ AB. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐστὶν ἡ EZ, καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τέμνει. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῇ HB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓE τῇ ED, καὶ ἐστὶν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓZΔ, ἴση ἄρα καὶ ἡ AH τῇ HK. ὥστε καὶ ἡ HK τῇ HB ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ EZ διάμετρος ἔσται. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν. ^[20]

2 39 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τῶν A, B δύο εὐθεῖαι ἦχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓE, ED, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διάμετρος ἦχθω ἡ EZ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ ZΔ. εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HE· ἡ HE ἄρα διάμετρος ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ EZ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ E. ἡ ἄρα σύμπτωσης τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΓZ τῇ ZΔ. ἴση ἄρα. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσῃ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν. ^[5]

2 40 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τῶν A, B δύο εὐθεῖαι ἦχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓE, ED, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ E τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἢ ZEH, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZΘ, ΘH. λέγω, ὅτι αἱ ZΘ, ΘH ἐφάπτονται τῶν τομῶν. ἐπεζεύχθω ἡ EΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγῆς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ X, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἦχθω ἢ AXB· αἱ ΘE, AB ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓE συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ EXΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν AB εἵδους. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ZE, ἐπέζευκται δὲ ἡ ZΘ, διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ZΘ τῆς A τομῆς. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ HΘ ἐφάπτεται τῆς B τομῆς. αἱ ZΘ, ΘH ἄρα ἐφάπτονται τῶν A, B τομῶν. Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ^[25]

2 41 ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ταῖς A, B δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΓB, AΔ κατὰ τὸ E μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EX. ἦχθω διὰ τοῦ X τῇ BΓ παράλληλος ἢ XZ· ἡ XZ ἄρα διάμετρος ἐστὶ καὶ συζυγῆς τῇ EX. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EX. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΘK

τῇ ΑΔ ἢ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ· ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη· ὅπερ ἄτοπον· ἐδείχθη γὰρ καὶ συμπίπτουσα. οὐκ ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι τέμνουσι ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ^[15]

- 2 42 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς Α, Β, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΕΖ, ΗΘ κατὰ τὸ Κ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γάρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς Α, Β τομάς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ, καὶ φανερόν, ὅτι ἡ σύμπτωση αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΑΧΓ γωνίαν τόπῳ ἐστίν. οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὔσαι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνη κατὰ δύο σημεία, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τὴν τέμνουσαν ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τέμνουσαν, συζυγεῖς ἔσσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων. ^[20]
- 2 43 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖα τις κατὰ δύο σημεία τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ἐπεὶ γὰρ διάμετρος ἡ ΑΧ, καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει, ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τῇ ΓΧ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιὰς αὐτῶν τῆς Α ἤκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἤκται ἡ ΓΧ, αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδεδεικται. Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὐρεῖν. ^[20]
- 2 44 ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεία. δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὐρεῖν. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘ. ἀχθειςῶν δὲ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθειςῶν ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεία. ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΘΖΓ. συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεία, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὐρήσομεν διαμέτρους. Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὐρεῖν. ^[10]
- 2 45 τοῦτο δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται. Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὐρεῖν. ^[5]
- 2 46 ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἐφ' ἧς τὰ Ζ, Γ, Ε. δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὐρεῖν. ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστί, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὐ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ' αὐτὴν καθέτους δίχα τέμνει. αἱ δὲ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετοί εἰσιν· ὥστε ἡ ΓΔ τὰς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτους δίχα τέμνει. ἐὰν οὖν τάξω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔσται θέσει, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΑΒ ἤκται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. συντεθήσεται δὲ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολή, ἐφ' ἧς τὰ Ζ, Ε, Α, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΖ, φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν· εἰ δὲ οὐ, τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΓΔ ἄξων

ἐστὶ τῆς τομῆς παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν ΕΖ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων ἠϋρεται ὁ ΓΔ. καὶ φανερόν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται ὡς ὁ ΑΒ, ἔσται τῇ ΓΔ παράλληλος. καὶ τὴν ΕΖ τέμνει· ὥστε καὶ δίχα. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΖ· ὅπερ ἄτοπον. Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἡ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὐρεῖν. ^[30]

2 47 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὐρεῖν. εὐρήσθω καὶ ἔστω ὁ ΚΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ Κ· ἡ ἄρα ΚΔ τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἦχθω κάθετος ἡ ΓΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ. ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται θέσει δεδομένος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ. συντεθήσεται δὴ οὕτως ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ· εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, δύο ἄρα αἱ ΓΔΚ δύο ταῖς ΑΔΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση. ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ. ἦχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΜΚΝ· ἡ ἄρα ΜΝ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγῆς τῇ ΒΚ. Δεδειγμένων δὴ τούτων ἐξῆς ἔστω δεῖξαι, ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσὶν. ^[30]

2 48 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ ΚΗ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν ἀχθείσης καθέτου τῆς ΑΘ ἴση ἔσται ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ· ὥστε καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ ΚΓ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον. ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΓΡ, ΛΣ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΛ· ἐκ κέντρου γάρ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΚ τῷ ἀπὸ ΚΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ, τῷ δὲ ἀπὸ ΛΚ ἴσα τὰ ἀπὸ ΚΣ, ΣΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ τοῖς ἀπὸ ΛΣ, ΣΚ ἐστὶν ἴσα. ὧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΜ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΚΜ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ. ὧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δέ, ὅτι, ὧ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ· ὧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχὴ· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμὴ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις. Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἑν ἐπιψάουσαν τῆς τομῆς. ^[30]

2 49 ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἥς ἄξων ὁ ΒΔ. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, ὡς πρόκειται. τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἦτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστὶν ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ. ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α, καὶ γερονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ· καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ. καὶ ἐστὶ τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερόν δὴ, ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἔστω πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε, καὶ γερονέτω, καὶ ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ

κάθετος ἦχθω ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ. δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερόν δὴ, ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ. φανερόν δέ, ὅτι καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾗ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἔστω δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἦχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ. καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνήκται ἡ ΖΑ τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Γ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ. συντεθήσεται οὕτως· ἦχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΒΔ ἡ ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἡ ΖΗ ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλος ἦχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. φανερόν δὴ, ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα. Ἔστω πάλιν ὑπερβολή, ἥς ἄξων ὁ ΔΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΕ, ΘΖ. τὸ δὴ διδόμενον σημεῖον ἦτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ ἢ ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμπτῶτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΖΘΕ γωνίας. ^[45]

2 49 (50) ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς ὡς τὸ Α, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΗ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΑΔ, πλαγία δὲ τοῦ εἵδους πλευρὰ ἔστω ἡ ΒΓ· ἔσται δὴ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. λόγος δὲ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθεὶς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθεὶς. καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΗ. συντεθήσεται οὕτως· ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. πάλιν δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η, καὶ γεγονέτω, καὶ ἦχθω ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΑΔ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται, ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ. καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομὴ· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ, καὶ ὀρθὴ ἦχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΑΗ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας τόπῳ τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΑΘ ἴση ἡ ΘΝ· πάντα ἄρα δοθέντα. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΝ δοθεῖσα. ἦχθω δὴ τεταγμένως ἡ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΜΝ· ἔσται δὴ καί, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΛ δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΜΛ δοθεὶς. καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. καὶ [παρατεταγμένως] ἀνήκται ἡ ΜΑ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΛΒ τομὴ· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΚ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΘΛ ἴση κείσθω ἡ ΘΝ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη παράλληλος ἦχθω ἡ ΜΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· ἡ ΚΑ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ^[95]

2 49 (100) καὶ φανερόν, ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμπτῶτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ ἴση ἐστί. καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ΖΘ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΕΘ

παράλληλος ἦκται ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ ΖΑΕ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ τομή ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ΕΘ, ΟΖ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμπτόνων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΘ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΘΕ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΔΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΖΑΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἐξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γερονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΘ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ, ἔσται θέσει διάμετρος οὔσα συζυγῆς τῇ ΚΘ. κείσθω δὲ τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὲ διὰ τὸ εἶναι τὰς ΚΛ, ΒΗ συζυγεῖς διαμέτρους καὶ ἐφαπτομένην τὴν ΑΚ καὶ τὴν ΑΛ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΛ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΒΗ εἵδους. δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΘΛ. καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ ΚΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει καὶ ἐστὶ δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τὴν ΒΗ ἦκται ἡ ΛΑ· θέσει ἄρα ἡ ΛΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΑΚ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ τῇ ΚΘ παράλληλος ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρος ἐστὶ συζυγῆς τῇ ΚΘΛ. ^[145]

2 49 (150) κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ εἵδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἦχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ θεωρήματος. ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ. ὥστε συμπεσεῖται ἐκατέρᾳ τῶν ΖΘΠ· ὅπερ ἀδύνατον διὰ τὰ δεδεδειγμένα ἐν τῷ λα' τοῦ πρώτου καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου τοῦ βιβλίου. τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ τομή ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γερονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἦχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὲ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἦχθω κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥστε καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω δὲ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γερονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ν· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΛΜ δοθείς. δοθὲν ἄρα τὸ Μ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΜΑ· παράλληλος γὰρ ἐστὶ τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ ΜΑ. δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΑ. ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ. τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταῦτα τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ. ^[190]

2 50 ἔστω κώνου τομή πρότερον παραβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὲ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. γερονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἦχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα. λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐστὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καὶ ἐστὶ πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ

ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἦχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἦχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΔ. ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς. λέγω δὴ, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ. Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΧ καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ δοθείς· ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΕ, ΔΕΓ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Χ. πρὸς δὲ θέσει εὐθείᾳ τῇ ΧΕ καὶ δοθέντι τῷ Χ διήκται τις ἡ ΓΧ ἐν δεδομένη γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓΧ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομὴ· δοθέν ἄρα τὸ Γ. καὶ διήκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ. ἦχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτῶτι. [45]

2 50 (50) συμπίπτει κατὰ τὸ Ζ. μείζων ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΖΔΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΖΧΔ. δέήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων. συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα μείζων οὔσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἡ ὑπὸ ΚΘΗ, καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθᾶς ἡ ΑΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ Η, καὶ ἦχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘΚ κάθετος ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῇ ὑπὸ ΛΘΚ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ. ἡ δὲ ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΘΚ πρὸς ΚΗ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἐὰν δὲ ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, μείζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἔστω τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΜΚ τοῦ ὑπὸ ΜΚΘ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὁμοία ποιήσει τὰ τρίγωνα, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὲ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομὴν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἦχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ. [95]

2 50 (100) Ἔστω ἡ τομὴ ἑλλειψις, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ. δεῖ δὲ ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι ἐπὶ ταῦτά τῇ τομῇ ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξεῖα γωνίᾳ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. ἦχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς

τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθεῖς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ. τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθεῖς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθεῖς. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καὶ ἐστὶ πρὸς θέσει καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ. συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὥς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν, ὥς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ, καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἔστι δὲ καί, ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΗ· ἐκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ δι' ἴσου· ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. καὶ ὥς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καί, ὥς ἡ ΧΕ πρὸς ΓΕ, ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὥς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ περὶ ὀρθᾶς γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἡγμένη διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξεῖα. ^[140]

2 51 ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἀφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ. γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἡγμένη διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ συμπίπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω παραβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῶν ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ. Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ. δοθεῖς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἐκκείσθω δὴ τις εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμήμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔσται ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, ἀλλὰ καὶ ἐστὶν, ὥς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΓΔ. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ γωνία [τουτέστιν ἡ Ω] τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΧΨ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω τμήμα κύκλου μεῖζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὸν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ

Κ κάθετος ἤχθω ἢ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΛΚ ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἢ ΝΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΖΘ. ^[60]

2 51 (50)

καὶ διὰ τοῦτο ἐστίν, ὡς ἡ ΝΠ πρὸς ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΛ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· συνθέντι, ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ὡς ἄρα ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἢ ΑΤ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περὶ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ. καὶ εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Α, Λ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῆς Ε. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛΖΚ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΑΕΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΓ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, κάθετος δὲ ἡ ΓΗ· ἔσται δὴ, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΚΘΛ τῷ ΓΗΔ καὶ τὸ ΚΖΘ τῷ ΓΕΔ. ὥστε ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΚΘ, τουτέστι τῇ Ω. ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσος ᾖ πρὸς ἴσον, ἢ ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ ΖΚΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ΖΘ καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα. Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθείᾳ ἐπιψαύη, ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἀγομένη διαμέτρῳ, οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν. ^[90]

2 52

ἔστω ἔλλειψις, ἥς ἄξονες μὲν οἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ. λέγω, ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΓΑ. ἡ γὰρ ΖΕ τῇ ΑΒ ἴτοι παράλληλος ἐστίν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον παράλληλος· καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. καὶ ἐστὶ διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλος ἐστὶ τῇ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΑΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΓΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῇ ὑπὸ ΛΓΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΑΕ, ΕΒ τῆς ΕΓ, ἀμβλεία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΑ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΛΖΕ. καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ. μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΖΚ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΖΕΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε ὀρθὴ τῇ πρὸς τῷ Κ ἐστὶν ἴση [οὐκ ἄρα ὁμοιόν ἐστι τὸ ΓΕΒ τρίγωνον τῷ ΖΕΚ]· οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. ἐκκείσθω κύκλου τμήμα τὸ ΜΥΝ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἀμβλεία δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμήμα ἐστὶ τὸ ΜΥΝ. πεποιήσθω δὴ, ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΥ, ΥΜ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διάμετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΝ, ΟΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ τὰ Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ε, Τ γωνίαι, ὅμοια ἄρα τὰ ΟΤΝ, ΒΕΓ τρίγωνα. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΤΡ τῇ ΣΞ, μείζων δὲ ἡ ΡΟ τῆς ΣΥ, ἡ ΡΟ ἄρα πρὸς ΡΤ μείζονα ἔχει λόγον ἢ περὶ ἡ ΥΣ πρὸς ΣΞ· καὶ ἀναστρέψαντι ἡ ΡΟ πρὸς ΟΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἡ ΣΥ πρὸς ΥΞ.

[45]

2 52 (50)

καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ἡ ἄρα ΠΟ πρὸς ΤΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΧΥ πρὸς ΥΞ.
καὶ διελόντι ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΧΞ πρὸς ΥΞ. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ,
τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ
ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΧΞ πρὸς
ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ. ἐὰν ἄρα
ποιήσωμεν, ὥς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς μείζον
τοῦ ἀπὸ ΞΥ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ. ἐπεὶ οὖν ἔστιν, ὥς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ
πρὸς ὀρθὰς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ ἔστιν, ὥς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ
ΞΦ, διὰ ταῦτα ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΦΝ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΥΝ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ
ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας, ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΑΖΘ μείζων ἔστι τῆς ὑπὸ ΑΓΘ. οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ
ὑπὸ ΑΖΘ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ. Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς
ἀφῆς ἀγομένη διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ· δεῖ δὴ τὴν διδομένην ὀξείαν
γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν
κλωμένων εὐθειῶν. ^[5]

2 53 ἔστω ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, ἥς μείζων μὲν ἄξων ὁ ΑΒ, ἐλάσσων δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ
ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ὥστε καὶ ἡ
ὑπὸ ΑΓΒ οὐκ ἐλάσσων ἔστι τῆς Χ. ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΓΗ ἢ μείζων ἔστιν ἢ ἴση. ἔστω πρότερον ἴση·
καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἦχθω ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἦχθω ἡ ΚΘ.
ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, καὶ ἔστιν, ὥς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΖ. καὶ
ἔστι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, παράλληλός
ἔστι τῇ ΓΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΗΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἔστι τὸ ΚΖΓΗ· καὶ διὰ
τοῦτο ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΗΚΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΓΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΓΖ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ,
ἴση ἔστι· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΕ ἄρα ἔστιν ἴση τῇ Υ. ἔστω δὴ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ἀνάπαλιν
δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἔστιν. ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφηρήσθω ἀπ' αὐτοῦ τμήμα, καὶ
ἔστω τὸ ΜΝΠ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ ΜΠ δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο
τῇ ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΝΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΜ, ΝΠ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ
ΑΓΒ ἐλάσσων ἔστιν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ΜΝΠ ἡμίσεια ἔστιν ἡ ὑπὸ ΜΝΟ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἡ ὑπὸ
ΑΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΟ τῆς ὑπὸ ΑΓΕ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς ΕΓ
μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΟΜ πρὸς ΟΝ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ μείζονα
λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἀπὸ ΜΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΟ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἔστι τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, τὸ δὲ
ἀπὸ ΜΟ ἴσον τῷ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΝΟΡ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ
πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ. γενέσθω δὴ, ὥς ἡ πλαγία πρὸς
τὴν ὀρθίαν, ἡ ΩΑ' πρὸς Α'ς, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ως κατὰ τὸ ρ. ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν
ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ, καὶ ἡ ΩΑ' πρὸς Α'ς μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΡΟ
πρὸς ΟΝ. καὶ συνθέντι ἡ Ως πρὸς τὴν ΖΑ' μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΡΝ πρὸς ΝΟ. ἔστω τὸ
κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ ρς πρὸς ΖΑ' μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΦΝ πρὸς ΝΟ. ^[45]

2 53 (50) καὶ διελόντι ἡ Α'ρ πρὸς Α'ς μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΦΟ πρὸς ΟΝ. γινέσθω δὴ, ὥς ἡ Α'ρ πρὸς
Α'ς, οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ἐλάττονα τῆς ΟΝ, οἷον τὴν ΙΟ, καὶ παράλληλος ἦχθω ἡ ΙΞ καὶ ἡ ΞΤ καὶ ἡ
ΦΨ. ἔσται ἄρα, ὥς ἡ Α'ρ πρὸς Α'ς, ἡ ΦΟ πρὸς ΟΙ καὶ ἡ ΨΣ πρὸς ΞΞ· καὶ συνθέντι, ὥς ἡ ρς πρὸς
ΖΑ', ἡ ΨΞ πρὸς ΞΞ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὥς ἡ Ως πρὸς ΖΑ', ἡ ΤΞ πρὸς ΞΞ. καὶ
διελόντι, ὥς ἡ ΩΑ' πρὸς Α'ς, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΞΞ. ἐπεζεύχθωσαν
δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ
ΑΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἦχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν
ἴση ἔστιν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Λ ἴση, ἰσογώνιον
ἄρα ἔστι τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΕΛ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν, ὥς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΞΞ,

τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΕ τρίγωνον τῷ ΣΞΠ τριγώνῳ καὶ τῷ ΚΘΕ τὸ ΜΞΠ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ. ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστὶν ἴση. διῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἀγομένη διαμέτρῳ τῇ ΚΕ γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Ἐὰν κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφερείας εὐθεΐα ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι συμπίπτουσιν ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα. ^[75]

3 1 ἔστω κώνου τομὴ ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθωσαν ἡ τε ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ συμπίπτουσιν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΒ, ΔΑ συμπίπτουσιν ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΔ ἡ ΑΖ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται. ἔσται δὲ ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς ἴσον τὸ ΑΔΒΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΓΖ τριγώνῳ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΕΒΖ λοιπὸν τὸ ΑΔΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν συμπίπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ Η κέντρον. ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ ΑΖ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, τὸ ὑπὸ ΖΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΔΗΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΑΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΑΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΔΗΒ. ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΔΗΒ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔΗΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕΒ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἡ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρὸς τε μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινόμενῳ τριγώνῳ πρὸς τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἐτέρᾳ τῶν διαμέτρων. ^[10]

3 2 ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΑ, ΗΜΖ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗ τετραπλεύρῳ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω ἡ ἀφηρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἡ τῆς περιφερείας β σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθειςῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις. ^[5]

3 3 ἔστω γὰρ ἡ τομὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προεῖρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἡ τε ΖΘΚΑ καὶ ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η ἡ τε ΗΞΟ καὶ ἡ ΘΠΡ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΛΗ τετράπλευρον τῷ ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ τῷ ΡΝ. ἐπεὶ γὰρ προδεδείκται ἴσον τὸ ΡΠΑ τρίγωνον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΙ τῷ ΓΖ, τὸ δὲ ΑΡΠ τοῦ ΑΜΙ μεῖζόν ἐστι τῷ ΡΜ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τοῦ ΓΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΜΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ καὶ τῷ ΡΜ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ ΡΖ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΜ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστίν. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεΐαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι συμπίπτουσιν ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα. ^[20]

3 4 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΑ·

παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ. ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον. ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημείον τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἡγμένη διαμέτρῳ τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τε τῇ ἐφαπτομένη καὶ τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἀγομένη διαμέτρῳ. ^[10]

3 5 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ αἱ ΖΓ, ΕΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΖ ἡ ΘΗΚΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔΖ ἡ ΗΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΜ τρίγωνον τοῦ ΚΘΔ διαφέρει τῷ ΚΛΖ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ ΕΖ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν ΗΘ παρὰ τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΜΗ παρὰ τὴν ΔΖ, τὸ ἄρα ΜΗΘ τρίγωνον τοῦ ΓΛΘ τριγώνου διαφέρει τῷ ΓΔΖ. ὥστε τὸ ΜΗΘ τοῦ ΚΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ ΚΖΛ. καὶ φανερόν, ὅτι ἴσον γίνεται τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΜΗΚΔ τετραπλεύρῳ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρὸς τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένη καὶ τῇ ἐτέρᾳ τῶν διαμέτρων. ^[5]

3 6 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΗ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜΛ, ΚΝΞ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΖ τετράπλευρον τῷ ΑΙΝ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΖ ἤκται ἡ ΚΛ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεία τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθουσῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις. ^[5]

3 7 ὑποκείσθω γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεία τὰ Κ, Λ, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ ἤχθωσαν ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛΩ, παρὰ δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛΨ. λέγω, ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΟΙ τρίγωνον τῷ ΡΟ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΛΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΥ τῷ ΡΛ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις. ^[20]

3 8 λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΗ τετράπλευρον τῷ ΖΓ καὶ τὸ ΕΙ τῷ ΟΤ. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ· καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· ἑκάτερα γὰρ ἑκατέρας διπλῇ δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ. καὶ ἐστὶν ὅμοια τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΗ, τὸ ΞΒΔ πρὸς τὸ ΘΒΖ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ΑΗΘ τῷ ΘΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΤΑΓ τῷ ΔΒΞ. ὧν τὸ ΑΗΘ ἴσον ἐδείχθη τῷ ΒΘΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΘ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘ. ὥστε καὶ τὸ ΔΗ τῷ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΓΟ τῇ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΟΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ. ὁμοίως δὲ καὶ

τὸ ΔΕΙ τῷ ΒΕΗ. ἀλλὰ τὸ ΒΕΗ τῷ ΑΕΖ ἴσον· καὶ τὸ ΓΟΕ ἄρα ἴσον τῷ ΔΕΙ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΔ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΖΓ. ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ΟΤ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ἧ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ Κ, τὸ δὲ ἕτερον ἐνὶ τῶν Γ, Δ ταυτόν, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΛΟ τῷ ΛΜ. ^[5]

3 9 τοῦτο δὲ φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ, τὸ δὲ ΑΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΕΟ ἄρα ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ. ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΚΓ ἴσον τῷ ΛΟ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα μὴ καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς. ^[10]

3 10 δεικτέον δὴ, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ. ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΑΤ, ΚΙ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τρίγωνον τοῦ ΥΩΛ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ. τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΥΩΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ ΑΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖον τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἡγμένη διαμέτρῳ διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τε τῇ ἐφαπτομένη καὶ τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἡγμένη διαμέτρῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων. ^[5]

3 11 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΔΕ συμπίπτουσιν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἢ τε ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ. ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΑΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ, φανερόν, καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρος ἐστὶ συζυγῆς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐστὶν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β σημείου κατήχθησαν ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ, δηλον, ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΑΕ. ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν β σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ' ἐκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν, ὁμοίως ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα. ^[25]

3 12 ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΑΒΜΝ, ΚΕΟΥΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΑΚΣ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν ΑΟΠ τρίγωνον τῷ ΚΟΕΣ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΝ τῷ ΒΜΕΡ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΡ λιπὸν ἢ προσλαβὸν τὸ ΒΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΠ. καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ ΒΟ τὸ ΒΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΣ. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν, ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα, ὧν κορυφή κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων. ^[5]

3 13 ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ἐφ' ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα, καὶ τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΒΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Γ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΖΘ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Θ παρὰ τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΛΘΜ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς διάμετρος ἐστὶν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστὶν ἡ ΛΜ, συζυγῆς ἐστὶν ἡ ΛΜ διάμετρος τῇ ΒΔ

διαμέτρω ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος· διὰ δὲ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΖΘ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ. καὶ εἰσιν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὅποτέρας τῶν τομῶν σημείον τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον. ^[5]

3 14 ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΞΤΟ. λέγω, ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ αὐτά τοις πρότερον τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μὲν ἐστὶν ἡ ΛΘΜ, συζυγῆς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΛΜ ἡ ΑΥ, ἔξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκεῖμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐκ τοῦ ὄν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἵδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ, ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἵδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. ἔξει ἄρα ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τουτέστιν ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ, καὶ τοῦ ὄν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἵδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μα' τοῦ α' βιβλίου τὸ ΤΘΟ τρίγωνον τοῦ ΞΤΣ διαφέρει τῷ ΒΖΘ. ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ. Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεΐαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δὲ τι σημεῖον ἐφ' ὅποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων. ^[5]

3 15 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἀφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΑΘΖΦ, ΒΘΤ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΣ τομῆς σημείον τι τὸ Σ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστὶ τῷ ΘΓΒ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερόν δὴ, ὅτι συζυγῆς ἐστὶ διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὔσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστὶ τὸ ΣΛΘΟ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς ἐστὶν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΕ, γεγονέτω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστὶν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἵδους. δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. πεποιήσθω δὴ, ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ, ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἵδους. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ, διότι τὸ μὲν ἀπὸ ΞΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΗΞ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ· ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ, τὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΘ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΙ τῷ ΓΒΘ [τὸ ἄρα ΗΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΙΚ διαφέρει τῷ ΙΘΗ, τουτέστι τῷ ΓΒΘ]. ^[45]

πάλιν ἐπεὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ καὶ ἡ ΠΜ πρὸς ΒΓ, ἀλλ' ὥς ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ, ἡ ΤΒ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ, ὥς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἔξει ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον λόγον ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΣΛ, καὶ ὅμοιον τὸ ΘΓΒ τρίγωνον τῷ ΘΛΖ, καὶ ἐστιν, ὥς ἡ ΘΒ πρὸς ΓΒ, ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ, ἔξει ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ τὸν συνημμένον λόγον ἕκ τε τοῦ ὄν ἔχει ἡ Ρ πρὸς ΞΗ καὶ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΙ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΗΣ διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞΗ, ὀρθίαν δὲ τὴν Ρ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣΟ, καὶ ἀναγράφεται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘΗ εἵδος τὸ ΘΙΗ, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣΟ ἥτοι τῆς ΘΛ ἴσης αὐτῇ τὸ ΘΛΖ, ἀπὸ δὲ τῆς ΘΟ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης ἥτοι τῆς ΣΛ ἴσης αὐτῇ τὸ ΣΛΥ εἵδος ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ΘΙΗ, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὥς εἴρηται, τὸ ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ. Ἐὰν κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψάουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δὲ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τινὰ τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων, ἔσται, ὥς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἀφῇ τετράγωνον. ^[10]

3 16 ἔστω κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἡ τε ΑΗΘ καὶ ἡ ΚΒΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερόν αὐτόθεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ, οὕτως τὸ ΕΚΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ. καὶ ἐναλλάξ· καὶ ὥς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστὶν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ τρίγωνον. ἀλλ' ὥς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΔΛ τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΛΓΒ τῷ ΑΘΓ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΘΓ. ἐναλλάξ, ὥς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΑΕΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΓ. ὥς δὲ τὸ ΑΗΕ πρὸς τὸ ΑΘΓ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. καὶ ἐναλλάξ. Ἐὰν κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψάουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεία, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμὴν, ἔσται, ὥς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν. ^[5]

3 17 ἔστω κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεία τὰ Δ, Ε, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰς ΑΓ, ΓΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἶ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΚΙ τῇ ΙΕ ἐστὶν ἴση καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΙ. καὶ ἐπεὶ ὁμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν, ὥς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ τρίγωνον. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστὶν, ὥς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ

ΜΕΙ τρίγωνον. ἀλλ' ὥς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καί, ὥς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ. ἐπεὶ οὖν ἔστιν, ὥς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν, ὥς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, τὸ ΓΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, δι' ἴσου ἄρα, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἐτέραν ἐφαπτομένην, ἔσται, ὥς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἀφῇ τετράγωνον. ^[5]

3 18 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ καὶ διὰ τῶν ἀφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἔστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ ἔστιν ἡ ΑΒ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ. καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΟ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ. ἔστιν ἄρα, ὥς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ. ἀλλ' ὥς τὸ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ΟΕΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΑΓΘ· ὥς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΘ. ἔστι δὲ καὶ ὥς τὸ ΑΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ΑΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· δι' ἴσου ἄρα ἔστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομὴν, ἔσται, ὥς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν. ^[5]

3 19 ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ αἱ ΘΗΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ. λέγω, ὅτι ἔστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ. ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΑΖΣ τῷ ΔΖΤ καὶ τὸ ΠΟΛΙ τῷ ΚΡΞΛ· καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΤΖ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ΡΞΛΚ. ὥς δὲ τὸ ΔΤΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ΡΞΛΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὥς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσας συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δὲ τις ἐτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τὰς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσται, ὥς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἀφῇ τετράγωνον. ^[10]

3 20 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΓ καὶ αἱ ΕΖ, ΑΕ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘ, καὶ εἰλήφθω, ὃ ἔτυχε, σημεῖον τὸ Κ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΚΛΣΜΝΞ. λέγω, ὅτι ἔστιν, ὥς τὸ ὑπὸ

BZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ZA, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Β παρὰ τὴν ΑΖ αἱ ΚΠ, ΒΡ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΣ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ΛΣΖ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΚΛΖΠ τετράπλευρον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΚΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς, ἔσται, ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν. ^[10]

3 21 ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΕΗΟΠΡ, ΚΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΦΙΧΨΩ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ. ἐπεὶ γὰρ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΨ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΕΗΜ, ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς ὅλον τὸ ΕΟΨ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΕΗΜ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ τῷ ΒΥΖ, τὸ δὲ ΗΟΨΜ τῷ ΚΟΡΤ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΒΖΥ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ΚΟΡΤ. ὡς δὲ τὸ ΒΥΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΚΟΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δὲ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ἡ τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἵδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως. ^[5]

3 22 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. διήχθωσαν δὴ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΚΕΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἵδους πλευράν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΕΝ, ΗΖ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσι, διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΕΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΝΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΒΝΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΑΝ· ἴση γὰρ ἡ ΝΑ τῇ ΒΖ· πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΝ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΕΜ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΖΑΝ τῷ ὑπὸ ΗΕΞ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ τοῦ εἵδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ' ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσιν συμπιπτῶσιν ἐπὶ μιᾷ, ἥς ἔτυχον, τομῆς, ἀχθῶσι δὲ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἐτέρας ἀντικειμένας, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν. ^[5]

3 23 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν

ΕΛ ή ΘΠΡΞΣ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ή ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ή ΟΥ. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρος ἐστίν ή ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ή ΕΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἤκται ή ΘΣ, ἴση ἐστίν ή ΘΠ τῇ ΠΣ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ή ΗΜ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΛ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΥΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΧ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΟΥΡ τετράπλευρον. ἔστι δέ, ὡς τὸ ΑΧΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ΞΡΥΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ή μὲν πλαγία διάμετρος, ή δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δὲ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ή δὲ σύμπτωσις ἧ τῶν εὐθειῶν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἔσται τῷ δις ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ. ^[10]

3 24 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἡ τε ΑΕΓ πλαγία καὶ ή ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΕΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ· ἔστω δὲ πρότερον τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ή τῆς ὑπὸ ΥΕΤ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ, ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ή ΣΗΑΦ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΣΑΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ή ΣΑ πρὸς ΑΕ, ή ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ή ΦΑ πρὸς ΑΕ, ή ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ πρὸς ΞΚ. σύγκειται δὲ ἔκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΘΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ. ^[45]

3 24 (50) συμπίπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾷς τῶν ἀσυμπτῶτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ. ὥστε τὸ δις ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ. ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΚ γωνίας ή τῆς ὑπὸ ΦΕΤ. ἔσται δὴ ὁμοίως διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΝΜ, τῷ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΘΖ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὴν τὴν ὑπεροχὴν, ἧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ προσλαβὼν τὴν ὑπεροχὴν, ἧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν

ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον τὸ ὑπὸ ΚΞΘ προσλαβὼν τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ ΑΕ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἐντὸς μιᾶς τῶν Δ, Β τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ. ^[70]

3 25 λέγω, ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΜ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μείζον ἔσται τῷ δις ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ. διὰ γὰρ τὰ αὐτὰ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΞΛ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ τῷ ὑπὸ ΛΟΣ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΟΣ. καὶ ἐπεὶ ἐστίν, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ ΛΞΣ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΛΟΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΣΤΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΞΚ ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ τοῦ ὑπὸ ΤΞΚ μείζον ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ὑπὸ ΤΞΚ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΤΝ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ. Ἐὰν δὲ ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ἢ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἐτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΗ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δις ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ. ^[5]

3 26 ἐπεὶ γὰρ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΦΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΗ λόγον ἔχει τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἔλασσόν ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἔλασσόν ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΞΘ. Ἐὰν ἐλλείψωσι ἡ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγεται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνον προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἶδη τῷ ὑποκειμένῳ εἶδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ. ^[10]

3 27 ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ, ἥς κέντρον τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΝΖΗΘ, ΚΖΛΜ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνον προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἶδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΕ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ, ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ

Z, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά εἰσι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖΚ εἶδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛΖ εἶδη τοῖς ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕΛ. καὶ ἐπεὶ εὐθεία ἡ ΒΔ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ^[45]

3 27 (50) ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δις ἀπὸ ΒΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΓΑ εἶδει διπλάσιά ἐστι τοῦ δις ἀπὸ ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δις ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖΜ εἶδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἶδει ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ. Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγεται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ' αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, τὰ ἀπὸ τῶν λαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχουσιν, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον. ^[10]

3 28 ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρ' αὐτὰς ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Λ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερόν δὴ, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΞΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘΗ. καὶ ἐστὶ τῶν μὲν ἀπὸ ΛΜΗ διπλάσια τὰ ἀπὸ ΝΗΛ, ὡς δέδεικται, τῶν δὲ ἀπὸ ΖΘΗ τὰ ἀπὸ ΖΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ. Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνη τὰς ἀσυμπτώτους, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτῶτων προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἡγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον. ^[10]

3 29 ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἡ δὲ ΝΛ τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο. δεικτέον, ὅτι τὰ ἀπὸ ΞΗΟ προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ δις ἀπὸ ΕΑ [τουτέστι τὸ δις ὑπὸ ΟΛΞ], πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχει τῷ δις ὑπὸ ΝΞΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞΗΟ μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛΗΝ. τὰ δὲ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞΗΟ ἄρα μετὰ τοῦ δις ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τινὰ τῶν ἀσυμπτῶτων τέμνουσα τὴν τε

τομήν καὶ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἢ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς. ^[5]

- 3 30 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΝ. ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοι εἰσιν αἱ ΚΝ, ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον τέμνουσα τὴν τε τομήν καὶ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἢ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς. ^[5]

- 3 31 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ. ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν ἡ ΝΕΚΜ καὶ ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Η, Κ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ. ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ ΚΖΕ τῷ ΜΛΗ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, δέδεικται τὸ ὑπὸ ΝΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΛΚ τῷ ἀπὸ ΜΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΚΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΝΛΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΚΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΞ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΞ πρὸς τὰ ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΓ πρὸς τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΚΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΓ τοῖς ἀπὸ ΗΛ, ΚΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΛΗ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΞ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ. ἡ ἄρα ΓΔ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε. καὶ παράλληλος ἡ ΔΘ τῇ ΗΞ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ. Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τινὰ τῶν ἀσύμπτωτων, ἢ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς. ^[5]

- 3 32 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἥς κέντρον τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ ἡ ΖΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Η, Θ· φανερόν δὴ, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΖΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΛΚ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΘΛ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Λ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΛΜ, ΒΕ· ἔσται δὴ, ὡς προδεδείκται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τό τε ἀπὸ ΘΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΜΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΒ τῷ ἀπὸ ΜΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διότι ἐφάπτεται ἡ ΑΖ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΜΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΜΘ. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΖΘ κατὰ τὸ Μ προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ εἰσι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΑΜ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἀφὰς

ἐπιζευγνυούσης ἀχθῆ εὐθεΐα παρά τινά τῶν ἀσυμππτῶτων συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἡγμένη παραλλήλῳ, ἢ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται. ^[10]

3 33 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΔΗ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· φανερόν δὴ, ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΑΜΝ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΜΝ. κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Μ παρὰ τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΜΠ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΕ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΘΞ, πρὸς τὰ ἀπὸ ΚΕ, ΞΜ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΕ ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΜ τῷ ἀπὸ ΘΠ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΠ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. εὐθεΐα ἄρα ἡ ΛΗ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καὶ εἰσι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ· ἴση ἄρα ἡ ΑΜ τῇ ΜΝ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμππτῶτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεΐα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἀφῆς ἀχθῆ παράλληλος τῇ ἀσυμππτῶτι, ἢ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἐτέρα τῶν ἀσυμππτῶτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται. ^[5]

3 34 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ ἡ ΓΑΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΔΕ ἡ ΒΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΔ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΚΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΑΘ, ἴση δὲ ἡ ΒΖ τῇ ΔΚ, τουτέστι τῇ ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΗ πρὸς ΑΓ. διπλῇ δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΚ· διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ τῆς ΑΓ. ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. τῶν αὐτῶν ὄντων ἔαν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεΐα τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας. ^[20]

3 35 ἔστω γὰρ ἡ ΑΒ ὑπερβολὴ καὶ αἱ ΓΔΕ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ ΓΒΕ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεΐα ἡ ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΑΛ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΜ, ΟΠΒΡ, ΖΥ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΤΗ. ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ. ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ. ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ ΔΒ, τουτέστι τῷ ΟΝ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ. ὡς ἄρα τὸ ΔΜ πρὸς ΟΝ, τὸ ΚΘ πρὸς ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ ΜΘ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΚ ἐστίν, ὡς ὅλον τὸ ΔΜ πρὸς ὅλον τὸ ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΣ τῷ ΘΟ, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔΠ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΚΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΜΦ πρὸς ΦΑ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ. τῶν αὐτῶν ὄντων ἔαν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη εὐθεΐα μήτε τὴν τομὴν τέμνη κατὰ δύο σημεῖα μήτε παράλληλος ᾗ τῇ ἀσυμππτῶτι, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένη τομῇ, ἔσται δέ, ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἀφῆς παραλλήλου, ἢ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης καὶ τῆς ἀσυμππτῶτος πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμππτῶτος καὶ τῆς ἐτέρας τομῆς. ^[5]

- 3 36 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ σημείον εἰλήφθω τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ μήτε παράλληλος οὔσα τῇ ΓΕ μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα. ὅτι μὲν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τε ΓΔ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. συμπίπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΗΘ, ἔστιν, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ, τὸ ΡΓ πρὸς ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. καὶ ὡς ἔν πρὸς ἔν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὅλον τὸ ΝΛ πρὸς ΓΘ καὶ ΡΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΑΞ τῷ ΒΗ. τὸ δὲ ΑΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, οὕτως ὅλον τὸ ΑΝ πρὸς τὸ ΒΗ καὶ ΡΗ, τουτέστι τὸ ΡΞ. ἴσον δὲ τὸ ΡΞ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΒΓ καὶ τὸ ΜΒ τῷ ΞΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ, ἡ ΝΡ πρὸς ΡΘ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ. Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἀφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβάνομένην, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης. ^[5]
- 3 37 ἔστω κώνου τομὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΘ, ΛΓ αἱ ΔΠ, ΖΡ, ΛΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΛΖ πρὸς ΞΔ καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ καὶ ἡ ΛΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΛΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΓΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ πρὸς τὸ ΞΟΓ, τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ, καὶ λοιπὸν τὸ ΛΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΛΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΔΕ. τῶν αὐτῶν ὄντων ἔαν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσῃ, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβάνομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυμένης. ^[5]
- 3 38 ἔστω ἡ ΑΒ τομὴ καὶ αἱ ΑΓ, ΒΓ ἐφαπτόμεναι καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσα καὶ αἱ ΑΝ, ΓΜ διάμετροι· φανερόν δὴ, ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΟ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΔΟ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η παρὰ τὴν ΛΓ αἱ ΖΡ, ΗΠ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ, τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ. καὶ ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ, τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΞ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ, καὶ ὡς ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ. Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων

δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνη ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων. ^[5]

3 39 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΔΖΗ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΘΣ, ΖΑΜΝΕΟ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΕΠ, ΖΡ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΞ, ΕΣ καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ, ἔστιν, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΖΜ, ἡ ΘΣ πρὸς ΞΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ΕΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΜ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΜΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΘΠ πρὸς τὸ ΖΡΜ, τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΘΠ τοῖς ΑΣΚ, ΘΔΣ, τὸ δὲ ΡΜΖ τοῖς ΑΞΝ, ΔΜΞ· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ, τὸ ΑΣΚ μετὰ τοῦ ΘΔΣ πρὸς τὸ ΑΞΝ μετὰ τοῦ ΞΜΔ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΣΚ πρὸς λοιπὸν τὸ ΑΝΞ ἐστίν, ὡς τὸ ΔΣΘ πρὸς τὸ ΔΞΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΣΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΔΜ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΜ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἕαν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνη ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης. ^[5]

3 40 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΔΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΑΕ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Κ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΝΜΘΞ, ΚΟΠ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΘΡ, ΚΣ, καὶ διήχθω ἡ ΞΑΓΤ. ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς ΞΜ, ΚΠ διηγμέναι εἰσιν αἱ ΞΑΥ, ΜΑΠ, ἔστιν, ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ. ἀλλ' ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΘΕΝ, ΚΕΟ τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ, τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΚ, τὸ ΘΡΝ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΝΡ πρὸς τὸ ΚΟΣ, τὸ ΞΜΑ πρὸς τὸ ΑΥΠ. ἴσον δὲ τὸ ΘΝΡ τοῖς ΞΑΜ, ΜΝΔ, τὸ δὲ ΣΟΚ τοῖς ΑΥΠ, ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΞΜΑ μετὰ τοῦ ΜΝΔ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΠΔΟ τριγώνου, οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΠΥΑ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΜΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΟΠ τρίγωνόν ἐστίν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ' ὡς τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, ὡς δὲ τὸ ΜΔΝ πρὸς τὸ ΠΔΟ, τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ. Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται. ^[45]

3 41 ἔστω παραβολῇ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ καὶ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η. ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Η διάμετρος ἐστὶ τῆς τομῆς, φανερόν. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ Β ἔρχεται, παράλληλός

ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΕ, καὶ φανερόν τὸ ζητούμενον. μὴ ἐρχέσθω διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἢ ΚΘΛ· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ καὶ ἡ ΛΓ τῇ ΛΕ. ἦχθω διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΕΗ ἢ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παρὰ τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΕΘ, διάμετρος ἐστὶν ἡ ΜΒ· καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ· κατηγμένη ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΘ, ΓΠ. καὶ ἐπεὶ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΜΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ, ἴση ἔσται ἡ ΜΒ τῇ ΒΠ· ὥστε καὶ ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΕ [διπλασία γὰρ ἑκατέρα]· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ, καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΕΖ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ· διελόντι, ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρος ἐστὶν ἡ ΜΒ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΑΚ, ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ· ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ [διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας]· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ· διελόντι, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΑΞ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΑΔ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΓΠ τῆς ΒΖ διπλῇ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ, ἡ δὲ ΑΟ τῆς ΒΔ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΝΔ, ὡς ἄρα ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ καὶ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἀχθῇ ἐφαπτομένη, ἀποτεμεῖ ἀπ' αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἶδους. ^[5]

3 42 ἔστω γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν, ἥς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β ἦχθωσαν παρατεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους. ἔστω γὰρ κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι' αὐτοῦ ἦχθω παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἡ ΖΗΘ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος, συζυγῆς ἄρα διάμετρος ἐστὶ τῇ ΑΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους. εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Ε ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ, καὶ φανερόν αὐτόθεν, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους. μὴ ἐρχέσθω δὲ, καὶ συμπιπτέωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἦχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ, ἔστιν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, τουτέστι πρὸς ΖΒ· ἀνάπαλιν, ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΚ, ἡ ΛΑ πρὸς ΑΚ· συνθέντι ἢ διελόντι, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΑ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς ΖΘ, ἡ ΕΛ πρὸς ΓΑ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘ, ΕΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΖΜ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους· καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΓΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδους. Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπύτων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς. ^[5]

3 43 ἔστω ὑπερβολῇ ἡ ΑΒ, ἀσύμπυτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, ἄξων δὲ ὁ ΒΔ, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη ἡ ΖΒΗ, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη ἡ ΓΑΘ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΔΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΘ. ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β παρὰ μὲν τὴν ΔΗ αἱ ΑΚ, ΒΛ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ αἱ ΑΜ, ΒΝ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΑΘ, ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ· ὥστε ἡ ΓΘ τῆς ΘΑ διπλῇ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΑΜ καὶ ἡ ΔΘ τῆς ΑΚ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔΘ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΚΑΜ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ ΖΔΗ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΛΒΝ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΑΜ τῷ ὑπὸ ΛΒΝ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΔΘ τῷ ὑπὸ

ΖΔΗ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡ ΔΒ ἐτέρα τις ἢ διάμετρος καὶ μὴ ἄξων. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις, αἱ ἐπὶ τὰς τομὰς ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσσονται τῇ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσῃ. ^[20]

3 44 ἔστω γὰρ ἡ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ. λέγω, ὅτι παράλληλοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΔΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΗΔ πρὸς ΔΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΓ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ. ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς ΗΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΑΖ· διπλῇ γὰρ ἐκατέρα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ. Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ' ἐκάτερα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλείπον, ἀχθῇ δὲ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα ὀρθὰς ποιούσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις. ^[15]

3 45 ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν, ἥς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ. λέγω, ὅτι ἡ τε ὑπὸ ΓΖΔ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἵδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστίν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ, ΑΖΓ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ὀρθή ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή. Τῶν αὐτῶν ὄντων αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιούσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις. ^[35]

3 46 τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἐκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ· ὥστε ἡ ὑπὸ ΔΓΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθειῶν ἐπὶ τὴν ἀφήν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ. ^[15]

3 47 ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτόμεναι ἀλλήλαις αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ. λέγω, ὅτι κάθετός ἐστίν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ. εἰ γὰρ μή, ἦχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση, ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ. ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας· ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΓΘ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ. ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΓΛ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἔσται κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ· καὶ ἔσται, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΘΛ κάθετός ἐστίν, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΘΕ. Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιούσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ. ^[35]

3 48

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EZ, EH. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ. ἐπεὶ γὰρ ὀρθαὶ εἰσιν αἱ ὑπὸ ΔΗΘ, ΔΕΘ γωνίαι, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΓΘΖ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΔΘΗ ἴση· κατὰ κορυφὴν γάρ· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν. ^[10]

3 49 ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἦχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΘ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΘΒ γωνία ὀρθή ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΗ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ, ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένην παράλληλος τῇ διὰ τῆς ἀφῆς καὶ ἐνὸς τῶν σημείων ἡγμένη εὐθείᾳ, ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος. ^[10]

3 50 ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν EZ ἦχθω ἡ ΘΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν EZ ἦχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ὥστε διὰ τὸ προδειχθὲν ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΒ, καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΘΑ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου οὔσα τοῦ ἡμικυκλίου ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ. Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ὑπερβάλλον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτέρανοῦν τῶν τομῶν, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι. ^[5]

3 51 ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι, ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ἴσον ἔστω ἐκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ EZ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἡ EZ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ. ἦχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ· ἐναλλάξ γάρ. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΓΔ· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστὶ διπλῇ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, ἡ EZ ἄρα διπλῇ ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΗΓΒ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῇ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῇ ἡ ΑΒ· ἡ EZ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ. ὥστε ἡ EZ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ. Ἐὰν ἐν ἐλλείψει παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμὴν, ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι. ^[5]

3 52 ἔστω ἔλλειψις, ἥς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἵδους ἐκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΓΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ. ἦχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ κέντρον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστὶν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ, καὶ συναμφοτέρος ἡ ΓΕΔ διπλῇ ἐστὶ τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῇ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς

ΓΕΔ. Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἡ κύκλου περιφερεία ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνωσι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἶδει. ^[5]

3 53 ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ, ἥς διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ εἶδει τῷ πρὸς τῇ ΑΓ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ πρὸς τὸ εἶδος τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἶδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΓΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ· ὁ ἄρα τοῦ εἶδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΓΕ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἶδει. Ἐὰν κώνου τομῆς ἡ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἀφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἀφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἀφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμήμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου. ^[10]

3 54 ἔστω κώνου τομὴ ἡ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΓΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Ζ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΓ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΞΛ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἡ ΜΒΝ· φανερόν δὴ, ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΝ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΟΛ καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ παρὰ τὴν ΜΒ ἤκται ἡ ΚΘΛ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΒΝ, τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ [καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, τὸ ὑπὸ ΝΒΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ]. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΛΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΛ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΓΝ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΓΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ. ^[45]

3 54 (50) ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἀφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἀφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἐτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἔξει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἡγμένης διὰ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

[10]

3 55 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ABΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἦχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ, εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖ τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΝΖ, ΖΔΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ. ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΛΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΛ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΑΖ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ἀπὸ ΔΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΔΛ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΔ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΑΔ πρὸς ΘΑ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΘ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΑΘ. [ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΝΔ, ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ]. Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἀφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἀφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἐτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἔξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον τὸν συγκείμενον ἐκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν ἢ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἐτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης. [10]

3 56 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΗΓΚ, ΘΔΖ· φανερόν δὲ, ὅτι [ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ] ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΔ τῇ ΔΖ καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΗΠ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ παρὰ τὴν ΔΘ ἡ ΚΗ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΚΓ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, τὸ ὑπὸ ΗΑ, ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ· καὶ ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ, τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ

πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ τὸν συγκεείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΓ. ^[45]

3 56 (50) ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΒ πρὸς ΚΓ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΒΝ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα συγκεείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΑ πρὸς ΑΒ καὶ τοῦ τῆς ΝΒ πρὸς ΒΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν. ^[55]

4 prol Πρότερον μὲν ἐξέθηκα γράψας πρὸς Εὐδήμον τὸν Περγαμηνὸν τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία, μετῆλλαχότος δ' ἐκείνου τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρὸς σε γράψαι διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαι σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ' ἡμῶν πραγματευόμενα πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον. περιέχει δὲ τοῦτο, κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάνπερ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν, ἔτι κώνου τομῇ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις. τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασυδαῖον οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφεῖς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἀνθήσατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνεῖαν μόνον πεποιήται ὁ Νικοτέλης σὺν τῇ πρὸς τὸν Κόνωνα ἀντιγραφῇ ὡς δυναμένου δειχθῆναι, δεικνυμένῳ δὲ οὔτε ὑπ' αὐτοῦ τούτου οὔθ' ὑπ' ἄλλου τινὸς ἐντετεύχαμεν. τὸ μέντοι τρίτον καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῇ τούτοις ἀπλῶς ὑπὸ οὐδενὸς νενοημένα εὔρηκα. πάντα δὲ τὰ λεχθέντα, ὅσοις οὐκ ἐντέτευχα, πολλῶν καὶ ποικίλων προσεδεῖτο ξενιζόντων θεωρημάτων, ὧν τὰ μὲν πλεῖστα τυγχάνω ἐν τοῖς πρώτοις τρισὶ βιβλίοις ἐκτεθεικώς, τὰ δὲ λοιπὰ ἐν τούτῳ. ταῦτα δὲ θεωρηθέντα χρεῖαν ἱκανὴν παρέχεται πρὸς τε τὰς τῶν προβλημάτων συνθέσεις καὶ τοὺς διορισμούς. Νικοτέλης μὲν γὰρ ἔνεκα τῆς πρὸς τὸν Κόνωνα διαφορᾶς οὐδεμίαν ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ Κόνωνος εὐρημένων εἰς τοὺς διορισμούς φησιν ἔρχεσθαι χρεῖαν οὐκ ἀληθῇ λέγων· καὶ γὰρ εἰ ὅλως ἄνευ τούτων δύναται κατὰ τοὺς διορισμούς ἀποδίδοσθαι, ἀλλὰ τοί γε δι' αὐτῶν ἔστι κατανοεῖν προχειρότερον ἔνια, οἷον ὅτι πλεοναχῶς ἢ τοσαυταχῶς ἂν γένοιτο, καὶ πάλιν ὅτι οὐκ ἂν γένοιτο· ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις, καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις δὲ τῶν διορισμῶν εὐχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα. χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας καὶ δι' αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἔσται ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο καὶ οὐ δι' ἄλλο τι ἀποδεχόμεθα. Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνουσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς γραμμῆς, τοῦτον τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὥστε τὰς ὁμολόγους εὐθείας πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἢ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς γραμμῆς. ^[10]

4 1 ἔστω γὰρ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη συμπίπτει τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπτεται τῆς τομῆς. [ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, οὐκ ἔσται διάμετρος αὐτῆς. δυνατόν ἄρα ἐστὶ διὰ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν· ὥστε καὶ ἐφαπτομένην.] ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΕΓ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἐπὶ τὰς ἀφάς ἐστὶν ἡ ΒΑ, καὶ διῆκται ἡ ΓΔ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η, ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. οὐκ ἄρα ἡ ΒΑ καθ' ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν ΓΕ· κατὰ τὸ Ζ

ἄρα. Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνῃς· ἐὰν ἡ μὲν ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΓ τέμνη κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἀφὴν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἧς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται· δυνατόν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν. ^[5]

- 4 3 Τῶν αὐτῶν ὄντων τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτωσαν τὴν κατὰ τὸ Β ἀφὴν μεταξὺ αὐτῶν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας. δυνατόν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδεικνύειν. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ μὲν Ε, Γ συμπτώσῃς τὴν κατὰ τὸ Β ἀφὴν περιέχωσι, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἢ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης, ἢ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένη τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάπεται τῆς ἀντικειμένης. ^[5]
- 4 4 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΕΝ καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ ΛΕΝ γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ ΔΒ, τεμνέτω δὲ ἡ ΔΓ, καὶ αἱ Ε, Γ συμπτώσῃς περιεχέτωσαν τὴν Β ἀφὴν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπεται τῆς τομῆς. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ τινος ἢ τῶν ἀσυμπτῶτων, ἢ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτῶτι. ^[5]
- 4 5 ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾷς τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΜΝ. δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΜΝ παράλληλος ἀγομένη ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΗ. ἔσται δὴ, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ὑπερβολῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ παράλληλος [ἡ] μιᾷ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένη ἀπὸ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ' εὐθείας ἐντὸς τῆς τομῆς τεθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη ἐφάπεται τῆς τομῆς. ^[5]
- 4 6 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἔστω πρότερον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΔΕΖ παράλληλος ἔστω τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπεται τῆς τομῆς. ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΔΕ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ' ἕτερόν τι τὸ Η. ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση. Τῶν αὐτῶν ὄντων τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης. ^[20]
- 4 7 λέγω, ὅτι καὶ οὕτως τὰ αὐτὰ συμβήσεται. ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΘΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾷς τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω τὰ αὐτά. ^[10]
- 4 8 λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἐπ' ἄκραν τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι, ἐφ' ἧς ἔσται τὸ Δ σημεῖον. ἔστω γὰρ τὰ εἰρημένα, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΜΝ ἤχθω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ· ὅπερ ἄτοπον·

ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσι τέμνουσαι κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν ἑκάτερα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας, οὕτως αἱ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι διαιρεθῶσιν, ὥστε τὰς ὁμολόγους πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἢ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς. ^[5]

4 9 ἔστω γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν γραμμὴν ἢ μὲν κατὰ τὰ Θ, Ε, ἢ δὲ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ὄν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΔΕ πρὸς ΘΔ, τοῦτον ἔχέτω ἡ ΕΛ πρὸς ΛΘ, ὄν δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ' ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΔ, ΖΔ ἑκάτερα κατὰ δύο σημεῖα τέμνει τὴν τομὴν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ' ἑκάτερα. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ' ἦτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Μ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ μὴδὲ δι' ἑτέρου τῶν Λ, Κ πορεύηται, ἐφ' ἑκάτερας τῶν ΔΕ, ΔΖ συμβήσεται τὸ ἄτοπον. Ταῦτα μὲν κοινῶς, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης· ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ὑπάρχη, αἱ δὲ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἢ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας, τὰ αὐτὰ συμβήσεται τοῖς προειρημένοις, ὡς προεῖρηται ἐν τῷ β θεωρήματι. ^[5]

4 11 Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ τῆς μιᾶς συμπτώσεις μὴ περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, τὸ μὲν Δ σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ θ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν περιέχωσιν αἱ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις τὰς τῆς ἑτέρας, καὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης ἢ, ἢ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων. ^[5]

4 12 ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΕ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ὑπὸ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν ἑκάτερα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ περιεχέσθω τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω, ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. δεικτέον, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖται τῇ ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν. ἔστω δὲ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἦτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΧΖ πρὸς ΧΗ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. ἐὰν δὲ μὴδὲ δι' ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ' ἑκάτερας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβαίνει. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτῶτων ἢ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχη, ἢ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι, ἐφ' ἣς ἐστὶ τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς. ^[5]

4 13 ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ καὶ ἀσύμπτωτοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτῶτων τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι καὶ διηρήσθωσαν, ὡς εἴρηται, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ. εἰ γὰρ μὴ, ἦτοι διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω διὰ μόνου τοῦ Κ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ Κ

ἐλεύσεται· δι' ἀμφοτέρων ἄρα. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾷς ἢ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τέμνη τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ ΔΗ κατὰ μόνον τὸ Η παράλληλος οὖσα τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ γένηται, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, τῇ δὲ ΔΗ ἴση ἐπ' εὐθείας τεθῇ ἡ ΗΛ, ἡ διὰ τῶν Κ, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλος τε ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπεται τῆς τομῆς. [10]

4 14 ὁμοίως γὰρ τῷ προειρημένῳ ἀγαγὼν τὴν ΔΒ ἐφαπτομένην λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἦξει διὰ τῶν Κ, Λ σημείων. εἰ οὖν διὰ τοῦ Κ μόνου ἦξει, οὐκ ἔσται ἡ ΔΗ τῇ ΗΛ ἴση· ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ τοῦ Λ μόνου, οὐκ ἔσται, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ. εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ Κ μήτε διὰ τοῦ Λ, κατ' ἀμφοτέρα συμβήσεται τὸ ἄτοπον. δι' ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται. Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ἐφάπτηται μιᾷς τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ τέμνη ἐκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ ὡς ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς ἐτέρας τομῆς, ἥς οὐκ ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα, καὶ τοῦ σημείου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἐτέρας τομῆς, οὕτως ἔχη μείζων τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένην ἐπ' εὐθείας τε καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ πέρατι τῇ ὁμολόγῳ, ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μείζονος εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. [10]

4 15 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ διήχθω ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἔχέτω ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ. δεικτέον, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάπεται τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἐστὶ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἐτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ. ἦχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΕ ἐρχέσθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. ἔσται δὴ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω. [25]

4 16 λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς. ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς Α τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ Η. ἔσται δὴ, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γάρ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ. Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ τινος τῶν ἀσυμπτῶτων. [10]

4 17 λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ σημεῖον. ἔστωσαν τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾷς τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ εἰ δυνατόν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ Η. ἔσται δὴ, ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει. Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἐκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾷς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἐτέρας τομῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, οὕτως ἔχουσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν, ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν γραμμῶν. [10]

4 18

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξύ τῶν τομῶν. πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένη γωνία, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν ΑΔ τῆς ΔΒ, ἢ δὲ ΓΔ τῆς ΔΘ, διότι ἴση ἐστὶν ἢ ΒΝ τῇ ΑΜ. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἢ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἐχέτω ἢ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἢ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἐχέτω ἢ ΓΗ πρὸς ΗΘ. λέγω, ὅτι ἢ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται τῆς τομῆς. ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ ἐντὸς ἐστὶ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ Δ δύο ἐφαπτομένας ἀγαγεῖν. ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΖ· ἐλεύσεται δὴ διὰ τῶν Κ, Η σημείων [εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται μόνου ἢ δι' οὐδετέρου]. εἰ μὲν γὰρ δι' ἐνὸς αὐτῶν μόνου, ἢ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσεται καθ' ἕτερον σημεῖον· ὅπερ ἀδύνατον· εἰ δὲ δι' οὐδετέρου, ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ ἀδύνατον συμβήσεται. Εἰλήφθω δὴ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ διηρήσθωσαν, ὡς εἴρηται. ^[25]

4 19 λέγω, ὅτι ἢ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἐκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἢ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται. εἰ γὰρ μή, ἦτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον. Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπὶ τινος ἢ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, ἢ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ σημεῖον, καὶ ἢ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῶν περάτων ἡγμένης εὐθείας ἐφάψεται τῆς τομῆς. ^[5]

4 20 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω. λέγω, ὅτι ἢ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἢ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἢ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρά τὴν ἀσύμπτωτον, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα. ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα συμβήσεται τοῖς πρότερον. Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾷ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ ἢ μὲν ΔΒΚ τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ Β παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, ἢ δὲ ΓΔΘ ἐκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω, ὡς ἢ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἢ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἔστω ἢ ΒΚ. ^[5]

4 21 λέγω, ὅτι ἢ διὰ τῶν Κ, Η σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτῶτι, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἢ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς. ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἢ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρά τὴν ἀσύμπτωτον, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται. Ἔστωσαν δὴ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ὁμοίως εἰλήφθω, καὶ ἢ μὲν ΓΔΘ τέμνουσα τὰς τομάς, ἢ δὲ ΔΒ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων, καὶ ἔστω, ὡς ἢ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἢ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἢ ΒΚ. ^[5]

4 22 λέγω, ὅτι ἢ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται ἐκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΕΖ καί, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλ' ἦτοι διὰ τοῦ ἑτέρου ἢ δι' οὐδετέρου [ἥξει]. εἰ μὲν διὰ τοῦ Η μόνου, οὐκ ἔσται ἢ ΔΒ τῇ ΒΚ ἴση, ἀλλ' ἑτέρα· ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ μόνου τοῦ Κ, οὐκ ἔσται, ὡς ἢ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἢ ΓΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ἄλλη τις πρὸς ἄλλην. εἰ δὲ δι' οὐδετέρου τῶν Κ, Η, ἀμφοτέρα τὰ ἀδύνατα συμβήσεται. Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης, καὶ ἢ μὲν ΒΔ ἤχθω τὴν Β τομὴν καθ' ἓν μόνον τέμνουσα, τῇ δὲ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτῶτων παράλληλος, ἢ δὲ ΔΑ τὴν Α τομὴν ὁμοίως, καὶ ἔστω ἴση ἢ μὲν ΔΒ τῇ ΒΗ, ἢ δὲ ΔΑ τῇ ΑΚ. ^[5]

- 4 23 λέγω, ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμβάλλει ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η. ἥτοι δὴ διὰ τοῦ ἐτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται ἡ δι' οὐδετέρου, καὶ ἥτοι ἡ ΔΑ οὐκ ἔσται ἴση τῇ ΑΚ, ἀλλὰ ἄλλη τινί· ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ ΔΒ τῇ ΒΗ οὐκ ἴση, ἢ οὐδετέρα οὐδετέρα, καὶ πάλιν ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται. ἥξει ἄρα ἡ ΕΖ διὰ τῶν Κ, Η. Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μὲν τι εἶναι ταυτόν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν. ^[15]
- 4 24 εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἡ ΔΑΒΓ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΕΑΒΓ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒΓ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ ΑΔ καὶ τὸ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ ΑΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΘ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ ΒΗΖ. ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΘ ἐφάπεται ἐκατέρας τῶν τομῶν καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ΔΕΓ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ ἡ ΔΖ τῇ ΖΓ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἡ ΕΖ τῇ ΖΓ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἔστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων. ^[15]
- 4 25 εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω κατὰ πέντε τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῶν τομῶν ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΑΒ, ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη ἐφ' ἐκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΑΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται. ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἐκατέραν τομὴν, ἐπεὶ περ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστι. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἐτέραν τομὴν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἐτέραν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΑΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ. τοῦτο δὲ ἀδύνατον· ὥστε καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι ᾖσιν, ἔσονται μὲν αἱ τομαὶ ἐλλείψεις ἢ κύκλου περιφέρεια. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΟ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἐκάτερα· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς. συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ. ἔσται δὴ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΘΡ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ. ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰς ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΝΜΗ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἐκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι ἐτέρα σύμπτωσις οὐκ ἔστι παρὰ τὰς Α, Β, Γ, Δ. ἔσται δὲ διὰ ταῦτα ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ ἡ ΝΜ ἴση τῇ ΕΝ, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἡ ΝΕ τῇ ΝΗ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΝΗ ἔστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν τῶν εἰρημένων γραμμῶν τινες καθ' ἓν ἐφάπτωνται σημεῖον ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἑαυταῖς καθ' ἕτερα σημεῖα πλείονα ἢ δύο. ^[30]
- 4 26 ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων τινὲς δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον. λέγω, ὅτι οὐ συμβάλλουσιν κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλλήλαις μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάπεται δὴ τῶν δύο τομῶν καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ γινέσθω, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΑΒ, ἡ ΓΠ πρὸς ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν. ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΑΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἐκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα. οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ἢ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν

ἀποδείξιν διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ. Ἐὰν τῶν προειρημένων γραμμῶν τινες κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον. ^[30]

4 27 δύο γὰρ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἀλλήλαις κατὰ ἄλλο σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν καὶ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρότερον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν Α, Β ἀφῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι· ἐφάψονται ἄρα ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν. ἐφαπτέσθωσαν καὶ συμπίπτεωσαν κατὰ τὸ Λ, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΛ· τεμεῖ δὴ ἐκατέραν τῶν τομῶν. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝΒ. ἔσται ἄρα ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΑΗ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΗ, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΑΜ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΜ· ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν δὲ ἡ ΓΗ παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν ΑΒ ἐροῦμεν, ὅτι διάμετρος ἔσται τῶν τομῶν. ^[15]

4 28 ὥστε δίχα τμηθήσεται ἐκατέρα τῶν ΓΗ, ΓΜ κατὰ τὸ Ν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσιν αἱ γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνον τὰ Α, Β. Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἀφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς. ^[5]

4 29 φανερόν, ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ· κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπόκεινται ἐφαπτόμεναι. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ζ διάμετρος ἔσται. διὰ μὲν οὖν τοῦ Γ οὐκ ἐλεύσεται. εἰ γὰρ ἤξει, ἡ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν· τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΚΗΜ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ ἡ ΓΚ τῇ ΚΗ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἡ ΚΜ τῇ ΚΓ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΚΗ ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν παράλληλοι ᾖσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται. Παραβολὴ παραβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. ^[20]

4 30 εἰ γὰρ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ παραβολαὶ κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΑΒ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων καὶ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Λ. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν δύο γραμμαὶ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ δύο τὰ Α, Β, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον· ὥστε ἡ ΑΖ ἐκατέραν τῶν τομῶν τέμνει. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ἐτέραν τομὴν ἡ ΑΗ τῇ ΗΖ ἴση, διὰ δὲ τὴν ἐτέραν ἡ ΑΜ τῇ ΜΖ ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παραβολὴ παραβολῆς ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. Παραβολὴ ὑπερβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐκτὸς αὐτῆς πίπτουσα. ^[15]

4 31 ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ ΑΗΒ, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἐκατέρας τῶν Α, Β τομῶν συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τομαὶ κατὰ τὰ Α, Β ἐφάπτονται, κατ' ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα ΑΖ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΑΖ· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω κέντρον τὸ Δ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ καὶ λοιπὴ ἡ ΖΜ πρὸς ΜΛ. μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΜ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΜ τῆς ΜΛ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ· ὅπερ ἀδύνατον. Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα. ^[15]

4 32 ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ τεμεῖ δὴ ἐκατέραν τῶν τομῶν κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο, ὡς εἴρηται. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΖ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τοῦ κύκλου. ἔστιν ἄρα διὰ

τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον, ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΗ πρὸς ΔΖ καὶ λοιπὴ ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ. μείζων δὲ ἡ ΛΔ τῆς ΔΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΗ τῆς ΗΖ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ· ὅπερ ἀδύνατον. Ὑπερβολὴ ὑπερβολῆς τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα οὐκ ἐφάπτεται κατὰ δύο σημεῖα. ^[15]

4 33 ὑπερβολαὶ γὰρ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσαι τὸ Δ, εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, ἥχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΛ καὶ ἐκβεβλήσθω. ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ΔΖ τὴν ΑΒ δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ζ. τεμεῖ δὴ ἡ ΔΖ τὰς τομὰς κατὰ τὰ Η, Μ. ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ΑΗΒ ὑπερβολὴν ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΔΛ τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ΑΜΒ τὸ ὑπὸ ΖΔΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτεται τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα, ἢ τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πεσεῖται. ^[10]

4 34 ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἥχθωσαν καὶ, εἰ δυνατόν, συμπίπτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ ΑΒ δίχα τεμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῶν τομῶν. ἔστω, εἰ δυνατόν, κέντρον τὸ Δ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΔΖ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΔ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΗΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι συμπεσοῦνται παράλληλοι ἄρα εἰσὶν, καὶ διὰ τοῦτο διάμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ. ὥστε διὰ τοῦ κέντρου πίπτει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ^[15]

4 35 εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΑΔΒΕΓ συμβαλλέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῇ ΑΒΓ γραμμῇ εἴληπται τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, γωνίαν ἄρα περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ΑΒΓ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΔΒΕΓ γραμμῆς. αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα ἅμα καὶ τὰ κυρτὰ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμπτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι, προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων. ^[5]

4 36 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, ΑΕΓΖ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΖ συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἐχέτωσαν αἱ ΑΒΖ, ΑΓΖ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΖ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ Δ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ Δ, ΑΓΖ, καὶ ἡ ΑΖ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολὴν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ Δ ἀντικειμένῃ. οὐδὲ ἄρα ἡ ΑΒΖ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ Δ. Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, τῇ λοιπῇ αὐτῶν οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ^[15]

4 37 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ συμβαλλέτω τῇ Α κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ καὶ τεμνέτω τὴν Β ἀντικειμένην κατὰ τὰ Β, Γ. λέγω, ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΓ. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτέτω κατὰ τὸ Δ. ἡ ἄρα ΒΓΔ τῇ ΒΓ τομῇ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα τὰ κοῖλα· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς ἀντικειμένης ἐφάπτεται. Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα. ^[10]

4 38 φανερόν δὲ τοῦτο ἐκ τοῦ τῇ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσιν αὐτὴν τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυεῖν μὴ συμπίπτειν. Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτεται τοῖς κοίλοις αὐτῆς, τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται. ^[5]

- 4 39 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ. ἐκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ Α· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Β. ὥστε οὐδὲ ἡ ΓΑΔ. Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται σημεῖον, καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.
[5]
- 4 40 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐφαπτέσθω ἐκατέρας τῶν Α, Β κατὰ τὰ Α, Β. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς Α τομῆς ἐφάπτεται καθ' ἓν συμπίπτουσα καὶ τῇ Β, τῆς Α ἄρα τομῆς οὐκ ἐφάπεται κατὰ τὰ κοῖλα. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ τῆς Β. ἤχθωσαν τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΒΕ· αὗται δὲ ἐφάψονται τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ἡ ἐτέρα αὐτῶν, καὶ ἔστω ἡ ΑΖ. μεταξὺ ἄρα τῆς ΑΖ ἐφαπτομένης καὶ τῆς Α τομῆς παρεμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΗ· ὅπερ ἀδύνατον. ἐφάψονται ἄρα τῆς ΑΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο φανερόν, ὅτι ἡ ΑΒΓ καθ' ἕτερον οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β ἀντικειμέναις. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα συμπίπτῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.
[15]
- 4 41 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ τοῖς κοίλοις, καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴν τὴν ΑΒΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη δὲ ἐφ' ἐκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ τομῇ. ὁμοίως δὲ διὰ τὴν ΑΒΓ ὑπερβολὴν οὐδὲ τῇ Ε ἀντικειμένη συμπίπτει. οὐδὲ ἡ Ε ἄρα τῇ Ζ συμπεσεῖται. Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.
[15]
- 4 42 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἡ ΑΓΒ ὑπερβολὴ συμπιπτέτω ἐκατέρᾳ τῶν Α, Β ἀντικειμένων. λέγω, ὅτι ἡ τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β τομαῖς κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω. διὰ μὲν δὴ τὴν ΔΕ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΑΒ τομῇ, διὰ δὲ τὴν ΑΕΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Β· διὰ γὰρ τῶν τριῶν τόπων ἐλεύσεται· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ τῇ Β τομῇ κατὰ δύο σημεῖα συμπεσεῖται. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ οὐδὲ ἐφάπεται ἐκατέρας αὐτῶν. ἀγαγόντες γὰρ ἐπιψαύουσιν τὴν ΘΕ ἐφάπτεται μὲν αὕτη ἐκατέρας τῶν τομῶν· ὥστε διὰ μὲν τὴν ΔΕ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ οὐ συμβάλλει τῇ Β. ὥστε οὐδὲ ἡ ΑΓ τῇ Β συμβάλλει· ὅπερ οὐκ ὑπόκειται. Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα πρὸς ἐκατέραν τὰ κυρτὰ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾶ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.
[20]
- 4 43 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἐκατέραν τῶν Α, Β τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ. λέγω, ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ οὐδεμιᾶ τῶν Α, Β συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ Α κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὲ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς. καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΑΘΒ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολὴ ἐστὶν ἡ ΓΑΕ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΓΑΘ, ΘΕ, καὶ αἱ Γ, Α συμπτῶσεις οὐ περιέχουσι τὴν Ε, τὸ Θ σημεῖον ἔσται μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΓΑΕ τομῆς. καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΒΔ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Θ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΓΘΕ γωνίας· ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΑΘΒ. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ μιᾶ τῶν Α, Β συμπεσεῖται. Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν

τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα σημεῖα τέμνη, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων. ^[30]

- 4 44 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Κ. λέγω, ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτετω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπίπτετωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΑΒ, ἐχέτω ἡ ΑΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ. ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν ὑπὸ ΒΛΓ γωνίαν καὶ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. τεμνέτω κατὰ τὰ Ζ, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὰς ΑΘΖΗ, Κ ἀντικείμενας, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΖ πρὸς ΖΛ, διὰ δὲ τὰς ΑΒΓΔ, Ε, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ Ε, Κ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. Ἐὰν ὑπερβολὴ τῇ μὲν τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα αὐτῇ τὰ κοῖλα, τῇ δὲ καθ' ἓν σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ^[20]

- 4 45 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, Γ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓΒ τῇ μὲν ΑΒ συμπίπτετω κατὰ τὰ Α, Β, τῇ δὲ Γ καθ' ἓν τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη ἡ Δ. λέγω, ὅτι ἡ Δ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, Γ συμπεσεῖται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΓ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται. ἀλλ' οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν τὸ Γ. εἰ γὰρ συμβάλλουσι καὶ καθ' ἕτερον, τῇ ΑΒ ἀντικειμένη οὐ συμπεσοῦνται· ὑπόκεινται δὲ συμπίπτουσαι. αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ' ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲ ὅλως συμβάλλουσιν. ἡ Δ ἄρα ἔσται ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΓΖ. ὥστε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται ταῖς ΑΒ, Γ. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλὴν καθ' ἓν. ^[20]

- 4 46 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΜΒΓ συμβαλλέτω τῇ ΑΒΓ κατὰ τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ τῇ ΑΜΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ [τῇ δὲ ΑΒΓ ἡ ΔΕΖ]. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕΚ τῇ ΔΕΖ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ. ἥτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν ἢ οὐ. ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ πασῶν τῶν τομῶν καὶ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΔΕ. ἦχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΝΕΟ· ἔσται δὴ καὶ αὐτὴ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένη καὶ συμπεσεῖται ταῖς τομαῖς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. εἰ γὰρ κατὰ τὸ αὐτό, οὐκέτι κατὰ τρία συμβάλλουσιν, ἀλλὰ τέσσαρα. ἔσται δὴ ἓν μὲν τῇ ΑΜΒ τομῇ ἴση ἡ ΓΝ τῇ ΝΞ, ἓν δὲ τῇ ΑΛΒ ἡ ΓΝ τῇ ΝΟ. καὶ ἡ ΟΝ ἄρα τῇ ΝΞ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΔΕ, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι συμπίπτετωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ ΓΟ ἦχθω παρὰ τὴν ΑΠ καὶ συμπίπτετω τῇ ΔΠ ἐκβληθείῃ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ διάμετροι ἦχθωσαν αἱ ΗΣΙ, ΘΛΜ, ἀπὸ δὲ τῶν Ι, Λ, Μ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΙΥΤ, ΜΥ, ΛΤ· ἔσται δὴ ἡ μὲν ΙΤ παρὰ τὴν ΔΠ, αἱ δὲ ΛΤ, ΜΥ παρὰ τὰς ΑΠ, ΟΡ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ, ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ, τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΞΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΙ, τὸ ὑπὸ ΟΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΡΓ τῷ ὑπὸ ΞΡΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μὲν ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνη, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ^[35]

- 4 47 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολὴ τις ἡ ΑΒΔ τὴν μὲν ΑΒΓ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῆς δὲ Δ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς ΑΒΔ τομῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ

οὐδεμιᾶ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτει τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἦχθω συμπίπτουσα τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΑΒΔ τομῆς. καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΒΖΔ περιεχομένης γωνίας, πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολὴ ἐστὶν ἡ ΑΒΓ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΑΒ, ΓΖ, καὶ αἱ Α, Β συμπτώσεις οὐ περιέχουσι τὴν Γ, τὸ Ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτῶτων ἐστὶ τῆς ΑΒΓ τομῆς. καὶ ἐστὶν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Δ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΑΖΓ γωνίας· ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΒΖΔ. οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ μιᾶ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἀντικειμένη οὐ συμπεσεῖται. ^[20]

4 48 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολὴ τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε. λέγω, ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτει κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτῶτων περιεχομένης γωνίας ἐστὶ. καὶ ἡ ΑΖ ἐφάπτεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ. καὶ ὃν δὴ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἐχέτω ἡ ΓΛ πρὸς ΑΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΛ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. τεμνέτω κατὰ τὰ Ν, Μ· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Ν, Μ ἐφάψονται τῶν τομῶν, καὶ ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον διὰ μὲν τὴν ἐτέραν τομὴν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἐτέραν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀντικειμένη συμπεσεῖται. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη καθ' ἕτερον αὐτῇ σημεῖον συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν. ^[20]

4 49 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολὴ τις ἡ ΔΑΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ ἐτέρᾳ ἀντικειμένη κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἓν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ δύο τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἦχθω ἡ ΑΚ. ἦτοι δὲ παράλληλοι εἰσιν ἡ οὐ. ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ ἦχθω ἡ διχοτομοῦσα διάμετρος τὴν ΕΖ· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν. ἦχθω διὰ τοῦ Γ παρὰ τὰς ΑΚ, ΕΖ ἡ ΓΛΔΒ· τεμεῖ ἄρα τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. ἔσται δὲ ἓν μὲν τῇ ἐτέρᾳ ἴση ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ, ἐν δὲ τῇ λοιπῇ ἡ ΓΛ τῇ ΛΒ. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλὰ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ παρὰ τὴν ΑΚ ἡγμένη συμπίπτει τῇ ΕΖ κατὰ τὸ Ν, ἡ δὲ ΑΒ διχοτομοῦσα τὴν ΕΖ τεμνέτω τὰς τομὰς κατὰ τὰ Ξ, Ο, καὶ ἐφαπτόμεναι ἦχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ. ἔσται ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΞ, τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΟ, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ ΔΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ, τὸ ὑπὸ ΒΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΝΓ τῷ ὑπὸ ΒΝΓ· ὅπερ ἀδύνατον. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο. ^[30]

4 50 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΕΔΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστω τῆς ΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τρία τὰ Δ, Ε, Θ, καὶ ἦχθω τῶν ΑΒ, ΑΓ ἐφαπτομένη ἡ ΑΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΔΕ· καὶ τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. ἔσται δὲ διάμετρος ἡ ΑΛ τῶν δύο συζυγῶν καὶ τέμνει τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε κατὰ τὰ Μ, Ν [ὥστε ἡ ΔΛΕ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ]. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΖΗ· ἔσται δὲ ἓν μὲν τῇ ἐτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΖ, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΗ. ὥστε καὶ ἡ ΞΖ τῇ ΞΗ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπίπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γεγονέντω, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΚ συμπίπτει τῇ ΖΘ κατὰ τὸ Ρ. ὁμοίως δὲ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ ΔΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ἐν

μὲν τῇ ΖΔΕ τομῇ τὸ ὑπὸ ΖΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ, ἐν δὲ τῇ ΗΔΕ τὸ ὑπὸ ΗΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΡΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΡΘ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο. Ἐὰν ὑπερβολὴ ἐκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ^[35]

4 51 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἐκατέρας αὐτῶν ἐφαπτέσθω κατὰ τὰ Α, Β, ἀντικειμένη δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ Ε. λέγω, ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτει τῇ Α κατὰ τὸ Δ, καὶ ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις ἐντὸς τῶν ἀσυμπτῶτων τῆς ΑΒ τομῆς. συμπίπτει τῶν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἔσται τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ Ε συμπεσεῖται ταῖς Α, Β. Ἐὰν ἐκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἐκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα, οὐ συμπεσεῖται καθ' ἕτερον σημεῖον. ^[10]

4 52 ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα. λέγω, ὅτι καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ συμπίπτει κατὰ τὸ Ε, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΑΓ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Δ τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΔ ἦχθω ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ δευτέρα διάμετρος ἦχθω τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΚΛ· τεμεῖ δὴ τὴν ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. ἴση ἄρα ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται κατ' ἄλλο σημεῖον. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται. ^[15]

4 53 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῆς ΑΓ ἡ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ Ζ τῇ Ε οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπίπτει κατὰ τὸ Ε, καὶ ἦχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΗ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. ἔστω δὴ ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἀφὰς ἐπέευσεν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἐτέρᾳ συζυγίᾳ, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΗ, ἐν δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ Ζ τῇ Ε συμβάλλει. Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἐτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται. ^[20]

4 54 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολὴ τις ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῆς ΑΔ ἔστω ἡ Ζ. λέγω, ὅτι ἡ Ζ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται. ἦχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ διὰ μὲν τὴν ΑΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ, διὰ δὲ τὴν Α οὐ συμπεσεῖται τῇ Β. ὥστε ἡ ΑΓ μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β, Ζ τομῶν. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ Β τῇ Ζ οὐ συμπεσεῖται. Ἀντικείμεναι ἀντικείμενας οὐ τέμνουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα. ^[10]

4 55 ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἕτεροι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ, καὶ τεμνέτω πρότερον ἡ ΑΒΓΔ τομὴ ἐκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς. ἡ ἄρα ἀντικειμένη τῇ ΑΒΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται. ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΒΓΔ τὴν μὲν ΑΒ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ Γ καθ' ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· ἡ ΕΖ ἄρα τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ τῇ ΑΒ συμβάλλει ἡ ΕΖ, καθ' ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει τῇ ΑΒ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΑΒΓ τῇ ἐτέρᾳ ἀντικειμένη τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ καθ' ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα. εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ ΑΒΕ συμβάλλει ἡ ΕΖ, τῇ μὲν Δ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒΕ συμπίπτουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ ἐκατέραν τέμνει καθ' ἓν

σημεῖον, ἡ EZ οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεία. ὥστε διὰ τὰ εἰρημένα καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν αἱ ABΓΔ, ΓΖ ἀντικειμέναις ταῖς BE, EZ τομαῖς οὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεία ἢ τέσσαρα. ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσι, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν τέμνῃ κατὰ τέσσαρα τὰ A, B, Γ, Δ, ὥς ἐπὶ τῆς πέμπτῃς καταγραφῆς, ἡ EZ τῇ ἑτέρᾳ οὐ συμπεσεῖται. οὐδὲ μὴν ἡ EZ οὐ συμπεσεῖται τῇ AB· πάλιν γὰρ ἔσται ἡ AB ταῖς ABΓΔ, EZ ἀντικειμέναις συμπίπτουσα κατὰ πλείονα σημεία ἢ τέσσαρα [ἀλλ' οὐδὲ ἡ ΓΔ τῇ EZ συμπεσεῖται]. εἰ δέ, ὥς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ABΓΔ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεία, ἡ EZ τῇ ἑτέρᾳ καθ' ἓν μόνον συμπεσεῖται. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς προτέροις ἐροῦμεν. ^[45]

4 55 (50) ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθέν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεία ἢ τέσσαρα. Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσιν, οὐ συμπεσοῦνται καὶ κατ' ἄλλα σημεία πλείονα ἢ δύο. ^[55]

4 56 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, BΓ καὶ ἕτεραι αἱ Δ, EZ, καὶ ἡ BΓΔ τῆς AB ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ B, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, καὶ συμπίπτέτω πρῶτον ἡ BΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεία τὰ Γ, Δ, ὥς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος. ἐπεὶ οὖν ἡ BΓΔ κατὰ δύο τέμνει ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ EZ τῇ AB οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ BΓΔ τῆς AB ἐφάπτεται κατὰ τὸ B ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ EZ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα EZ οὐδετέρᾳ τῶν AB, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται· κατὰ δύο μόνον ἄρα τὰ Γ, Δ συμβάλλουσιν. ἀλλὰ δὴ τὴν ΓΔ ἡ BΓ τεμνέτω καθ' ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὥς ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἡ ἄρα EZ τῇ μὲν ΓΔ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ AB συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον. εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει ἡ EZ τῇ AB, ἡ BΓ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ συμβάλλουσα καθ' ἓν. εἰ δὲ ἡ BΓ τῇ Δ τομῇ μὴ συμπίπτῃ, ὥς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ EZ τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ EZ τῇ AB οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο. ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις ἀρμόσουσι. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν. Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐπιψαύωσι, καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται. ^[30]

4 57 ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, ΓΔ καὶ ἕτεραι αἱ AΓ, EZ καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὥς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος, κατὰ τὰ A, Γ. ἐπεὶ οὖν ἡ AΓ ἐκατέρας τῶν AB, ΓΔ ἐφάπτεται κατὰ τὰ A, Γ σημεία, ἡ EZ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν AB, ΓΔ συμπεσεῖται. ἐφαπτέσθωσαν δὴ, ὥς ἐπὶ τοῦ δευτέρου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΓΔ τῇ EZ οὐ συμπεσεῖται. ἐφαπτέσθω δὴ, ὥς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, ἡ μὲν ΓΑ τῆς AB κατὰ τὸ A, ἡ δὲ Δ τῆς EZ κατὰ τὸ Z. ἐπεὶ οὖν ἡ AΓ τῆς AB ἐφάπτεται ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά ἔχουσα, ἡ EZ τῇ AB οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ZΔ τῆς EZ ἐφάπτεται, ἡ ΓΑ τῇ ΔZ οὐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ ἡ μὲν AΓ τῆς AB ἐφάπτεται κατὰ τὸ A, ἡ δὲ EΓ τῆς ΓΔ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὥς ἐπὶ τοῦ τετάρτου σχήματος, καθ' ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται. οὐδὲ μὴ ἡ EZ τῇ AB συμπεσεῖται. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν. ^[20]