

eul_wid: upk-aa

Ἀνώνυμος Μαθητής τοῦ Ἰσιδώρου τοῦ Μιλησίου · Disciple of Isidore of Miletus Anonymous

Euclid's Elements Book XV

Στοιχεῖα Εὐκλείδου

Period: Ὀψιμαρχία Late Antique
Dialect: Κοινή τεχνική Technical Koine
Domain: Ἐπιστήμη Science
Format: Πραγματεία Treatise

- ¹ Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. φανερόν δὴ, ὅτι τὰ ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΘΓΕ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστιν. τετραγώνων γὰρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραί. πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ· καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον. Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. ^[5]
- ² Ἐστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, ἥς κορυφή τὸ Δ σημεῖον, εἰς ἣν δεῖ ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΓ δίχα τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ καὶ αἱ λοιπαί. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλῇ ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΗΖ καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ. λέγω, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ΚΛ κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΚ, ΚΛΛΗ, ὁμοίως δεῖξομεν τὰ ἐπὶ τοῦ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. ^[12]
- ³ Ἐστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ἐφεστῶτων τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΛΜΝ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν Κ, Λ παράλληλοι αἱ ΞΟ, ΠΟ. ἐπεὶ οὖν διπλῇ ἐστὶν ἡ μὲν ΠΟ τῆς ΟΚ, ἡ δὲ ΞΟ τῆς ΟΛ, ἴση ἐστὶ τῇ ΚΟ ἢ ΟΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΞ τῇ ΞΛ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΟΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΞ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΛ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. εἰλήφθω τῶν ΒΔ, ΕΗ δύο τετραγώνων τὰ κέντρα τὰ Ρ, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΚ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. καὶ φανερόν, ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα· τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν. Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι. ^[21]
- ⁴ Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ Η, Θ, Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ, ΘΛ, ΑΚ. λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΚΛ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ, Κ, Λ ταῖς ΒΓ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλοι αἱ ΜΟ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἴση ἄρα ἡ ΝΘ τῇ ΜΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΗΟ τῇ ΜΗ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΜ τῇ ΗΜ, ἐπεὶ περ καὶ ἡ ΟΜ τῇ ΜΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ ΗΜΘ· ἐξ οὗ φανερόν, ὅτι ἡ ΗΘ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΘΚΛ, ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡμισὺ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΘΜ, ΝΘΛ ὀρθῆς,

λοιπή ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΘΛ ὀρθή ἐστίν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛ. δυνατὸν δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντα τὰ Η, Θ, Κ, Λ κέντρα καὶ παραλλήλους ἀγαγόντα τὰς ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΜ ἐπιζευξαι τὰς ΗΘ, ΘΛ, ΛΚ, ΚΗ καὶ εἰπεῖν τὸ ΗΘΚΛ τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἐπιζεύξωμεν κατὰ τὰ αὐτά, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα καὶ ἔξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι. ^[32]

5 Ἐκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ ΑΖΕ, ΑΖΒ, ΒΖΓ, ΖΓΔ, ΔΖΕ τρίγωνα τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ. καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, Ν, Ο. δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ ΕΑ, ΑΒ, ΒΓ τοῖς Ξ, Ν, Ο σημείοις. καὶ ὥς ἡ ΝΞ πρὸς ΝΟ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΚ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΘΚ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ΗΘΚΛΜ πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. λέγω, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΝΞ, ΝΟ παρὰ δύο τὰς ΗΘ, ΘΚ ἴσας γωνίας περιέχουσιν, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. νενοήσθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἡγμένη, ἣτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος, ἐπιζεύξωμεν καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερόν, ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτου. πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν Ζ, Η ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπιζευγνυμένη, ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς· ἐξ οὗ φανερόν, ὅτι ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι, ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον; φήσομεν οὕτως φανερόν, ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου· γίνεται δὲ ἐξήκοντα· ὧν ἡμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου πάλιν· ἐπειδὴ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιούμεν δωδεκάκις πέντε· γίνονται ἐξήκοντα. πάλιν τὸ ἡμισυ· γίνεται τριάκοντα. διὰ τί δὲ τὸ ἡμισυ ποιούμεν; ἐπειδὴ ἐκάστη πλευρά, εἴτε ἡ τρίγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ τετράγωνον, ὥς ἐπὶ κύβου, ἐκ δευτέρου λαμβάνεται. ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ τοῦ κύβου καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὐρήσεις τὰς πλευρὰς. Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἐκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὐρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ, οἷον, ἐπειδὴ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι πέντε τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰ πέντε· γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. ^[45]

5 (50) ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν· μέρισον παρὰ τὰ τρία, καὶ ἔξεις εἴκοσι γωνίας οὔσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὐρήσεις τὰς γωνίας. Ἐζητήθη, πῶς ἐφ' ἐκάστου τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων ἐνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιοουσὶν δοθέντος εὐρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ἣ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. ἡ δὲ εὐρεσις, ὥς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον· ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ὀρθὴν τέμνουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκτεθέντος ἐνὸς τριγώνου κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένη περιφέρειαι γραφεῖσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γεγράφθωσαν περιφέρειαι· καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι

εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως, ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου ἐπεζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφεισῶν περιφερειῶν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτείνουσας εὐθείας κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένη καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι· καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου. Οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλεέστατος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον σαφοῦς ἐφ' ἑκάστῳ φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως, ἐπὶ δὲ τῷ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνίσω, καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νενοήσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη ἡ ΑΒΓΔ τοῦ ΑΒΓ βάσεως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τοῦ Δ. καὶ τμηθείσης τῆς ΑΔ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ Ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ ΑΔ, αἱ ΒΕ, ΓΕ ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν ΑΔ. ^[95]

5 (100) λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῇ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ λόγον ἔχει, ὃν δὲ πρὸς γ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΓ ἑλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΒΕ, ΕΓ. ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ ΑΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς εἰσιν εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἡγμέναι αἱ ΒΕ, ΕΓ καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ἄρα γωνία ἡ κλίσις ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων. καὶ ἐστὶ δεδομένη· δέδοται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ οὔσα τοῦ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΕ, ΕΓ κάθετος οὔσα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. κέντροις τοίνυν τοῖς Β, Γ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Β, Γ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων· τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκατέρα γὰρ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ. οἱ δὲ κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΒΓ γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων· εἰ δὲ ἐλάττων ἦ, οὐδὲ ἐφάπτονται οὐδὲ τέμνουσιν· εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσιν. καὶ οὕτως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφὴς τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος. Νενοήσθω δὲ πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ ΑΒΓΔ πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔσται δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἡμισὺ ὀκταέδρου. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΔΖ. ἴσαι ἄρα εἰσιν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει, ὥς ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν δὲ πρὸς γ. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν ἡ πρὸς γ. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΔΖ μείζον ἐστίν. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ [γωνία]. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ τεμνόντων ἄλληλα κοινὴ τομὴ ἐστὶν ἡ ΑΕ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἡγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἄρα γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ ἐπιπέδων. ^[145]

5 (150)

ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρὰ ἐστὶ τοῦ ὀκταέδρου ἡ ΑΔ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγέγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος οὕσα τοῦ τετραγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ κάθετοι τοῦ τριγώνου. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία δέδοται. ἀναγραφέντος ἄρα τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τοῦ ΑΓ καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τῆς ΒΔ ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ ΒΖΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν, ὡς ἑκατέρα τῶν ΒΖ, ΖΔ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς μὲν τὴν ΔΖ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ἡ πρὸς γ· τῆς δὲ ἡμισείας τῆς ΒΔ δυνάμει ἐστὶ τετραπλασία, ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν ΒΖ, ΖΔ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου. Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ζ, ὡς τὰ περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι. ἔσται δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. τετμήσθω μία πλευρὰ ἐνὸς τριγώνου ἡ ΖΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΗ, ΗΔ ἴσαι τε οὕσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ΓΖ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἀμβλεῖα ἐστὶν. καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΒΔ ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ ΒΓΔ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΔ· ἐλάττωες γὰρ αἱ ΒΗ, ΗΔ τῶν ΒΓ, ΓΔ. ὁμοίως δὲ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία ἡ λείπουσά ἐστὶν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ΒΖΓ, ΓΖΔ τριγώνων. ταύτης δοθείσης δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεϊνούσης τοῦ πενταγώνου ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς ΒΔ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ΒΗ, ΗΔ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΔ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς ὑποτεϊνούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς ΒΔ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσιν, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ Η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὰ Β, Δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσιν τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΒΗ, ΗΔ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΔ, εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι. ^[195]

- 5 (200) Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ ΘΚΛ, ἀπὸ δὲ τῆς ΚΛ πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ ΚΜΝΞΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ, καὶ ἦχθω κάθετος τοῦ ΘΚΛ τριγώνου ἡ ΘΟ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΟ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ. ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΛ καθέτου τῆς ΚΠ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΛΠ μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΚΘΟ, συνεστάτω τῇ ὑπὸ ΚΘΟ ἴση ἡ ὑπὸ ΠΛΡ. ἡ ἄρα ΠΛ κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ΡΛ. ὥστε τὸ ἀπὸ ΡΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΠ λόγον ἔχει, ὃν ὁ δ πρὸς γ· μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΛΡ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ πρὸς γ· ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΟ, ὃν ὁ δ πρὸς γ· ἡ ἄρα ΚΛ πρὸς τὴν ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὴν ΘΟ. μείζων ἄρα ἡ ΘΟ τῆς ΛΠ. Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτως· νενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται, τὸ ΑΒΓΔ καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ. λέγω δὲ καὶ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἦχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ. φημὶ δὲ πρῶτον, ὅτι ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖα ἐστὶν. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ' βιβλίῳ τῶν στοιχείων ἥτοι τῆς συστάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἡμίσειά ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ, καὶ διὰ

τοῦτο ἢ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. συναποδέδεικται δὲ ἐν αὐτῷ τῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου. ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν ΚΛ καὶ τὴν ΚΜ ἴσας οὕσας μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ. τῆς ἄρα ὑπὸ ΜΚΛ γωνίας δοθείσης ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἢ κλίσεις ἔσται τῶν ἐπιπέδων δηλονότι δεδομένη. ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἢ ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον, δέδοται ἄρα ἡ ΜΛ. δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΜΚ, ΚΛ· κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσης ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου ὡς τὴν ΖΗ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΜ ἢ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρή δοθέντος τοῦ πενταγώνου ἐπιζευξαι τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένη καθέτῳ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς αἱ ΚΛ, ΚΜ, γράφειν περιφερείας καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων. ^[245]

5 (250) ὅτι γὰρ ἡ ΚΛ κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο.